ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 97–108
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-97-108

УДК 517.977.1

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2024 г. **Е. В. РАЕЦКАЯ**

Аннотация. Для динамической системы в частных производных второго порядка с тремя краевыми условиями при помощи метода каскадной декомпозиции решается задача построения функций управления и состояния в аналитическом виде. Получены два критерия полной управляемости: один на основе сюръективности некоторой матрицы, второй идентичен критерию Калмана. Выделен класс функций, определяющих аналитический вид функций управления и состояния. Разработан метод построения функций управления и состояния в аналитическом виде.

Ключевые слова: динамическая система с частными производными, полная управляемость, программное управление, метод каскадной декомпозиции.

SOLUTION OF ONE CONTROL PROBLEM FOR A DYNAMICAL SYSTEM IN PARTIAL DERIVATIVES

© 2024 **E. V. RAETSKAYA**

Abstract. For a second-order dynamic system in partial derivatives with three boundary conditions, the problem of constructing control and state functions in analytical form is solved by the cascade decomposition method. Two criteria of complete controllability are obtained. The first criterion is based on the surjectivity property of a certain matrix. The second criterion is identical to the Kalman criterion. A class of functions is identified that determine the analytical form of control and state functions. A method for constructing control and state functions in analytical form is developed.

Keywords and phrases: dynamic system with partial derivatives, complete controllability, program control, cascade decomposition method.

AMS Subject Classification: 93B05

1. Введение.

Рассматривается динамическая система в частных производных

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} + D\frac{\partial u(t,s)}{\partial s} \tag{1}$$

с условиями

$$\text{(a) } x(0,s) = \alpha(s), \quad \text{(b) } x(T,s) = \beta(s), \quad \text{(c) } x(t,0) = \gamma(t), \tag{2}$$

где $x(t,s) \in \mathbb{R}^n$, $u(t,s) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,S]$; B, D — матрицы соответствующих размеров. Функции в условиях (2) удовлетворяют условиям согласования

$$\alpha(0) = \gamma(0), \quad \beta(T) = \gamma(T). \tag{3}$$

Систему (1) называют полностью управляемой, если существует функция управления $u(t,x)$, под воздействием которой система переводится из произвольного начального состояния (2)(a) в

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20012).

произвольное конечное состояние (2)(b) за время $[0,T]$ для любого $T>0$, при этом выполняется условие (2)(c) и условия согласования.

Наряду с выявлением свойства управляемости как возможности управления системой важнейшей задачей является построение в явном виде функции управления $u(t,s)$ и функции состояния $x(t,s)$, удовлетворяющей заданным условиям. Именно эту, построенную в явном виде, пару функций *управление—состояние* будем называть *аналитическим решением задачи управления.* На данный момент известно большое количество работ, посвященных исследованию свойства полной управляемости различных систем (см., например, [1,2,6–8,15]). Однако имеется значительный дефицит методов и алгоритмов построения функций управления и состояния в аналитической форме. Большинство работ, посвященных данной тематике, презентуют методы построения искомых функций в приближенной форме. Целью же данной работы является построение именно аналитического решения задачи управления.

Основным методом исследования является метод каскадной декомпозиции, заключающийся в поэтапном переходе к редуцированным системам в подпространствах. Основы метода были разработаны в [9] с целью исследования полной управляемости классической системы управления. Затем этот метод модифицировался и применялся в [5, 10, 16, 17] для исследования свойств робастности, инвариантности, наблюдаемости, управляемости. Именно такой подход позволил получить положительные результаты при решении задач управления для ряда динамических систем в [4, 11, 12, 18–22] и провести структурный анализ аналитического решения задачи управления для системы в частных производных в [13].

В [14] указанным методом решена задача управления для системы

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = B\frac{\partial x^k(t,s)}{\partial s^k} + Du(t,s)$$

с условиями (2)(a), (2)(b). Там же была выделена определяющая функция — часть состояния из самого узкого подпространства, которая определяет вид аналитического решения.

В настоящей работе для системы вида (1) с дополнительным условием (2)(c) решается задача управления, которая подразумевает:

(a) выявление свойств матричных коэффициентов B и D, влекущих полную управляемость системы (1);
(b) установление свойств функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ и $\gamma(t)$ в условиях (2), достаточных для реализации управляемого процесса;
(c) построение функции управления $u(t,s)$ и соответствующей функции состояния $x(t,s)$ в аналитическом виде для полностью управляемой системы.

Здесь выявляется класс определяющих функций, элементы которого определяеют вид аналитического решения задачи управления. Устанавливаются условия, при выполнении которых каждой определяющей функции будет соответствовать единственная пара управление—состояние.

2. Базисные положения метод каскадной декомпозиции. Алгоритм метода каскадной декомпозиции, реализующийся для полностью управляемой системы, включает три основных этапа: прямой ход, центральный этап, обратный ход.

Прямой ход заключается в поэтапной редукции системы (1). В силу конечномерности исходного пространства $\mathbb{R}^n$ процесс полностью реализуется за конечное, равное p, число шагов $(0 \leqslant p \leqslant n)$. На заключительном шаге данного этапа выявляется полная управляемость или неуправляемость системы. Также в процессе редукции выявляются свойства функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ и $\gamma(t)$, достаточные для реализации управляемого процесса.

