ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 40–56
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-40-56

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. **В. И. КОРЗЮК, Я. В. РУДЬКО**

Посвящается Safkagosu

Аннотация. Для нелинейного биволнового уравнения, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временной полуоси задаются условия Дирихле и Неймана. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегро-дифференциальных уравнений. С помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок проводится исследование разрешимости этих уравнений, а также зависимости от начальных данных и гладкости их решений. Для рассматриваемой задачи доказана единственность решения и установлены условия, при выполнении которых существует классическое решение. При невыполнении условий согласования строится задача с условиями сопряжения, а при недостаточно гладких данных — слабое решение.

Ключевые слова: классическое решение, смешанная задача, условия согласования, метод характеристик, нелинейное биволновое уравнение.

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH THE DIRICHLET AND NEUMANN CONDITIONS FOR A NONLINEAR BIWAVE EQUATION

© 2024 **V. I. KORZYUK, J. V. RUDZKO**

Dedicated to Safkagosu

Abstract. For a nonlinear biwave equation given in the first quadrant, we consider a mixed problem in which the Cauchy conditions are specified on the spatial half-line, and the Dirichlet and Neumann conditions are specified on the time half-line. The solution is constructed by the method of characteristics in an implicit analytical form as a solution of a certain integro-differential equations. By the method of continuation with respect to a parameter and a priori estimates, the solvability of these equations, the dependence on the initial data, and the smoothness of solutions are examined. For the problem considered, the uniqueness of the solution is proved and the conditions of the existence of classical solution are established. If the matching conditions are not met, then a problem with conjugation conditions is constructed, and if the data is not sufficiently smooth, then a mild solution is constructed.

Keywords and phrases: classical solution, mixed problem, matching conditions, method of characteristics, nonlinear biwave equation.

AMS Subject Classification: 35Axx, 35C15, 35D99, 35Lxx

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект № 075-15-2022-284).

1. Постановка задачи. В области $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x)\in \overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\Box_a\Box_b u(t,x) = \mathcal{F}[u](t,x) := f\Big(t,\ x,\ u(t,x),\ \partial_t u(t,x),\ \partial_x u(t,x),$$
$$\partial_t^2 u(t,x),\ \partial_t\partial_x u(t,x),\ \partial_x^2 u(t,x),\ \partial_t^3 u(t,x),\ \partial_t^2\partial_x u(t,x),\ \partial_t\partial_x^2 u(t,x),\ \partial_x^3 u(t,x)\Big), \quad (1)$$

где $\Box_a = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ — оператор Д'Аламбера, f — функция, заданная на множестве $[0,\infty)\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^{10}$, a и b — заданные положительные действительные числа, $0<a\leqslant b$. К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$\partial_t u(0,x) = \varphi_0(x),\quad \partial_t u(0,x) = \varphi_1(x),\quad \partial_t^2 u(0,x) = \varphi_2(x),\quad \partial_t^3 u(0,x) = \varphi_3(x),\quad x\in[0,\infty), \quad (2)$$

и граничные условия

$$u(t,0) = \mu_0(t),\quad \partial_x u(t,0) = \mu_1(t),\quad t\in[0,\infty), \quad (3)$$

где φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, μ_0 и μ_1 — функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$.

Задача (1)–(3) в линейном случае при $f(t,x,\boldsymbol{u}) = f(t,x)$ была изучена в [4,5,16]. В [2] фактически была рассмотрена задача (1) с граничными условиями $u(t,0) = \partial_x^2 u(t,0) = 0$ и условиями Коши, содержащими дельта-функцию, при $f(t,x,\boldsymbol{u}) = -m\partial_t^2 u$. Более общий линейный случай задачи был рассмотрен в [19], однако там исследовалось обобщенное решение в пространствах Соболева, а не классическое. В [6,15] рассматривались многомерные линейные обобщения задачи для уравнений вида (1), однако там авторам не удалось вывести энергетическое неравенство для аналога граничных условий (3), и, следовательно, решить задачу (1)–(3). В [24] при помощи интегральных преобразований и метода отражений была изучена смешанная задача для уравнения (2) при $f(t,x,\boldsymbol{u}) = f(t,x) - m\partial_t^2 u$ с однородными граничными условиями вида $u(t,0) = \partial_x^2 u(t,0) = 0$; также было отмечено, что случай условий (3) более сложен и требует других методов изучения.

Также следует отметить работу [20], где был проведен симметрийный анализ уравнения (1) при $a=b=1$ и были найдены некоторые частные решения. Относительно линейного уравнения (1) при $a=b=1$ следует упомянуть тот факт, что для него хорошо проработана теория смешанных задач с условиями Гурса на характеристиках [1,3,22,25,27], но это нельзя сказать про нелинейный вариант уравнения.

В настоящей работе задача (1)–(3) исследуется в классической постановке. Мы рассмотрим как строго гиперболический случай, т.е. $a\neq b$, так и для нестрого гиперболический, т.е. $a=b$. При этом мы будем использовать подход, ранее примененный к нелинейным уравнениям второго порядка и изложенный в работах [10–13].

2. Строго гиперболическое уравнение. В этом разделе мы полагаем, что уравнение (1) строго гиперболическое, т.е. выполнено условие $a\neq b$.

2.1. Интегро-дифференциальное уравнение. Область Q характеристиками $x-at=0$ и $x-bt=0$ разделим на три подобласти:

$$Q^{(1)} = \{(t,x)\mid x-at>0\wedge x-bt>0\},$$
$$Q^{(2)} = \{(t,x)\mid x-at>0\wedge x-bt<0\},$$
$$Q^{(3)} = \{(t,x)\mid x-at<0\wedge x-bt<0\}.$$

В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$, $j=1,2,3$, рассмотрим интегро-дифференциальные уравнения

$$u^{(1)}(t,x) = K^{(1)}\big[u^{(1)}\big](t,x) = \mathcal{A}_1\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\big](t,x) +$$
$$+\int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \quad (4)$$

$$u^{(2)}(t,x)=K^{(2)}\big[u^{(2)}\big](t,x)=\mathcal{A}_2\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_1,\mu_2\big](t,x)+\int\limits_{t-x/b}^{t}\mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau+$$
$$+\int\limits_{0}^{t-x/b}\mathcal{A}_2^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(2)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(2)}},\quad (5)$$

$$u^{(3)}(t,x)=K^{(3)}\big[u^{(3)}\big](t,x)=\mathcal{A}_3\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_1,\mu_2\big](t,x)+\int\limits_{t-x/b}^{t}\mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau+$$
$$+\int\limits_{t-x/a}^{t-x/b}\mathcal{A}_2^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(2)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau+\int\limits_{0}^{t-x/a}\mathcal{A}_3^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(3)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(3)}},\quad (6)$$

