



ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ КОВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО И СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2022 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. Э. НОВОСЕЛЬЦЕВА

Аннотация. Рассмотрен класс систем $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$, $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{L}''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$ квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, описывающих изменение со временем пары $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$, состоящей из векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и набора $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ скалярных полей. Класс состоит из систем, инвариантных относительно трансляций времени $t \in \mathbb{R}$ и пространства $\mathbb{R}^3$, а также преобразующихся ковариантным образом при вращениях $\mathbb{R}^3$. Дается описание соответствующего класса нелинейных дифференциальных операторов $\mathbf{L} = \langle \mathbf{L}'[\cdot], \mathbf{L}''[\cdot] \rangle$ первого порядка, действующих в функциональном пространстве $C_{1, \text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3)$, которые являются генераторами эволюции. Найдены условия, при которых пара $\mathbf{L}$ операторов порождает гиперболическую систему.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, квазилинейная система уравнений, гиперболичность, векторное поле, ковариантность, сферическая симметрия.

HYPERBOLICITY OF COVARIANT SYSTEMS OF FIRST-ORDER EQUATIONS FOR VECTOR AND SCALAR FIELDS

© 2022 Yu. P. VIRCHENKO, A. E. NOVOSELTSEVA

ABSTRACT. We consider a class of first-order systems of quasilinear partial differential equations $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$, $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{L}''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$ that describe time evolution of the pair $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$ consisting of a vector field $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ and the set of scalar fields $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. The class considered consists of systems that are invariant under time and space translations and covariant under space rotations. We describe the corresponding class of evolution generators, i.e., nonlinear first-order differential operators $\mathbf{L} = \langle \mathbf{L}'[\cdot], \mathbf{L}''[\cdot] \rangle$ acting in the functional space $C_{1, \text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3)$. Also, we find conditions under which a pair of operators $\mathbf{L}$ generates a hyperbolic system.

Keywords and phrases: first-order differential operator, quasilinear system, hyperbolicity, vector field, covariance, spherical symmetry.

AMS Subject Classification: 35F60

1. Введение. В этом сообщении мы приводим результаты исследования специальных бесконечномерных динамических систем, описывающих эволюцию полей на $\mathbb{R}^3$, начатого нами в предыдущих работах (см. [1–6, 11]). С точки зрения приложений эти динамические системы выделены тем, что они обладают фундаментальными физическими симметриями. В настоящей работе мы рассматриваем систему эволюционных уравнений дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{L}'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}])(\mathbf{x}, t), \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{L}''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}])(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

в функциональном пространстве $C_{1, \text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3)$ наборов $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$ локально непрерывно дифференцируемых полей на $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\rho}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$. Они описывают изменение со временем t векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и набора N скалярных полей

$\rho = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, оказывающих влияние друг на друга в процессе эволюции. Здесь и далее точка, поставленная над функцией, обозначает частную производную по t , а генератор эволюции $\mathbf{L} \equiv \langle \mathbf{L}'[\mathbf{u}, \rho], \mathbf{L}''[\mathbf{u}, \rho] \rangle$ в (1) представляет собой многокомпонентный квазилинейный дифференциальный оператор первого порядка, действующий в пространстве $C_{1,\text{loc}}^{N+3}(\mathbb{R}^3)$.

Мы полагаем, что значения векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \langle u_j(\mathbf{x}, t); j \in \{1, 2, 3\} \rangle$ представляют собой полярные векторы в $\mathbb{R}^3$. Оператор $\mathbf{L}'[\cdot]$ осуществляет отображение

$$\mathbf{L}'[\cdot]: C_{1,\text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3) \rightarrow C_{1,\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3),$$