В случае установления полной управляемости осуществляется переход к центральному этапу каскадной декомпозиции, включающему построение определяющей функции в той или иной форме.

Затем реализуется обратный ход декомпозиции, подразумевающий сначала пошаговое восстановление функции состояния $x(t,s)$, удовлетворяющей заданным условиям (2), затем построение соответствующей функции управления $u(t,s)$.

Здесь идет речь о решении задачи программного управления, т.е. сначала на базе (той или иной формы) определяющей функции строится функция состояния $x(t,s)$; затем рассчитывается функция $u(t,s)$. Устанавливаются условия, при выполнении которых каждой определяющей функции будет соответствовать единственная пара управление—состояние.

Таким образом, результатом реализации алгоритма каскадной декомпозиции является построение такой пары функций управление—состояние, что решением уравнения (1), с применением рассчитанной функции $u(t,s)$, будет именно рассчитанная функция $x(t,s)$, удовлетворяющая условиям (2).

Метод каскадной декомпозиции базируется на свойстве нетеровости матричного коэффициента $D:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, которому соответствуют разложения пространств в прямые суммы

$$\mathbb{R}^m=\operatorname{Coim}D\dotplus\operatorname{Ker}D,\quad \mathbb{R}^n=\operatorname{Im}D\dotplus\operatorname{Coker}D, \tag{4}$$

где $\operatorname{Ker}D$ — ядро D; $\operatorname{Im}D$ — образ D; $\operatorname{Coker}D$ — дефектное подпространство, $n_0=\dim\operatorname{Coker}D$; $\operatorname{Coim}D$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker}D$ в $\mathbb{R}^n$; при этом сужение $\tilde{D}$ оператора D на $\operatorname{Coim}D$ имеет обратный $\tilde{D}^{-1}$. Проекторы на подпространства $\operatorname{Ker}D$ и $\operatorname{Coker}D$ обозначаются через P и Q, соответственно. Оператор $\tilde{D}^{-1}(I-Q)$ называется полуобратным к D и обозначается D^- (через I здесь и далее обозначен тождественный оператор в соответствующем пространстве). Операторы и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково. Обозначим $n_0=\dim\operatorname{Coker}D_0$, $m_0=\dim\operatorname{Ker}D_0$.

Лемма 1 (см. [3]). *Соотношение*

$$Dx=y,\quad x\in\mathbb{R}^m,\quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

эквивалентно системе

$$x=D^-y+f,\quad Qy=0. \tag{6}$$

Первое из приведенных выражений представляет собой решение уравнения (5)*, найденное с точностью до произвольного элемента* $f\in\operatorname{Ker}D$*,* $f=Px$*, а второе — условие корректности системы* (5)*.*

3. Исследование исходной системы. В зависимости от вида матрицы D возможны два случая: $n=n_0$ и $n>n_0$.

В случае $n=n_0$ система (1) имеет вид

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}=B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}$$

и является неуправляемой.

При выполнении условия $n>n_0$, в силу леммы 1, реализуется переход от системы (1) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial s}=F(t,s)+f(t,s), \tag{7}$$

$$Q\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}=QB\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}, \tag{8}$$

с функцией

$$F(t,s)=D^-\left(\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}-B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right), \tag{9}$$

и произвольной функцией $f(t,s)\in\operatorname{Ker}D$.

Здесь возможны два случая: $n>n_0=0$ и $n>n_0>0$. Рассмотрим их подробно.

При выполнении условия $n>n_0=0$ уравнение (8) принимает вид $0=0$, так как $n_0=0$ — это случай сюръективной матрицы D с нулевым проектором Q.

При наличии удовлетворяющей условиям (2) функции $x(t,s)$ функция $u(t,s)$ находится как решение дифференциального уравнения (7).

В случае сюръективной матрицы D система (1) является полностью управляемой. Осуществляется переход к центральному этапу каскадной декомпозиции — построению функции состояния.

3.1. Схема построения функции $x(t,s)$. Строится функция $X(t,s)$, удовлетворяющая условиям (2)(a), (2)(b):

$$X(0,s)=\alpha(s), \quad X(T,s)=\beta(s).$$

Функция $X(t,s)$ называется определяющей функцией. Определяющая функция может быть построена в различных формах, например, в полиномиальной, дробно-рациональной, экспоненциальной и т. д.