где использованы обозначения

$$\mathcal{A}_1\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\big](t,x)=\frac{a^2\varphi_0(x-bt)+a^2\varphi_0(x+bt)-b^2\varphi_0(x-at)-b^2\varphi_0(x+at)}{2(a^2-b^2)}+$$
$$+\frac{1}{4a^3b-4ab^3}\Bigg(\int\limits_0^{x+bt}\big(2a^3\varphi_1(\xi)-2ab\varphi_2(\xi)(bt-\xi+x)-a\varphi_3(\xi)(bt-\xi+x)^2\big)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{x-bt}^{0}\big(2a^3\varphi_1(\xi)-2ab\varphi_2(\xi)(bt+\xi-x)-a\varphi_3(\xi)(bt+\xi-x)^2\big)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_0^{x+at}\big(2ab\varphi_2(\xi)(at-\xi+x)+b\varphi_3(\xi)(at-\xi+x)^2-2b^3\varphi_1(\xi)\big)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{x-at}^{0}\big(2ab\varphi_2(\xi)(at+\xi-x)+b\varphi_3(\xi)(at+\xi-x)^2-2b^3\varphi_1(\xi)\big)\,d\xi\Bigg),$$

$$\mathcal{A}_2\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x)=\int\limits_0^{x+at}\frac{(at-\xi+x)\,(2a\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(at-\xi+x))-2b^2\varphi_1(\xi)}{4a^3-4ab^2}d\xi+$$
$$+\int\limits_0^{x-at}\frac{2b^2\varphi_1(\xi)-(at+\xi-x)\,(2a\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(at+\xi-x))}{4a^3-4ab^2}d\xi+$$
$$+\int\limits_0^{x+bt}\frac{2a^2\varphi_1(\xi)-(bt-\xi+x)\,(2b\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(bt-\xi+x))}{4a^2b-4b^3}d\xi+$$
$$+\int\limits_0^{bt-x}\frac{2a^2\varphi_1(\xi)+2b\varphi_2(\xi)(-bt+\xi+x)-\varphi_3(\xi)(-bt+\xi+x)^2}{4b(a-b)^2}d\xi+$$
$$+\int\limits_0^{a(t-x/b)}\frac{2ab\varphi_2(\xi)(abt-ax-b\xi)+\varphi_3(\xi)(a(x-bt)+b\xi)^2-2b^4\varphi_1(\xi)}{2ab(a-b)^2(a+b)}d\xi-\int\limits_0^{t-x/b}\frac{ab\mu_1(\xi)}{a-b}d\xi+$$

$$+\frac{(a-b)\left(a^2\varphi_0(bt+x)-b^2(\varphi_0(x-at)+\varphi_0(at+x))\right)+a^2(a+b)\varphi_0(bt-x)}{2(a-b)^2(a+b)}+ \\ +\frac{b(b-a)(a+b)\mu_0(t-x/b)-b^3\varphi_0(a(t-x/b))}{(a-b)^2(a+b)},$$

$$\mathcal{A}_3\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x)=\int\limits_0^{t-x/a}\frac{ab(a^2-b^2)\mu_1(\xi)}{(a-b)^2(a+b)}d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{b(t-x/a)}\frac{4a^4\varphi_1(\xi)+4ab\varphi_2(\xi)(a(\xi-bt)+bx)-2\varphi_3(\xi)(a(\xi-bt)+bx)^2}{4ab(a-b)^2(a+b)}d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{bt-x}\frac{2a^2\varphi_1(\xi)-2b\varphi_2(\xi)(bt-\xi-x)-\varphi_3(\xi)(\xi+x-bt)^2}{4b(a-b)^2}d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{x+bt}\frac{(bt-\xi+x)\left(2b\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(bt-\xi+x)\right)-2a^2\varphi_1(\xi)}{4b(a-b)(a+b)}d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{a(t-x/b)}\frac{4ab\varphi_2(\xi)(a(x-bt)+b\xi)-2\varphi_3(\xi)(a(x-bt)+b\xi)^2+4b^4\varphi_1(\xi)}{4ab(a-b)^2(a+b)}d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{at-x}\frac{2a\varphi_2(\xi)(at-\xi-x)+\varphi_3(\xi)(-at+\xi+x)^2-2b^2\varphi_1(\xi)}{4a(a-b)^2}d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{x+at}\frac{(at-\xi+x)\left(2a\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(at-\xi+x)\right)-2b^2\varphi_1(\xi)}{4a(a-b)(a+b)}d\xi-\int\limits_0^{t-x/b}\frac{ab\mu_1(\xi)}{a-b}d\xi,$$

$$\mathcal{A}_1^{\text{com}}\big[\varphi_3\big](t,x)=\mathcal{A}_1\big[0,0,0,\varphi_3\big](t,x),\quad \mathcal{A}_j^{\text{com}}\big[\varphi_3\big](t,x)=\mathcal{A}_j\big[0,0,0,\varphi_3,0,0\big](t,x),\quad j=2,3.$$

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u как совпадающую на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ уравнений (4)–(6):

$$u(t,x)=u^{(j)}(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q^{(j)}},\quad j=1,2,3. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a\neq b,\quad f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0\in C^4([0,\infty)),\quad \varphi_1\in C^3([0,\infty)),\quad \varphi_2\in C^2([0,\infty)),\quad \varphi_3\in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0\in C^4([0,\infty)),\quad \mu_1\in C^3([0,\infty)).$$