и поэтому он естественным образом разлагается на декартовы компоненты $\mathbf{L}'[\cdot] = \langle \mathbf{L}_j[\cdot]; j \in \{1, 2, 3\} \rangle$ согласно декартовым компонентам $u_j(\mathbf{x}, t)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, векторного поля в левой части (1). Каждая такая компонента осуществляет отображение

$$\mathbf{L}_j[\cdot]: C_{1,\text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3) \rightarrow C_{1,\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3), \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Общий вид действия каждой компоненты $\mathbf{L}_j[\cdot]$, $j \in \{1, 2, 3\}$, дифференциального оператора $\mathbf{L}'[\cdot]$ первого порядка в уравнении (1) дается формулой

$$\mathbf{L}_j[\mathbf{u}, \rho] = a_{jk;l}(\mathbf{u}, \rho) \nabla_k u_l + \sum_s b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \rho) \nabla_k \rho^{(s)} + H_j(\mathbf{u}, \rho), \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2)$$

где здесь и далее предполагается, что наличие в математических выражениях повторяющихся парным образом нижних индексов указывает на присутствие в этих формулах суммирования по всем возможным значениям 1, 2, 3 индекса, составляющего каждую из таких пар.

Коэффициенты $a_{jk;l}$, $b_{jk}^{(s)}$ и слагаемые H_j представляют собой значения в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ непрерывных на $\mathbb{R}^3$ сложных функций $a_{jk;l} \equiv a_{jk;l}(\mathbf{u}, \rho)$, $b_{jk}(\mathbf{u}, \rho)$, $H_j \equiv H_j(\mathbf{u}, \rho)$; $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$.

Кроме того, в формуле (2) и далее в работе посредством ∇_k обозначены дифференциальные операторы $\partial/\partial x_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$; таким образом,

$$\nabla_k u_l \equiv \frac{\partial u_l(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

Так как $\rho = \langle \rho^{(s)}; s = 1, \dots, N \rangle$, то оператор $\mathbf{L}''$ также разлагается на N компонент

$$\mathbf{L}'' = \langle \mathbf{L}^{(s)}[\cdot]; s = 1, \dots, N \rangle,$$

где каждая компонента, представляющая собой квазилинейный дифференциальный оператор первого порядка, осуществляет отображение

$$\mathbf{L}^{(s)}[\cdot]: C_{1,\text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3) \rightarrow C_{1,\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3), \quad s = 1, \dots, N.$$

Результат действия каждой из этих компонент в уравнении (1) дается формулой

$$\mathbf{L}^{(s)}[\mathbf{u}, \rho] = a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \rho) \nabla_k u_l + \sum_{s'} b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \rho) \nabla_k \rho^{(s')} + H^{(s)}(\mathbf{u}, \rho), \quad s = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где, как и в (2), коэффициенты $a_{k;l}^{(s)}$, $b_k^{(s,s')}$ и слагаемые $H^{(s)}$ представляют собой значения в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ непрерывных на $\mathbb{R}^3$ сложных функций $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \rho)$, $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \rho)$, $H^{(s)} \equiv H^{(s)}(\mathbf{u}, \rho)$, $k, l \in \{1, 2, 3\}$, $s = 1, \dots, N$.

Рассмотрим класс систем уравнений (1) с операторами вида (2), (3), которые подчинены дополнительным условиям. Эти условия формулируются в виде ограничений на коэффициенты $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \rho)$, $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \rho)$, $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \rho)$, $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \rho)$; $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$, $s, s' = 1, \dots, N$. Целью исследования настоящей работы является нахождение условий гиперболичности систем (1) квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка из этого класса.

2. Ковариантные системы уравнений. Дополнительное ограничение, накладываемое на рассматриваемые в настоящей работе системы квазилинейных уравнений, состоит в использовании таких генераторов $L[\cdot]$ в уравнении (1), которые обладают ковариантностью по отношению к преобразованиям группы $\mathbb{O}_3$ на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Уравнения (1) с генераторами $L[\cdot] = \langle L_j[\cdot], L^{(s)}[\cdot] \rangle$, определяемыми (2), (3), обладают свойствами однородности при трансляциях времени и пространства $\mathbb{R}^3$, так как коэффициенты $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ и функции $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ не зависят явно от времени $t \in \mathbb{R}$ и радиус-вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. В этом случае уравнение (1) инвариантно относительно трансляций времени $t \Rightarrow t + s$, $s \in \mathbb{R}$ и пространства $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z} + \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$.