Построенной определяющей функции $X(t,s)$ ставится в соответствие функция $\widetilde{x(t)}$, названная здесь *невязкой*, определяемая формулой

$$\widetilde{x(t)}=\gamma(t)-X(t,0). \tag{10}$$

Затем строится функция состояния в виде

$$x(t,s)=X(t,s)+\widetilde{x(t)}. \tag{11}$$

Построенная таким образом функция состояния будет удовлетворять условиям (2); при этом выполняются условия согласования

$$x(0,0)=\alpha(0)=\gamma(0), \quad x(T,0)=\beta(0)=\gamma(T).$$

3.2. Схема построения функции $u(t,s)$. Подстановка построенной на базе выбранной определяющей функции $X(t,s)$ функции $x(t,s)$ вида (11) в уравнение (7) позволяет найти функцию $u(t,s)$ как решение дифференциального уравнения в виде

$$u(t,s)=U(t,s)+\widetilde{u(t,s)}, \tag{12}$$

где

$$U(t,s)=\int\limits_0^s F(t,\tau)d\tau, \quad \widetilde{u(t,s)}=\int\limits_0^s f(t,\tau)d\tau+C(t). \tag{13}$$

Функция $\widetilde{u(t,s)}$ не оказывает влияние на реализацию динамического процесса, так как при подстановке выражения (12) для функции $u(t,s)$ в уравнение (1) первое слагаемое в правой части выражения (13) для $\widetilde{u(t,s)}$ нейтрализуется коэффициентом D: $Df(t,s)=0$, а функция $C(t)$, являющаяся результатом интегрирования, нейтрализуется операцией дифференцирования по переменной s. Далее будем называть функцию $U(t,s)$ *главной частью управления*, а функцию $\widetilde{u(t,s)}$ — *вариативной частью управления.*

3.3. О решении задачи управления в случае $\operatorname{Coker} D=\{0\}$. Вид функции $X(t,s)$ однозначно определяет вид функции состояния (11) и вид главной части управления (13). Без ущерба для реализации динамического процесса можно выбрать положить $\widetilde{u(t,s)}=0$.

Определение 1. В случае $\operatorname{Coker} D=\{0\}$ решением задачи управления (1)–(2) будем называть пару функций $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида (13) и (11) соответственно.

Теорема 1. *В случае $n_0=0$ система* (1) *является полностью управляемой. При выполнении условий* (3) *каждой определяющей функции $X(t,s)\in \boldsymbol{X}$ соответствует единственное решение задачи управления $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида* (13) *и* (11) *соответственно.*

Следует заметить, что процесс декомпозиции связан с расщеплением функции состояния на компоненты из подпространств. Полная реализация каскадной декомпозиции в случае выявления полной управляемости системы имеет результатом построение в той или иной форме функции состояния, удовлентворяющей условиям (2). Соответствующее управление всегда находится в виде (12) как решение уравнения (7).

При выполнении условия $n>n_0>0$ реализуется первый шаг декомпозиции исходной системы.

4. Исследование системы первого шага. В соответствии со свойствами матрицы D функция состояния расщепляется на компоненты из подпространств следующим образом:

$$x(t,s) = x_1(t,s) + u_1(t,s), \tag{14}$$

где $x_1(t,s) = Qx(t,s) \in \operatorname{Coker} D$, $u_1(t,s) = (I-Q)x(t,s) \in \operatorname{Im} D$. Функции $x_1(t,s)$ и $u_1(t,s)$ будем называть функциями псевдосостояния и псевдоуправления первого шага расщепления соответственно. С учетом обозначений:

$$\begin{gathered} B_1 = QBQ, \quad D_1 = QB(I-Q), \quad G_1 = QB, \\ \alpha_{10}(s) = Q\alpha(s), \quad \alpha_{11}(s) = G_1\frac{\partial \alpha(s)}{\partial s}, \\ \beta_{10}(s) = Q\beta(s), \quad \beta_{11}(s) = G_1\frac{\partial \beta(s)}{\partial s}, \\ \gamma_1(t,0) = Q\gamma(t), \quad w_1(t) = (I-Q)\gamma(t). \end{gathered}$$

на первом шаге расщепления производится эквивалентный переход от системы (8) к системе первого шага расщепления

$$\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} = B_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s} + D_1\frac{\partial u_1(t,s)}{\partial s}. \tag{15}$$

Кроме того, производится эквивалентный переход от условий (2) к условиям

$$x_1(0,s) = \alpha_{10}(s), \qquad x_1(T,s) = \beta_{10}(s), \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t}\right|_{t=0} = \alpha_{11}(s), \quad \left.\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t}\right|_{t=T} = \beta_{11}(s), \tag{17}$$

$$\text{(a) } x_1(t,0) = \gamma_1(s), \qquad x\text{(b) } u_1(t,0) = w_1(t). \tag{18}$$

Исследование системы первого шага расщепления (15) базируется на свойстве нетеровости матричного коэффициента $D_1 : \operatorname{Coker} D \to \operatorname{Im} D$, с $n_1 = \dim \operatorname{Coker} D_1$. Здесь возможны два случая: $n_0 = n_1$ и $n_0 > n_1$.

В случае $n_0 = n_1$ система (15) имеет вид

$$\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} = B_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s}$$

и является неуправляемой. При выполнении условия $n_0 > n_1$ реализуется переход от системы (15) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial u_1(t,s)}{\partial s} = F_1(t,s) + f_1(t,s), \tag{19}$$

$$Qx_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} = Q_1B_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s} \tag{20}$$

с функцией

$$F_1(t,s) = D_1^{-}\left(\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} - B_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s}\right) \tag{21}$$

и произвольной функцией $f_1(t,s) \in \operatorname{Ker} D_1$.