Функция u принадлежит классу $C^4(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3) тогда и только тогда, когда она является трижды непрерывно дифференцируемым решением уравнений (4)–(6) и выполняются условия согласования

$$\mu_0(0)=u_0(0), \tag{8}$$
$$\mu_0'(0)=u_1(0),\quad \mu_1(0)=u_0'(0), \tag{9}$$
$$\mu_0''(0)=u_2(0),\quad \mu_1'(0)=u_1'(0), \tag{10}$$
$$\mu_0'''(0)=u_3(0),\quad \mu_1''(0)=u_2'(0), \tag{11}$$

$$\mu_0''''(0) = (a^2+b^2)u_2''(0) - a^2b^2u_0''''(0) + f\Big(0,0,u_0(0),u_1(0),u_0'(0),\\ u_2(0),u_1'(0),u_0''(0),u_3(0),u_2'(0),u_1''(0),u_0'''(0)\Big), \quad \mu_1'''(0) = u_3'(0). \tag{12}$$

Доказательство. 1. Пусть функция $u \in C^4(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Решение u задачи (1)–(3) ищем в виде $u = v + w$, где v является решением однородного биволнового уравнения с неоднородными начальными и граничными условиями

$$\begin{cases} \Box_a\Box_b v(t,x) = 0, & (t,x)\in Q,\\ \partial_t^i v(0,x) = \varphi_i(x), & i=0,1,2,3, \quad x\in[0,\infty),\\ \partial_x^i v(t,0) = \mu_i(t), & i=0,1, \quad t\in[0,\infty), \end{cases} \tag{13}$$

а w — решение задачи

$$\begin{cases} \Box_a\Box_b w = \mathcal{F}[u](t,x)w(t,x) = \mathcal{F}[v+w], & (t,x)\in Q,\\ \partial_t^i w(0,x) = 0, & i=0,1,2,3, \quad x\in[0,\infty),\\ \partial_x^i w(t,0) = 0, & i=0,1, \quad t\in[0,\infty). \end{cases} \tag{14}$$

Результаты работ [4] позволяют записать

$$v(t,x) = \begin{cases} \mathcal{A}_1\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\big](t,x), & (t,x)\in\overline{Q^{(1)}},\\ \mathcal{A}_2\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x), & (t,x)\in\overline{Q^{(2)}},\\ \mathcal{A}_3\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x), & (t,x)\in\overline{Q^{(3)}}, \end{cases} \tag{15}$$

и

$$w(t,x) = \int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau \tag{16}$$

при $(t,x)\in\overline{Q^{(1)}}$,

$$w(t,x) = \int\limits_{t-x/b}^{t} \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau + \int\limits_0^{t-x/b} \mathcal{A}_2^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau \tag{17}$$

при $(t,x)\in\overline{Q^{(2)}}$ и

$$w(t,x) = \int\limits_{t-x/b}^{t} \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau + \int\limits_{t-x/a}^{t-x/b} \mathcal{A}_2^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau +\\ + \int\limits_0^{t-x/a} \mathcal{A}_3^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau \tag{18}$$

при $(t,x)\in\overline{Q^{(3)}}$. Формулы (15)–(18) фактически влекут представления (4)–(7). Условия согласования (8)–(12) выводятся путем дифференцирования начальных (2) и граничных условий (3), как это сделано в [12].

2. Предположим, что имеют место представления функции u в виде (4)–(7) и выполнены условия (8)–(12). В силу условий гладкости

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0\in C^4([0,\infty)),\quad \varphi_1\in C^3([0,\infty)),\quad \varphi_2\in C^2([0,\infty)),\quad \varphi_3\in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0\in C^4([0,\infty)),\quad \mu_1\in C^3([0,\infty)),$$

аналогично работе [14], заключаем, что $u\in C^4(\overline{Q^{(j)}})$, $j=1,2,3$. Подставив (4)–(7) в уравнение (1) и условия (2), (3), убеждаемся, что функция $u^{(j)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в

$\overline{Q^{(j)}}$, и при этом функция $u^{(1)}$ удовлетворяет начальным условиям (2), а функция $u^{(3)}$ — краевым условиям (3). Чтобы при этом функция u принадлежала классу $C^4(\overline{Q})$, необходимо и достаточно совпадения на характеристиках $x = at$ и $x = bt$ значений функций $u^{(j)}$ и их всех частных производных до четвертого порядка включительно, т.е.

$$\begin{aligned}\partial_t^k\partial_t^p u^{(1)}(t, x = bt) = \partial_t^k\partial_t^p u^{(2)}(t, x = bt),\\ \partial_t^k\partial_t^p u^{(2)}(t, x = at) = \partial_t^k\partial_t^p u^{(3)}(t, x = at),\end{aligned} \quad 0 \leqslant k + p \leqslant 4.$$

Для этого достаточно условий (8)–(12), что можно вывести из представлений (4)–(7), действуя в точности по алгоритму, изложенному в [12–14]. □

2.2. Разрешимость интегро-дифференциальных уравнений. Перепишем уравнение (4) в операторном виде

$$u(t, x) = J[u](t, x) + g(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \tag{19}$$

где

$$g(t, x) = \mathcal{A}_1\big[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\big](t, x), \quad J[v] = \int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x)\, d\tau.$$

Для уравнения (19) рассмотрим семейство уравнений с параметром $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$u_\varepsilon(t, x) - \varepsilon(J[u_\varepsilon] - J[0])(t, x) = g(t, x) + J[0](t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{20}$$

Легко видеть, что любое решение u_ε уравнения (20) при $\varepsilon = 1$ является решением уравнения (19) и наоборот. Теперь наша цель — решить уравнение (20) при $\varepsilon = 1$. Для этого воспользуемся методом продолжения по параметру (см. [18, 26]). В таком случае нужно показать, что оператор, стоящий в левой части уравнения, удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной и получить априорную оценку решения.

Введем множество $\Omega_m = \big\{(t, x) \mid (t, x) \in \overline{Q^{(1)}} \wedge x + bt \leqslant m\big\}$, $m \in \mathbb{N}$ и предположим, что функция f удовлетворяет условию Липшица:

$$\big|f(t, x, \boldsymbol{u}_1) - f(t, x, \boldsymbol{u}_2)\big| \leqslant L(t, x)\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_1 \tag{21}$$

где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0, \infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0, \infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0, \infty)), \quad \varphi_3 \in C([0, \infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда оператор $J\colon C^3(\Omega_m) \mapsto C^3(\Omega_m)$ является липшицевым.

Доказательство. При условиях гладкости, указанных в условии утверждения, аналогично теореме 1 можно проверить, что оператор J действует из пространства $C^3(\Omega_m)$ в пространство $C^3(\Omega_m)$.