Группа $\mathbb{O}_3$ состоит из ортогональных (3×3) -матриц $\mathcal{A}$, т.е. матриц, обладающих свойством $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^T\mathcal{A} = \mathcal{I}$. Обозначим посредством $L^{(A)}[\cdot]$ дифференциальный оператор, который получается в результате преобразования оператора $L[\cdot]$ матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$. Так как $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — векторное поле, то при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ его значения в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ преобразуются в $(\mathcal{A}\mathbf{u})(\mathbf{x}, t)$. Компоненты набора $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t)$ являются скалярными полями $\rho^{(s)}(\mathbf{x}, t)$, $s = 1, \dots, N$. Это означает, что при преобразовании $\mathbb{R}^3$ матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$, каждая из этих компонент остается инвариантной. Тогда требование ковариантности уравнения (1) означает, что оператор $L[\cdot]$ обладает свойством $L^{(A)}[\mathcal{A}\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = \mathcal{A}L[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$.

Так как первая система уравнений в (1) описывает изменение векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ со временем, а вторая система — изменение со временем набора скалярных полей, то свойство ковариантности системы (1) с генератором эволюции $L[\cdot]$ означает, что ее коэффициенты $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, при преобразованиях $\mathcal{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в фиксированной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, изменяются «по нижним индексам» как тензоры, соответственно, 2-го и 3-го рангов в $\mathbb{R}^3$, а коэффициенты $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ и функции $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ — как векторы в $\mathbb{R}^3$. Функции же $H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ остаются неизменными при этих преобразованиях аргумента.

Заметим, что для простоты изложения мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными векторами и тензорами.

Класс систем уравнений (1), обладающих свойством ковариантности, как и класс дифференциальных операторов $L[\cdot]$, определяющих такие системы будем далее обозначать посредством символа $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3; 1, N)$, где нижний индекс указывает на то, что система уравнений (1), описывающая эволюцию набора полей на $\mathbb{R}^3$, определяется дифференциальным оператором первого порядка. Сам же набор полей состоит из одного векторного поля и N скалярных полей. Частным случаем систем уравнений с операторами $L_j[\cdot]$, $L^{(s)}[\cdot]$ являются системы *дивергентного типа*. В первом случае оператор (2) имеет вид

$$L_j[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = \nabla_k S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) + H_j, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (4)$$

где $S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ — непрерывно дифференцируемая тензор-функция на $\mathbb{R}^3$. Во втором случае, если для какого-то фиксированного s эволюционное уравнение имеет дивергентный тип, то для этого значения s действие оператора (3) дается формулой

$$L^{(s)}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = \nabla_k S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) + H^{(s)}, \quad (5)$$

где $S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция на $\mathbb{R}^3$.

Ввиду функциональной независимости тензор-функции $\nabla_k u_l$ на $\mathbb{R}^3$ от вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и каждой вектор-функции $\nabla_k \rho^{(s)}$ на $\mathbb{R}^3$ от функции $\rho^{(s)}(\mathbf{x}, t)$ при $s = 1, \dots, N$, из равенств

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial u_l} \nabla_k u_l + \sum_s \frac{\partial S_{jk}}{\partial \rho^{(s)}} \nabla_k \rho^{(s)} = 0, \quad \frac{\partial S_k^{(s)}}{\partial u_l} \nabla_k u_l + \sum_{s'} \frac{\partial S_k^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}} \nabla_k \rho^{(s')} = 0$$

следует, что $\partial S_{jk} / \partial u_l = 0$, $\partial S_{jk} / \partial \rho^{(s)} = 0$, $s = 1, \dots, N$, т.е. функция $S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ определена однозначно с точностью до произвольной постоянной матрицы и, аналогично, с точностью до постоянного вектора определены функции $S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $s = 1, \dots, N$.