Здесь возможны два случая: $n_0 > n_1 = 0$ и $n_0 > n_1 > 0$. Рассмотрим их подробно.

При выполнении условия $n_0 > n_1 = 0$ уравнение (20) принимает вид $0 = 0$, так как $n_1 = 0$ — это случай сюръективной матрицы D_1 с нулевым проектором Q_1.

При наличии удовлетворяющей условиям (16)–(17) функции $x_1(t,s)$ функция $u_1(t,s)$ находится как частное решение дифференциального уравнения (19), удовлетворяющее условию (18)(b).

В случае сюръективной матрицы D_1 осуществляется переход к центральному этапу каскадной декомпозиции первого шага декомпозиции — построению функции псевдосостояния первого шага расщепления $x_1(t,s)$.

4.1. Схема построения функции $x_1(t,s)$. В качестве определяющей функции $X_1(t,s)$ выбирается любая функция, удовлетворяющая условиям (16)–(17). Построенной определяющей функции $X_1(t,s) \in \boldsymbol{X}_1$ ставится в соответствие функция $\widetilde{x_1(t)}$ (невязка), определяемая формулой

$$\widetilde{x_1(t)} = \gamma_1(t) - X_1(t,0). \tag{22}$$

Затем строится функция состояния в виде

$$x_1(t,s) = X_1(t,s) + \widetilde{x_1(t)}. \tag{23}$$

Построенная таким образом функция псевдосостояния первого шага расщепления $x_1(t,s)$ будет удовлетворять условиям (16)–(17).

4.2. Схема построения функции $u_1(t,s)$. Подстановка функции $x_1(t,s)$ вида (23) в правую часть выражения (21) позволяет найти функцию псевдоуправления первого шага расщепления $u_1(t,s)$ как решение дифференциального уравнения (19) с построенной таким образом функцией $F_1(t,s)$ в виде

$$u_1(t,s) = U_1(t,s) + \widetilde{u_1(t,s)}, \tag{24}$$

где

$$U_1(t,s) = \int\limits_0^s F_1(t,\tau)d\tau + C_1(t), \quad \widetilde{u_1(t,s)} = \int\limits_0^s f_1(t,\tau)d\tau. \tag{25}$$

Функция $C_1(t)$, являющаяся результатом интегрирования, находится из условия (18)(b), т.е.

$$C_1(t) = w_1(t) \tag{26}$$

и функция $U_1(t,s)$ принимает вид

$$U_1(t,s) = \int\limits_0^\tau F_1(t,\tau)d\tau + w_1(t). \tag{27}$$

Далее будем называть функцию $U_1(t,s)$ вида (27) *главной частью управления первого шага*, а функцию $\widetilde{u_1(t,s)}$ вида (25) — *вариативной частью управления первого шага*. Построением пары функций $x_1(t,s)$ и $u_1(t,s)$ на базе выбранной определяющей функции первого шага $X_1(t,s)$ завершается реализация центрального этапа каскадной декомпозиции. Далее осуществляется переход к обратному ходу каскадной декомпозиции — восстановлению функции состояния, удовлетворяющей условиям (2), затем к построению функции управления системы (27).

4.3. О решении задачи управления в случае $\operatorname{Coker} D_1 = \{0\}$. Функция состояния восстанавливается по формуле (14) и, с учетом выражений (23)–(25), имеет вид

$$x(t,s) = X_1(t,s) + \widetilde{x_1(t)} + U_1(t,s) + \widetilde{u_1(t,s)}. \tag{28}$$

В случае $\operatorname{Ker} D_1 = \{0\}$ вариативная часть управления первого шага будет удовлетворять условию

$$\widetilde{u_1(t,s)} = 0, \tag{29}$$

т.е. в случае $n_0 > n_1 = 0$, $m_1 = 0$ выбор определяющей функции первого шага $X_1(t,s)$ однозначно определяет вид функции состояния

$$x(t,s) = X_1(t,s) + \widetilde{x_1(t)} + U_1(t,s), \tag{30}$$

удовлетворяющей условиям (2).

При наличии функции состояния $x(t,s)$ вида (30), с учетом выражения (9) для функции $F(t,s)$ и выражения (13) для функции $U(t,s)$, рассчитывается соответствующая функция управления $u(t,s)$ по общей формуле (12). Как отмечалось выше в п. 3.2, вариативную часть управления без ущерба для реализации динамического процесса можно выбрать из условия $\widetilde{u(t,s)} = 0$.

Таким образом, выбор определяющей функции первого шага $X_1(t,s)$ однозначно определяет и вид функции состояния, и вид функции управления

$$u(t,s) = U(t,s) = \int\limits_0^s F(t,\tau)d\tau = \int\limits_0^s D^- \left(\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} - B\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial s} \right) d\tau. \tag{31}$$

Определение 2. В случае $n_0 > n_1 = 0$, $m_1 = 0$ решением задачи управления (1)–(2) будем называть пару функций $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида (31) и (30) соответственно.