Оценим разность $\|J[u_1] - J[u_2]\|_{C^3(\Omega_m)}$. Имеем

$$\big|(J[u_1] - J[u_2])(t, x)\big| = \left|\int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_1](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x)\, d\tau - \int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_2](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x)\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \Big|\mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_1](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x) - \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_2](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x)\Big|\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{|4a^3b-4ab^3|}\int\limits_0^t \left| \int\limits_0^{x+a(t-\tau)} b\big(x-\xi+a(t-\tau)\big)^2 U(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_{x-a(t-\tau)}^0 b\big(x-\xi-a(t-\tau)\big)^2 U(\tau,\xi)d\xi - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{x+b(t-\tau)} a\big(x-\xi+b(t-\tau)\big)^2 U(\tau,\xi)d\xi - \int\limits_{x-b(t-\tau)}^0 a\big(x-\xi-b(t-\tau)\big)^2 U(\tau,\xi)d\xi \right| d\tau \quad (22)$$

для всех $(t,x)\in\Omega_m$, где $U=\mathcal{F}[u_1]-\mathcal{F}[u_2]$. В силу условия Липшица (21) и непрерывности подинтегральных функции в выражении (22) существует такая константа M, зависящая только от чисел a и b, что верно неравенство

$$\Big|\big(J[u_1]-J[u_2]\big)(t,x)\Big| \leqslant M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_1(\tau,\xi)-\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_2(\tau,\xi)\Big| d\xi +$$

$$+ M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_1(\tau,\xi)-\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_2(\tau,\xi)\Big| d\xi, \quad (t,x)\in\overline{\Omega_m}. \quad (23)$$

Из последнего неравенства следует оценка

$$\big\|J[u_1]-J[u_2]\big\|_{C(\Omega_m)} \leqslant 2MS(\Omega_m)\|u_1-u_2\|_{C^3(\Omega_m)}, \quad (24)$$

где $S(\Omega_m)$ — мера (Лебега) множества Ω_m. По такой же схеме устанавливаются оценки вида

$$\Big\|\partial_t^k\partial_x^p J[u_1]-\partial_t^k\partial_x^p J[u_2]\Big\|_{C(\Omega_m)} \leqslant M_{k,p}\|u_1-u_2\|_{C^3(\Omega_m)}, \quad k,p=0,1,2,3, \quad 1\leqslant p+k\leqslant 3, \quad (25)$$

где $M_{k,p}$ — константы, зависящие только от чисел a и b. В таком случае имеет место неравенство

$$\big\|J[u_1]-J[u_2]\big\|_{C^3(\Omega_m)} \leqslant \mathfrak{L}\|u_1-u_2\|_{C^3(\Omega_m)}$$

т.е. оператор $J\colon C^3(\Omega_m)\mapsto C^3(\Omega_m)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\mathfrak{L}$, зависящей только от чисел a и b. $\square$

Теперь задача состоит в получении априорной оценки вида

$$\|u_\varepsilon\|_{C^3(\Omega_m)} \leqslant C\big\|g+J[0]\big\|_{C^3(\Omega_m)} \quad (26)$$

для всех возможных решений u_ε уравнения (20) при всяком $\varepsilon\in[0,1]$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от g, $u^{(1)}$ и ε.

Итак, пусть выполнены условия утверждения 1. Тогда имеем

$$\big|u_\varepsilon(t,x)\big| = \Big|g(t,x)+J[0](t,x)+\varepsilon\big(J[u_\varepsilon](t,x)-J[0](t,x)\big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \big\|g+J[0]\big\|_{C(\Omega_m)} + \big|J[u_\varepsilon](t,x)-J[0](t,x)\big| =$$

$$= C_r + \left|\int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_\varepsilon](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x) - \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[0](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau\right|, \quad (t,x)\in\Omega_m, \quad (27)$$

где $C_r = \|g + J[0]\|_{C(\Omega_m)}$. Продолжая оценивание величины $|u_\varepsilon(t,x)|$ как в доказательстве утверждения 1, получим неравенство

$$\big|u_\varepsilon(t,x)(t,x)\big| \leqslant C_r + M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,\xi)\big| d\xi + \\ + M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,\xi)\big| d\xi, \quad (t,x)\in\Omega_m. \quad (28)$$

Из (28) в силу условия $0<a<b$ следует

$$\big|u_\varepsilon(t,x)(t,x)\big| \leqslant C_r + 2M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,\xi)\big| d\xi, \quad (t,x)\in\Omega_m. \quad (29)$$

Рассуждая аналогичным образом, приходим к неравенствам

$$\Big|\partial_t^i\partial_x^j u_\varepsilon(t,x)(t,x)\Big| \leqslant C_r^{(i,j)} + M^{(i,j)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,\xi)\Big| d\xi, \quad (t,x)\in\Omega_m \quad (30)$$

для неотрицательных целых чисел i и j, удовлетворяющих условию $1\leqslant j+i\leqslant 2$, где

$$C_r^{(i,j)} = \big\|\partial_t^i\partial_x^j(g+J[0])\big\|_{C(\Omega_m)}$$

и $M^{(i,j)}$ — константы, зависящие только от чисел a и b и множества Ω_m. Для производных третьего порядка неравенство несколько другое:

$$\Big|\partial_t^i\partial_x^j u_\varepsilon(t,x)\Big| \leqslant C_r^{(i,j)} + M^{(i,j)}\int\limits_0^t \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,x+a(t-\tau))\Big| + \\ + \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,x-a(t-\tau))\Big| + \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,x+b(t-\tau))\Big| + \\ + \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,x-b(t-\tau))\Big|\,d\tau, \quad (t,x)\in\Omega_m, \quad i+j=3, \quad (31)$$

Складывая неравенства (29)–(31), приходим к оценке

$$U_\varepsilon(t,x) \leqslant C_r^{(1)} + M^{(1)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} U_\varepsilon(t,x)d\xi + M^{(1)}\int\limits_0^t \big|U_\varepsilon(\tau,x+a(t-\tau))\big| + \big|U_\varepsilon(\tau,x-a(t-\tau))\big| + \\ + \big|U_\varepsilon(\tau,x+b(t-\tau))\big| + \big|U_\varepsilon(\tau,x-b(t-\tau))\big|d\tau, \quad (t,x)\in\Omega_m, \quad (32)$$