Теорема 2. *В случае $n_1 = 0$ система* (1) *является полностью управляемой. При выполнении условий* (3) *и условий $\alpha(s) \in C^1[0,S]$, $\beta(s) \in C^1[0,S]$ в случае $m_1 = 0$ каждой определяющей функции $X_1(t,s) \in \boldsymbol{X}_1$ соответствует единственное решение задачи управления $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида* (31) *и* (30) *соответственно.*

При выполнении условия $n > n_0 > n_1 > 0$ реализуется второй шаг декомпозиции исходной системы и т. д.

5. Переход к системе общего вида. Таким образом, в случае $n_0 > n_1 > \ldots n_{i-1} > n_i > 0$, в соответствии со свойствами матрицы $D_{i-1} : \operatorname{Coker} D_{i-2} \to \operatorname{Im} D_{i-2}$, функция псевдосостояния $(i-1)$-го шага расщепляется на компоненты из подпространств следующим образом:

$$x_{i-1}(t,s) = x_i(t,s) + u_i(t,s), \tag{32}$$

где

$$x_i(t,s) = Q_{i-1}x_{i-1}(t,s) \in \operatorname{Coker} D_{i-2}, \quad u_i(t,s) = (I - Q_{i-1})x_{i-1}(t,s) \in \operatorname{Im} D_{i-2}.$$

Функции $x_i(t,s)$ и $u_i(t,s)$ будем называть соответственно функциями псевдосостояния и псевдоуправления i-го шага расщепления. При выполнении условий $\alpha(s) \in C^i[0,S]$, $\beta(s) \in C^i[0,S]$ общий вид совокупности соотношений i-го шага имеет вид:

(a) уравнение для нахождения функции $u_{i-1}(t,s)$:

$$u_{i-1}(t,s) = U_{i-1}(t,s) + \widetilde{u_{i-1}(t,s)}; \tag{33}$$

(b) система i-го шага декомпозиции:

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} = B_i \frac{\partial x_i(t,s)}{\partial s} + D_i \frac{\partial u_i(t,s)}{\partial s}, \tag{34}$$

с условиями

$$\frac{\partial x_i^j(t,s)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \alpha_{ij}(s), \quad \frac{\partial^j x_i(t,s)}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \beta_{ij}(s), \quad j = 0,1,2,\ldots,i, \tag{35}$$

$$\text{(a) } x_i(t,0) = \gamma_i(s), \quad \text{(b) } u_i(t,0) = w_i(t). \tag{36}$$

Функции в уравнении (33) определяются следующим образом:

$$U_{i-1}(t,s) = \int\limits_0^s F_{i-1}(t,\tau)d\tau + C_{i-1}(t), \quad \widetilde{u_{i-1}(t,s)} = \int\limits_0^s f_{i-1}(t,\tau)d\tau. \tag{37}$$

Функция $C_{i-1}(t)$, являющаяся результатом интегрирования, находится из условия (36)(b), и функция $U_{i-1}(t,s)$ принимает вид

$$U_{i-1}(t,s) = \int\limits_0^\tau F_{i-1}(t,\tau)d\tau + w_{i-1}(t). \tag{38}$$

Итак, функция $u_{i-1}(t,s)$ находится как решение уравнения

$$\frac{\partial u_{i-1}(t,s)}{\partial s} = F_{i-1}(t,s) + f_{i-1}(t,s) \tag{39}$$

с неизвестной пока функцией $x_{i-1}(t,s)$, которая определяет вид функции

$$F_{i-1}(t,s) = D_{i-1}^{-}\left(\frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial t} - B_{i-1}\frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial s}\right), \tag{40}$$

и произвольной функцией $f_{i-1}(t,s) \in \operatorname{Ker} D_{i-1}$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
n_i = \dim \operatorname{Coker} D_{i-1}, \quad m_i = \dim \operatorname{Ker} D_{i-1},\\
B_i = Q_{i-1}B_{i-1}Q_{i-1}, \quad D_i = Q_{i-1}B_{i-1}(I - Q_{i-1}), \quad G_i = Q_{i-1}B_{i-1},\\
\alpha_{i0}(s) = Q_{i-1}\alpha_{i-10}(s) = Q_{i-1}Q_{i-2}\dots Q_1Q\alpha(s),\\
\beta_{i0}(s) = Q_{i-1}\beta_{i-10}(s) = Q_{i-1}Q_{i-2}\dots Q_1Q\beta(s),\\
\gamma_i(t) = Q_{i-1}\gamma_{i-1}(t) = Q_{i-1}Q_{i-2}\dots Q_1Q\gamma(t),\\
w_i(t) = (I - Q_{i-1})\gamma_{i-1}(t) = (I - Q_{i-1})Q_{i-2}\dots Q_1Q\gamma(t),\\
\alpha_{ij}(s) = G_i\frac{\partial^j \alpha_{i-1j}(s)}{\partial s^j} = G_iG_{i-1}\dots G_2G_1\frac{\partial^j \alpha(s)}{\partial s^j}, \quad j = 1,2,\dots,i,\\
\beta_{ij}(s) = G_i\frac{\partial^j \beta_{i-1j}(s)}{\partial s^j} = G_iG_{i-1}\dots G_2G_1\frac{\partial^j \beta(s)}{\partial s^j}, \quad j = 1,2,\dots,i,
\end{gathered} \tag{41}$$

В силу конечномерности исходного пространства $\mathbb{R}^n$ возможны лишь два случая: $n > n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} = n_p$ и $n > n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} > n_p = 0$.