где

$$U_\varepsilon(t,x) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k}\big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(t,x)\big|, \quad C_r^{(1)} = C_r + \sum_{k=1}^{3}\sum_{p=0}^{k} C_r^{(k-p,p)}, \quad M^{(1)} = 2M + \sum_{k=1}^{3}\sum_{p=0}^{k} M^{(k-p,p)}.$$

Применяя к (32) многомерную лемму Гроноулла, получаем

$$U_\varepsilon(t,x) \leqslant C_{\exp}C_r^{(1)} + C_{\exp}M^{(1)}\int\limits_0^t \big|U_\varepsilon(\tau,x+a(t-\tau))\big| + \big|U_\varepsilon(\tau,x-a(t-\tau))\big| + \\ + \big|U_\varepsilon(\tau,x+b(t-\tau))\big| + \big|U_\varepsilon(\tau,x-b(t-\tau))\big|\,d\tau, \quad (t,x)\in\Omega_m, \quad (33)$$

где $C_{\exp}$ — некоторая константа, зависящая только от чисел a и b и множества Ω_m. Теперь, применив итеративно четыре раза обычное неравенством Гроноулла к неравенству (33), как в [23], придем к оценке

$$U_\varepsilon(t,x) \leqslant C^{(1)}_{\exp} C_{\exp} C^{(1)}_r, \quad (t,x) \in \Omega_m, \tag{34}$$

где $C^{(1)}_{\exp}$ — некоторая константа, зависящая только от чисел a и b и множества Ω_m. Заметим, что в силу определения величин U_ε и $C^{(1)}_r$ неравенство (34) есть альтернативная запись априорной оценки (26), где $C = C^{(1)}_{\exp} C_{\exp}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда для всех возможных решений u_ε уравнения (20) при всяком $\varepsilon \in [0,1]$ справедлива оценка (26), где C — некоторая постоянная, не зависящая от $g + J[0]$, u_ε и ε.

Рассмотрим оператор A_ε, действующий по правилу

$$A_\varepsilon[v](t,x) = v(t,x) - \varepsilon(J[v] - J[0])(t,x).$$

Легко видеть, что из утверждения 1 следует липшицевость оператора A_ε, а из утверждения 2 — коэрцитивность (в смысле [18]) при всех $\varepsilon \in [0,1]$. Кроме того, функция $[0,1] \ni \varepsilon \mapsto A_\varepsilon$ непрерывна (в смысле полунормы пространства липшицевых операторов; см. [18]). Поскольку оператор A_ε при $\varepsilon = 0$ непрерывно обратим в пространстве $C^3(\Omega_m)$, то согласно [18, теорема 4] он обратим для всех $\varepsilon \in [0,1]$ в том же пространстве. Таким образом, уравнение (20) разрешимо при $\varepsilon = 1$ на множестве Ω_m в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций, причем согласно построению, его решение единственно. Значит, уравнение (19) также имеет единственное решение в классе пространстве $C^3(\Omega_m)$ для любого $g \in C^3(\Omega_m)$, а в силу произвольности m и того факта, что $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$, — в пространстве $C^3(\overline{Q^{(1)}})$. Таким же образом доказывается существование и единственность решений уравнений (5) и (6) в классах $C^3(\overline{Q^{(2)}})$ и $C^3(\overline{Q^{(3)}})$ соответственно. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда решения уравнений (4)–(6) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.

Доказательство. Существование и единственность решений уравнений (4)–(6) доказаны ранее. Непрерывная зависимость решений от начальных данных фактически следует из [26, следствие 4.2]. □

2.3. Классическое решение.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *имеет в классе $C^4(\overline{Q})$ единственное решение и тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(12)*. Это решение определяется формулами* (4)–(7)*.*

Доказательство вытекает из теорем 1 и 2. □

2.4. Неоднородные условия согласования. Подобно тому, как это было сделано в [10–14], рассмотрим теперь задачу (1)–(3) в случае, когда условия согласования (8)–(12) частично или полностью не выполняются.

Согласно теореме 1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функции u, или ее производных, или все вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 3. *Если для заданных функций f, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, μ_0, μ_1 не выполняются однородные условия согласования* (8)–(12)*, то какими бы гладкими ни были функции f, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, μ_0, μ_1, задача* (1)–(3) *при $a \neq b$ не имеет классического решения, определенного на $\overline{Q}$.*

Доказательство вытекает из теоремы 1. □

Пусть заданные функции уравнения (1) и условий (2), (3) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 3:

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty)).$$

Так как условия согласования (8)–(12), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывную функцию u:

$$\big[(u)^+ - (u)^-\big](t, x = bt) = \frac{b(\mu_0(0) - \varphi_0(0))}{a-b}, \tag{35}$$

$$\big[(u)^+ - (u)^-\big](t, x = at) = \frac{a(\varphi_0(0) - \mu_0(0))}{a-b}, \tag{36}$$

Здесь символом $(\cdot)^{\pm}$ обозначены предельные значения функции u и ее частных производных с разных сторон на кривой $x = r(t)$:

$$(u)^{\pm}(t, x = r(t)) = \lim_{\delta \to 0+} u(t, r(t) \pm \delta).$$

Таким образом, если заданные функции задачи (1)–(3) не удовлетворяют однородным условиям согласования (8)–(12), то решение задачи (1)–(3) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристиках $x - at = 0$ и $x - bt = 0$.

В качестве условий сопряжения могут быть выбраны условия (35) и (36). Теперь задачу (1)–(3) можно сформулировать, используя условия сопряжения (35) и (36), следующим образом.

Задача (1)–(3) **с условиями сопряжения на характеристиках.** Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничному условию (3) и условиям сопряжения (35), (36).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для ее численной реализации.

Следует отметить, что выбор условий согласования (35) и (36) в случае невыполнения условий согласования (8)–(12) не единствен, т.е. вместо (35) и (36) условий можно выбирать другие условия. Это связано с тем, что различные процессы могут быть описаны одними и теми же дифференциальными уравнениями, но разными интегральными законами сохранения, и поэтому различие таких процессов проявляется лишь на разрывных решениях (см. [17]). Хотя чисто математически решение задачи (1)–(3) с условиями сопряжения (35) и (36) является корректно определенным. С другой стороны, если выполнено условие (8), то условия сопряжения (35) и (36) становятся однородными, что, в некоторой степени, физически естественно; для этого случая далее будет доказано, что решение можно будет построить непрерывным.