При выполнении условий (3) и условий $\alpha(s) \in C^p[0,S]$, $\quad \beta(s) \in C^p[0,S]$ прямой ход полностью реализуется за p шагов ($n \geqslant p \geqslant 0$) переходом к совокупности соотношений p-го шага, которая включает в себя уравнение для нахождения функции $u_{p-1}(t,s)$

$$\frac{\partial u_{p-1}(t,s)}{\partial s} = F_{p-1}(t,s) + f_{p-1}(t,s) \tag{42}$$

и систему p-го шага декомпозиции

$$\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} = B_p\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial s} + D_p\frac{\partial u_p(t,s)}{\partial s} \tag{43}$$

с условиями

$$\frac{\partial x_p^j(t,s)}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} = \alpha_{pj}(s), \quad \frac{\partial^j x_p(t,s)}{\partial t^j}\bigg|_{t=T} = \beta_{pj}(s), \quad j = 0,1,2,\dots,i, \tag{44}$$

$$x_p(t,0) = \gamma_i(t), \tag{45}$$

$$u_p(t,0) = w_p(t), \tag{46}$$

где коэффициенты и функции определяются по формулам (41), с заменой индекса i на p.

Функция $F_{p-1}(t,s)$ в уравнении (42) имеет вид

$$F_{p-1}(t,s) = D_{-1}^{-}\left(\frac{\partial x_{p-1}(t,s)}{\partial t} - B_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}(t,s)}{\partial s}\right), \tag{47}$$

с неизвестной пока функцией $x_{p-1}(t,s)$, а $f_{p-1}(t,s)$ — произвольная функция из подпространства $\operatorname{Ker} D_{p-2}$.

В случае $n_{p-1} = n_p$, т.е. $\dim \operatorname{Coker} D_{p-1} = \dim \operatorname{Coker} D_p$, что означает $D_p = (0)$, система (43) принимает вид

$$\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} = B_p\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial s} \tag{48}$$

и является неуправляемой, так как функция $x_p(t,s)$, найденная как решение дифференциального уравнения (48), в общем случае не будет удовлетворять всем условиям (44)–(45). Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *В случае* $D_p = 0$ *система* (43) *с условиями* (44)–(45) *не является управляемой.*

Неуправляемость системы (43) с условиями (44)–(45) влечет неуправляемость всех систем (34) с условиями (35)–(36) с $i = p-1, p-2, \dots, 2, 1$, что влечет и неуправляемость исходной системы (1).

Доказана следующая лемма.

Лемма 3. *В случае $D_p = (0)$ система* (1) *с условиями* (2) *не является управляемой.*

В случае $n_p = 0$ выполняется условие $\operatorname{Coker} D_p = 0$, т.е. матрица D_p является сюръективной.

При наличии функции $x_p(t,s)$, удовлетворяющей условиям (44)–(45), функция $u_p(t,s)$ находится как частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_p(t,s)}{\partial s} = F_p(t,s) + f_p(t,s) \tag{49}$$

с функцией

$$F_p(t,s) = Dp^{-}\left(\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} - B_p\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial s}\right) \tag{50}$$

и произвольной функцией $f_p(t,s) \in \operatorname{Ker} D_{p-1}$, удовлетворяющее условию (46).

Итак, в случае сюрьективной матрицы D_p осуществляется переход к центральному этапу каскадной декомпозиции, который предполагает выбор определяющей функции и построение функций $x_p(t,s)$ и $u_p(t,s)$.

6. Центральный этап декомпозиции. Строится удовлетворяющая всем $r = 2(p+1)$ условиям (44) функция $X_p(t,s)$, которая называется *определяющей*. Эта функция может быть построена в произвольной форме, например, в виде линейной комбинации линейно независимых функций $\psi_{pi}(t)$ с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$:

$$X_p(t,s) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{pi}(s) \cdot \psi_{pi}(t). \tag{51}$$

В [14] подробно описана схема построения определяющих функций в полиномиальной, экспоненциальной, дробно-рациональной формах. Минимальный набор линейно независимых функций $\psi_{pi}(t)$, выбранных для построения функции $X_p(t,s)$, вида (51), называем базисным набором

$$w(t) = \Big(\psi_{p1}(t),\ \psi_{p2}(t),\ \ldots,\ \psi_{pr}(t)\Big).$$

Сами функции $\psi_{pi}(t)$, $i = 1,\ldots,r$, называем базисными функциями. Число r, равное минимальному количеству базисных функций, определяется количеством условий (44) и называется размерностью базисного набора: $r = \dim w(t) = 2(p+1)$.

В зависимости от вида функций $\alpha_{pj}(s)$, $\beta_{pj}(s)$ в условиях (44), которые, в свою очередь, определяются видом функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ в условиях (2)(a), (2)(b), или от пожеланий исследователя, существует вариативность выбора формы базисных наборов, определяющих, в свою очередь, существование целого класса функций $X_p(t,s)$, удовлетворяющих всем условиям (44) и определяющих аналитический вид решения задачи управления системы (1) с условиями (2).