Введем обозначение $\widetilde{Q} = \overline{Q} \setminus \{(t,x) \mid x - at = 0 \vee x - bt = 0\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *с условиями сопряжения* (35) *и* (36) *имеет в классе $C^4(\widetilde{Q})$ единственное решение u. Это решение определяется формулами* (4)–(7)*.*

Доказательство вытекает из предыдущих рассуждений. □

Теорема 5. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Смешанная задача* (1)–(3) *с условиями сопряжения* (35) *и* (36) *имеет в классе $C^4(\widetilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ единственное решение u тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)*. Это решение определяется формулами* (4)–(7)*.*

Доказательство вытекает из теорем 1, 2, 4 и проведенных выше рассуждений. Действительно, если $\mu_0(0) - \varphi_0(0) = 0$, то решение u на множестве $\{(t,x) \mid x - at = 0 \vee x - bt = 0\}$ является непрерывным в силу (35) и (36). Следовательно, кроме того, что $u \in C^4(\widetilde{Q})$, это решение является непрерывной функцией на замыкании $\overline{Q}$. □

Теорема 6. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *с условиями сопряжения* (35) *и* (36) *имеет единственное решение u:*

(i) *в классе $C^4(\widetilde{Q}) \cap C^1(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8) *и* (9)*;*
(ii) *в классе $C^4(\widetilde{Q}) \cap C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(10)*;*
(iii) *в классе $C^4(\widetilde{Q}) \cap C^3(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(11)*.*

Это решение определяется формулами (4)–(7)*.*

Доказательство аналогично [10–12]. □

2.5. Слабое решение. Рассмотрим теперь задачу (1)–(3) в случае, когда функции f, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, μ_0, μ_1 не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. Пусть $a \neq b$. Функцию u, представимую в виде (4)–(7), назовём слабым решением задачи (1)–(3).

Замечание 1. Любое классическое решение задачи (1)–(3) является также слабым решением этой задачи.

Также очевидно, что если выполнены дополнительные условия гладкости

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и условия согласования (8)–(12), то слабое решение задачи (1)–(3) при $a \neq b$ является классическим.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *единственное слабое решение u из класса $C^3(\widetilde{Q})$.*

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (4)–(6) и принадлежность их решений классу трижды непрерывно дифференцируемых функций следует из теоремы 2. □

Для слабого решения можно повысить гладкость, если частично выполняются условия согласования (8)–(11), как это сделано в следующей теореме.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$.Тогда смешанная задача* (1)–(3) *имеет единственное слабое решение u:*

(i) *в классе $C^3(\widetilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условие* (8);
(ii) *в классе $C^3(\widetilde{Q}) \cap C^1(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8) *и* (9);
(iii) *в классе $C^3(\widetilde{Q}) \cap C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(10);
(iv) *в классе $C^3(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(11).

Доказательство аналогично доказательству теорем 5 и 6. □

Замечание 2. Если нелинейность f уравнения (1) не зависит от частных производных третьего порядка, то слабое решение можно искать в классе $C^2(\widetilde{Q})$.

3. Нестрого гиперболическое уравнение. В этом разделе полагаем, что уравнение (1) нестрого гиперболическое, т.е. выполнено условие $a = b$. Само по себе исследование нестрого гиперболического случая имеет ряд дополнительных трудностей, среди которых можно выделить:

(a) дополнительные условия гладкости и согласования по сравнению со строго гиперболическим случаем [5, 7–9];
(b) некоторые сложности, связанные с выводами априорных оценок в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций.

Из-за второй вышеперечисленной трудности ограничимся рассмотрением нелинейности, зависящей от независимых переменных, неизвестной функции и ее производных до второго порядка включительно, т.е. положим, что нелинейность f уравнения представима в более простом виде

$$f\Big(t,x,u,u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx},u_{ttt},u_{ttx},u_{txx},u_{xxx}\Big) = f\Big(t,x,u,u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx}\Big). \tag{37}$$

3.1. Интегро-дифференциальное уравнение. Как и в предыдущем разделе, разделим область Q характеристикой $x - at = 0$ на две подобласти:

$$\Omega^{(1)} = \big\{(t,x) \mid x - at > 0\big\}, \quad \Omega^{(2)} = \big\{(t,x) \mid x - at < 0\big\},$$

В замыкании $\overline{\Omega^{(j)}}$ каждой из подобластей $\Omega^{(j)}$, $j = 1, 2$, рассмотрим интегро-дифференциальные уравнения

$$u^{(1)}(t,x) = B^{(1)}\big[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\big](t,x) + \int\limits_0^t \widetilde{B}^{(1)}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau, \quad (t,x) \in \overline{\Omega^{(1)}}, \tag{38}$$

$$u^{(2)}(t,x) = B^{(2)}\big[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \mu_1, \mu_2\big](t,x) + \int\limits_{t-x/a}^{t} \widetilde{B}^{(1)}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^{t-x/a} \widetilde{B}^{(2)}\big[\mathcal{F}[u^{(2)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau, \quad (t,x) \in \overline{\Omega^{(2)}}, \tag{39}$$

где использованы обозначения

$$B^{(1)}\big[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\big](t,x) = \int\limits_0^{x-at} \frac{\varphi_3(\xi)\left((x-\xi)^2 - a^2t^2\right) - 6a^2\varphi_1(\xi) - 2a^2t\varphi_2(\xi)}{8a^3}\,d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^{x+at} \frac{6a^2\varphi_1(\xi) + \varphi_3(\xi)\left(a^2t^2 - (x-\xi)^2\right) + 2a^2t\varphi_2(\xi)}{8a^3}\,d\xi -$$
$$- \frac{t(a(\varphi_0'(at+x) - \varphi_0'(x-at)) + \varphi_1(x-at) + \varphi_1(at+x))}{4} + \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2},$$

$$B^{(2)}\big[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \mu_0, \mu_1\big](t,x) = \int\limits_0^{x+at} \frac{6a^2\varphi_1(\xi) + \varphi_3(\xi)\left(a^2t^2 - (x-\xi)^2\right) + 2a^2t\varphi_2(\xi)}{8a^3}\,d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^{at-x} \frac{\varphi_3(\xi)\left((x-\xi)^2 - a^2t^2\right) - 6a^2\varphi_1(\xi) - 2a^2t\varphi_2(\xi)}{8a^3}\,d\xi +$$
$$+ \frac{x^2\varphi_2(at-x)}{2a^2} - \frac{x^2\varphi_1'(at-x)}{2a} - \frac{x^2\varphi_0''(at-x)}{2} + \frac{x\mu_0'\,(t-x/a)}{a} + x\mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + \mu_0\left(t - \frac{x}{a}\right) -$$
$$- x\varphi_0'(at-x) + \frac{tx\varphi_1'(at-x)}{2} + \frac{at\varphi_0'(at-x)}{4} - \frac{at\varphi_0'(at+x)}{4} + \frac{atx\varphi_0''(at-x)}{2} - \frac{3x\varphi_1(at-x)}{2a} -$$
$$- \frac{tx\varphi_2(at-x)}{2a} - \frac{\varphi_0(at-x)}{2} + \frac{\varphi_0(at+x)}{2} + \frac{t\varphi_1(at-x)}{4} - \frac{t\varphi_1(at+x)}{4},$$

$$\widetilde{B}^{(1)}\big[\varphi_3\big](t,x) = B^{(1)}\big[0,0,0,\varphi_3\big](t,x), \quad \widetilde{B}^{(2)}\big[\varphi_3\big](t,x) = B^{(2)}\big[0,0,0,\varphi_3,0,0\big](t,x).$$

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u, совпадающую на замыкании $\overline{\Omega^{(j)}}$ области $\Omega^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ уравнений (38) и (39):

$$u(t,x) = u^{(j)}(t,x), \quad (t,x) \in \overline{\Omega^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \tag{40}$$

Аналогично пп. 2.1 и 2.2 можно доказать следующие теоремы.

Теорема 9. *Пусть выполняются условия*

$$a = b, \quad f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$

$$\varphi_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^2([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^4([0,\infty)).$$

Функция u принадлежит классу $C^4(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению (1) *с* (37)*, начальным условиям* (2) *и граничным условиям* (3) *тогда и только тогда, когда она является дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнений* (38) *и* (39) *и выполняются условия согласования* (8)*–*(12) *и*

$$\begin{aligned} D^5\mu_0(0) &= \big(a\varphi_0'''(0)+\varphi_1''(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{xx}}\Big(0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),u_{xx}=\varphi_0''(0)\Big)+\\ &+\big(a\varphi_1''(0)+\varphi_2'(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{tx}}\Big(0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),u_{tx}=\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\ &+\big(a\varphi_2'(0)+\varphi_3(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{tt}}\Big(0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),u_{tt}=\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\ &+\big(a\varphi_0''(0)+\varphi_1'(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{x}}\Big(0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),u_x=\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\ &+\big(a\varphi_1'(0)+\varphi_2(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{t}}\Big(0,0,\varphi_0(0),u_t=\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\ &+\big(a\varphi_0'(0)+\varphi_1(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u}\Big(0,0,u=\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\ &+a\frac{\partial f}{\partial x}\Big(0,x=0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\ &+\frac{\partial f}{\partial t}\Big(t=0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)-\\ &-a^5D^5\varphi_0(0)-a^4D^4\varphi_1(0)+2a^3\varphi_2'''(0)+2a^2\varphi_3''(0)-aD^4\mu_1(0). \end{aligned} \tag{41}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Отличие состоит в том, что необходимость условия (41) не может быть строго обоснована дифференцированием начальных (2) и граничных (3) условий, но может быть выведена лишь формально дифференцированием краевых условий. Однако это можно сделать путем приравнивания величин $\partial_t^k\partial_x^p u^{(1)}(t,at)-\partial_t^k\partial_x^p u^{(2)}(t,at)$ при $k+p=4$, где функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ заданы формулами (38) и (39) соответственно, как это сделано в [13]. □

Теорема 10. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q}\times\mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f имеет вид (37) *и удовлетворяет условию Липшица* (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда решения уравнений* (38) *и* (39) *существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2. □

3.2. Классическое решение.

Теорема 11. *Пусть выполняются условия*

$$a=b, \quad f \in C^2(\overline{Q}\times\mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^2([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^4([0,\infty))$$

и пусть функция f имеет вид (37) *и удовлетворяет условию Липшица* (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)*–*(3) *имеет в классе $C^4(\overline{Q})$ единственное решение и* *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(12) *и* (41)*. Это решение определяется формулами* (38)–(40)*.*

Доказательство вытекает из теорем 9 и 10. □

3.3. Слабое решение. В случае нестрого гиперболического уравнения помимо классического решения рассмотрим слабые решения.

Определение 2. Пусть $a = b$. Функцию u, представимую в виде (38)–(40), назовём слабым решением задачи (1)–(3).

Очевидно, что если выполнены дополнительные условия гладкости

$$f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^2([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^4([0,\infty))$$

и условия согласования (8)–(12) и (41), то слабое решение задачи (1)–(3) при $a = b$ является классическим.

Введем множество $\widetilde{\Omega} = \overline{Q} \setminus \{(t,x) \mid x = at\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть выполняются условия*

$$a = b, \quad f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f имеет вид (37) *и удовлетворяет условию Липшица* (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *единственное слабое решение u из класса $C^2(\widetilde{\Omega})$.*

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (38) и (39), а также принадлежность их решений классу дважды непрерывно дифференцируемых функций следует из теоремы 2. □

Условия согласования для непрерывности слабого решения в нестрого гиперболическом случае более сильные, чем в строго гиперболическом случае. Можно показать, что если дополнительно к условиям теоремы 12 потребовать выполнения равенств

$$\varphi_0(0) = \mu(0), \quad \mu_1'(0) = \varphi_1(0) - a\mu_1(0) + a\varphi_0'(0),$$

то слабое решение будет непрерывным.

4. Применение полученных результатов к теории балок. Рассмотрим полубесконечную линейную упругую изотропную однородную балку постоянного сечения балку с постоянными параметрами: ρ — плотность материала балки, A — площадь сечения балки, E — модуль упругости, G — модуль сдвига, I — второй момент площади сечения, κ — коэффициент сдвига Тимошенко, $q(t,x)$ — распределенная нагрузка (сила, приложенная к единице длины), $m := \rho A$, $J := \rho I$.