Определение 3. Совокупность функций $X_p(t,s)$, удовлетворяющих условиям (44), будем называть классом определяющих функций исходной системы и обозначать символом $\boldsymbol{X}_p$.

6.1. Схема построения функции $x_p(t,s)$. Строится определяющая функция $X_p(t,s) \in \boldsymbol{X}_p$. Построенной определяющей функции ставится в соответствие функция $\widetilde{x_p(t)}$ (невязка), определяемая формулой

$$\widetilde{x_p(t)} = \gamma_p(t) - X_p(t,0). \tag{52}$$

Функция $x_p(t,s)$, построенная в виде

$$x_p(t,s) = X_p(t,s) + \widetilde{x_p(t)}, \tag{53}$$

будет удовлетворять всем условиям (44)–(45). Построением функции $x_p(t,s)$ завершается центральный этап декомпозиции. Далее реализуется этап восстановления функции состояния $x(t,s)$.

7. Обратный ход декомпозиции. Подстановка функции $x_p(t,s)$ вида (53) в правую часть выражения (50) позволяет найти функцию $u_p(t,s)$ с построенной таким образом функцией $F_p(t,s)$ как решение дифференциального уравнения (49) в виде

$$u_p(t,s) = U_p(t,s) + \widetilde{u_p(t,s)}, \tag{54}$$

где

$$U_p(t,s) = \int_0^s F_p(t,\tau)d\tau + C_p(t), \quad \widetilde{u_p(t,s)} = \int_0^s f_p(t,\tau)d\tau. \tag{55}$$

Функция $C_p(t)$, являющаяся результатом интегрирования, находится из условия (46), т.е.

$$C_p(t) = w_p(t), \tag{56}$$

и функция $U_p(t,s)$ принимает вид

$$U_p(t,s) = \int_0^\tau F_p(t,\tau)d\tau + w_p(t). \tag{57}$$

Будем называть функцию $U_p(t,s)$ вида (57) *главной частью управления p-го шага*, а функцию $\widetilde{u_p(t,s)}$ вида (55) — *вариативной частью управления p-го шага.*

В соответствии с формулой (32) с заменой индекса i на p с учетом выражений (53) и (57), функция $p-1$-го шага $x_{p-1}(t,s)$ восстанавливается в виде

$$x_{p-1}(t,s) = X_p(t,s) + \widetilde{x_p(t)} + U_p(t,s) + \widetilde{u_p(t,s)}. \tag{58}$$

В случае $m_{p-1} = 0$ вариативная часть управления p-го шага будет удовлетворять условию

$$\widetilde{u_p(t,s)} = 0, \tag{59}$$

т.е. выбор определяющей функции $X_p(t,s)$ однозначно определяет вид функции

$$x_{p-1}(t,s) = X_p(t,s) + \widetilde{x_p(t)} + U_p(t,s). \tag{60}$$

Далее, с рассчитанной по формуле (33) функцией $x_{p-1}(t,s)$, с учетом выражений (40), (38), (37), с заменой индекса i на p, находится функция $u_{p-1}(t,s)$ в общем виде:

$$u_{p-1}(t,s) = U_{p-1}(t,s) + \widetilde{u_{p-1}(t,s)}. \tag{61}$$

Затем восстанавливается функция $p-2$-го шага и т. д.

Далее последовательно (с $i = p-2, p, \dots, 1$) используется цепочка формул

$$x_{i-1}(t,s) = x_i(t,s) + u_i(t,s), \quad F_{i-1}(t,s) = D_{i-1}^{-}\left(\frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial t} - B_{i-1}\frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial s}\right),$$

$$U_{i-1}(t,s) = \int_0^\tau F_{i-1}(t,\tau)d\tau + w_{i-1}(t), \quad u_{i-1}(t,s) = U_{i-1}(t,s) + \widetilde{u_{i-1}(t,s)}.$$

Таким образом, за p шагов обратного хода восстанавливается функция состояния системы (1) в общем виде:

$$x(t,s) = x_p(t,s) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t,s) = X_p(t,s) + \widetilde{x_p(t)} + \sum_{i=1}^{p}(U_i(t,s) + \widetilde{u_i(t,s)}). \tag{62}$$

Завершающим этапом является построение функции управления системы (1).

Подстановка функции $x(t,s)$ вида (62) в правую часть выражения (9) позволяет найти функцию $u(t,s)$ как решение дифференциального уравнения (7) в виде

$$u(t,s) = U(t,s) + \widetilde{u(t,s)},$$

с главной частью вида

$$U(t,s)=\int_0^s D^-\left(\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}-B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right)d\tau. \tag{63}$$

Теорема 3 (критерий полной управляемости 1). *При выполнении условий* $\alpha(s)$, $\beta(s)\in C^p_{[0,S]}$, *и* (3) *система* (1) *с условиями* (2) *является полностью управляемой тогда и только тогда, когда существует такое* p $(0\leqslant p\leqslant n)$, *что* D_p — *сюрьективная матрица.*

При выполнении условий $\operatorname{Ker} D_i=0$, $i=1,2,\ldots,p-1$, функция состояния будет иметь вид

$$x(t,s)=X_p(t,s)+\widetilde{x_p(t)}+\sum_{i=1}^p U_i(t,s), \tag{64}$$

так как вариативные части функций всех шагов декомпозиции будут удовлетворять условию $\widetilde{u_i(t,s)}=0$. В этом случае функция состояния будет однозначно определяться выбором определяющей функции $X_p(t,s)$. Соответственно, главная часть управления — функция $U(t,s)$ вида (63) — также будет однозначно соответствовать выбранной определяющей функции $X_p(t,s)$.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы* 3 *и условий* $m_i=0$, $i=1,2,\ldots,p-1$, *каждой определяющей функции* $X_p(t,s)\in\boldsymbol{X}_p$ *соответствует единственное решение задачи управления* $U(t,s)$, $x(t,s)$ *вида* (63) *и* (64) *соответственно.*

В [9] доказано, что условие $n_p=0$ эквивалентно условию

$$\operatorname{rank}(D\ BD\ \ldots\ B^{p-1}D)=n. \tag{65}$$

Теорема 5 (критерий полной управляемости 2). *При выполнении условий теоремы* 3 *система* (1) *является полностью управляемой тогда и только тогда, когда выполняется условие* (65).

8. Заключение. С применением метода каскадной декомпозиции решена задача программного управления для динамической системы (1) с условиями (2).

Выявлены свойств матричных коэффициентов B и D, влекущих полную управляемость системы (1).

Установлены свойства функций в условиях (2): условия p-кратной дифференцируемости функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$, достаточные для реализации управляемого процесса.

Выделен класс определяющих функций из подпространства минимальной размерности, каждому элементу которого соответствует некоторое решение задачи управления. Установлены условия, при выполнении которых каждой определяющей функции соответствует единственная пара функций управления и состояния.

В аналитическом виде построено решение задачи программного управления:

(a) рассчитана функция состояния, удовлетворяющая заданным условиям (2);

(b) построена функция управления вида (62), под воздействием которой система (1) переводится из произвольного начального состояния (2)(a) в произвольное конечное состояние (2)(b) за время $[0,T]$ ($T>0$ произвольно), при этом выполняется условие (2)(c).

Для системы (1) выведены два критерия полной управляемости:

(a) критерий с условием нулевого подпространства $\operatorname{Coker} D_p$;

(b) ранговый критерий с условием Калмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
2. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
3. *Зубова С. П.* Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом// Докл. РАН. — 2012. — *447*, № 6. — С. 599–602.
4. *Зубова С. П., Раецкая Е. В.* Построение управления для получения заданного выхода в системе наблюдения// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2015. — *20*, № 5. — С. 1400–1408.

5. *Зубова С. П., Раецкая Е. В.* Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2010. — *25*, № 6. — С. 1678–1679.
   // Труды IFAC, Москва, 1960, С. 521- 546.
6. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.
9. *Раецкая Е. В.* Условная управляемость и наблюдамость линейных систем/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Воронеж: ВГУ, 2004.
10. *Раецкая Е. В.* Исследование сингулярно возмущенной системы управления// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2018. — *23*, № 122. — С. 303–307.
11. *Раецкая Е. В.* Алгоритм построения управления динамической системой в частных производных// Модел. сист. процессов. — 2022. — *15*, № 4. — С. 116–127.
12. *Раецкая Е. В.* Алгоритм построения полиномиального решения задачи программного управления для динамической системы в частных производных// Модел. сист. процессов. — 2023. — *16*, № 3. — С. 94–104.
13. *Раецкая Е. В.* Структурный анализ функции управления динамической системой в частных производных// Модел. сист. процессов. — 2023. — *16*, № 1. — С. 93–104.
14. *Раецкая Е. В.* Общая схема построения определяющей функции в задаче управления для динамической системы в частных производных разного порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — *232*. — С. 78–88.
15. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980.
16. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* A study of the rigidity of descriptor dynamical systems in a Banach space// J. Math. Sci. — 2015. — *208*, № 1. — С. 119–124.
17. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations// J. Math. Sci. — 2013. — *188*, № 3. — С. 218–226.
18. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — *44*, № 15. — С. 11998–12009.
19. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Control problem for dynamical systems with partial derivatives// J. Math. Sci. — 2021. — *249*, № 6. — С. 11998–12009.
20. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Construction of Control Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System// Automat. Remote Control. — 2018. — *79*, № 5. — С. 774–791.
21. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition// Automat. Remote Control. — 2017. — *78*, № 7. — С. 1189–1202.
22. *Zubova S. P., Trung L. H., Raetskaya E. V.* On polinomial solutions of the linear stationary control system// Automat. Remote Control. — 2008. — *69*, № 11. — С. 1852–1858.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20012).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Раецкая Елена Владимировна (Raetskaya Elena Vladimirovna)
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова
(G. F. Morozov Voronezh State Forest Engineering University, Voronezh, Russia)
E-mail: `raetskaya@inbox.ru`