Согласно теории Тимошенко (см. [21]) прогиб балки удовлетворяет в области $(t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ уравнению

$$\left(\frac{mJ}{\kappa AG}\partial_t^4 - \left(J + \frac{EIm}{\kappa AG}\right)\partial_t^2\partial_x^2 + EI\partial_x^4 + m\partial_x^2\right) w(t,x) = \left(1 + \frac{J}{\kappa AG}\partial_t^2 - \frac{EI}{\kappa AG}\partial_x^2\right) q(t,x),$$
$$(t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \quad (42)$$

где t — время, x — координата. Для корректного описания процесса колебаний балки уравнение (42) необходимо снабдить начальными и граничными условиями. В качестве начальных условий можно выбрать

$$w(0,x) = w_0(x), \quad \partial_t w(0,x) = w_1(x), \quad \partial_t^2 w(0,x) = \varphi_2(x), \quad \partial_t^3 w(0,x) = w_3(x), \quad x \in [0,\infty), \quad (43)$$

а граничные условия должны задаваться исходя из способа закрепления конца $x = 0$ балки. Предположим, что конец $x = 0$ балки жестко защемлен. Тогда приходим к граничным условиям (см. [21])

$$w(t,0) = 0, \quad \partial_x w(t,0) = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{44}$$

Заметим, что уравнение (42) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\kappa G}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(t,x) = \\ = \left(\frac{\kappa AG}{Jm} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{EI}{Jm}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) q(t,x) - \frac{\kappa AG}{J}\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t,x). \tag{45}$$

Оно является линейным уравнением вида (1). Следовательно, существование и единственность классического решения задачи (42)–(44) при определенных условиях гладкости и согласования может быть доказана с помощью теорем 3 и 11. Кроме того, используя теоремы 7 и 12, можно обосновать наличие слабого решения задачи (42)–(44). Полученные результаты является исчерпывающим решением начально-краевой задачи для защемленной полубесконечной балки в случае оператора Тимошенко, сформулированной в [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богатов А. В., Гилев А. В., Пулькина Л. С.* Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками// Вестн. росс. ун-тов. Мат. — 2022. — *27*, № 139. — С. 214–230.
2. *Гайдук С. И., Кулешов А. А.* Об одной смешанной задаче из теории колебаний балок// Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2009. — № 1. — С. 47–51.
3. *Гилев А. В., Кечина О. М., Пулькина Л. С.* Характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей производной// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2021. — *27*, № 3. — С. 14–21.
4. *Корзюк В. И., Винь Н. В.* Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения// Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2016. — № 1. — С. 69–79.
5. *Корзюк В. И., Винь Н. В.* Решение задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками// Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2017. — № 1. — С. 38–52.
6. *Корзюк В. И., Конопелько О. А., Чеб Е. С.* Граничные задачи для уравнений четвертого порядка гиперболического и составного типов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2010. — *36*. — С. 87–111.
7. *Корзюк В. И., Козловская И. С., Козлов А. И.* Задача Коши для нестрого гиперболического уравнения на полуплоскости с постоянными коэффициентами// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 6. — С. 714–725.
8. *Корзюк В. И., Мандрик А. А.* Граничные задачи для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 2. — С. 209–219.
9. *Корзюк В. И., Мандрик А. А.* Первая смешанная задача для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка в ограниченной области// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 788–802.
10. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2023. — *43*. — С. 48–63.
11. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое решение второй смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Диффер. уравн. — 2023. — *59*, № 9. — С. 1222–1239.
12. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое решение первой смешанной задачи в криволинейном квадранте для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Диффер. уравн. — 2023. — *59*, № 8. — С. 1070–1083.
13. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Диффер. уравн. — 2022. — *58*, № 2. — С. 174–184.
14. *Корзюк В. И., Столярчук И. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 77–88.
15. *Корзюк В. И., Чеб Е. С.* Смешанные задачи для биволнового уравнения// Вестн. БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. — 2005. — № 1. — С. 63–68.

16. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Тху Л. Т.* Решение первой смешанной задачи для нестрого биволнового уравнения// Докл. НАН Беларуси. — 2011. — *55*, № 4. — С. 5–13.
17. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — Москва: Наука, 1978.
18. *Треногин В. А.* Глобальная обратимость нелинейных операторов и метод продолжения по параметру// Докл. РАН. — 1996. — *350*, № 4. — С. 455–457.
19. *Buryachenko K. O.* Solvability of inhomogeneous boundary-value problems for fourth-order differential equations// Ukr. Math. J. — 2012. — *63*, № 8. — P. 1165–1175.
20. *Fushchych W. I., Roman O. V., Zhdanov R. Z.* Symmetry reduction and some exact solutions of nonlinear biwave equations// Repts. Math. Phys. — 1996. — *37*, № 2. — P. 267–281.
21. *Harrevelt S. D.* Eigenvalue Analysis of the Timoshenko Beam Theory with a Damped Boundary Condition. — Delft: Tech. Univ. Delft, 2012.
22. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* On one boundary-value problem for a nonlinear equation with the iterated wave operator in the principal part// Georgian Math. J. — 2008. — *15*, № 3. — P. 541–554.
23. *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Cauchy Problem for a Semilinear Nonstrictly Hyperbolic Equation on a Half-Plane in the Case of a Single Characteristic. — ResearchGate, 2023.
24. *Ortner N., Wagner P.* Solution of the initial-boundary-value problem for the simply supported semi-infinite Timoshenko beam// J. Elast. — 1996. — *42*. — P. 217–241.
25. *Sitnik S. M., Shakhobiddin T. K.* Solution of the Goursat problem for a fourth-order hyperbolic equation with singular coefficients by the method of transmutation operators// Mathematics. — 2023. — *11*, № 4. — 951.
26. *Trenogin V. A* Invertibility of nonlinear operators and parameter continuation method// in: Spectral and Scattering Theory (*Ramm A. G.*, ed.). — Boston: Springer, 1998. — P. 189–197.
27. *Utkina E. A.* Dirichlet problem for a fourth-order equation// Differ. Equations. — 2011. — *47*, № 4. — P. 599–603.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект № 075-15-2022-284).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Корзюк Виктор Иванович (Korzyuk Viktor Ivanovich)
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь;
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
(Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus;
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)
E-mail: `korzyuk@bsu.by`

Рудько Ян Вячеславович (Rudzko Jan Viaczaslavavicz)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь;
(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)
E-mail: `janycz@yahoo.com`