Связь между коэффициентами $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ и функциями $S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $S_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ дается следующими формулами:

$$\frac{\partial S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial u_l} = a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad \frac{\partial S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial \rho^{(s)}} = b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad j, k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial u_l} = a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad \frac{\partial S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial \rho^{(s')}} = b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad s, s' = 1, \dots, N. \quad (7)$$

3. Системы класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3; 1, N)$. В связи со сформулированным свойством ковариантности уравнения (1), возникает важная, с точки зрения физических приложений, задача об описании класса систем дифференциальных уравнений, обладающих этим свойством. Так как каждая система уравнений полностью определяется наборами своих коэффициентов, то такое описание сводится к описанию всех возможных типов тензор-функций $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ и вектор-функций $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$.

Описание тензор-функций $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_{k;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ дается в терминах разложений по наборам форм-инвариантных тензор-функций (см. [10]) или, в другой терминологии (см. [8]), комитантов:

$$a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_3} f_r F_{j,k,l}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_2} f_r^{(s)} F_{k,l}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad b_{kl}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_2} g_r^{(s)} F_{k,l}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad (8)$$

где наборы $\{F_{k,l}^{(r)}(\mathbf{u}); r = 1, \dots, n_2\}$, $\{F_{j,k,l}^{(r)}(\mathbf{u}); r = 1, \dots, n_3\}$ представляют собой базисы в пространствах форм-инвариантных тензор-функций со значениями в виде тензоров, соответственно, 2-го и 3-го ранга. Этим наборам базисных функций соответствуют наборы $\{f_r; r = 1, \dots, n_3\}$, $\{f_r^{(s)}; r = 1, \dots, n_2\}$, $\{g_r^{(s)}; r = 1, \dots, n_2\}$, $s = 1, \dots, N$ коэффициентных функций, состоящие из произвольных непрерывных функций, зависящих от набора алгебраически независимых инвариантов группы $\mathbb{O}_3$ и компонент набора $\boldsymbol{\rho}$. Этот набор независимых инвариантов называется целым рациональным базисом.

Таким образом, решение указанной выше задачи состоит в построении целого рационального базиса и базисов форм-инвариантных тензор-функций 2-го и 3-го ранга вместе с определением соответствующих им размерностей n_2 и n_3 .

В настоящей публикации, как и в предыдущих работах [1–6, 11], мы указываем решение этой задачи в так называемом сферически симметричном случае, когда имеется единственный инвариант вектора $\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{u}^2$, а набор образующих тензорной алгебры, в рамках которой строятся базисы форм-инвариантных функций, состоит из универсального инвариантного тензора второго ранга $\boldsymbol{\delta}$ — символа Кронекера с компонентами $\delta_{jk} = \{1, j = k; 0, j \neq k\}$ и вектора $\mathbf{u}$. Заметим, что недопустимо использование в качестве образующей тензорной алгебры символа Леви-Чивиты ε_{jkl} , так как он является псевдотензором. В этом случае все допустимые вектор-функции $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ даются формулой $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = u_j H(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\rho})$, где $H(\eta, \boldsymbol{\rho})$ — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ от инварианта η и набора $\boldsymbol{\rho}$ скалярных переменных. Соответственно, все вектор-функции $b_k^{(s,s')}$ имеют вид $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = u_k g^{(s,s')}(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\rho})$, где $g^{(s,s')}(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\rho})$ — произвольные непрерывные функции от $\mathbf{u}^2$ и компонент набора $\boldsymbol{\rho}$, $s, s' = 1, \dots, N$.

Описание систем дивергентного типа с генератором эволюции, определяемым (4), (5), дается в терминах разложений

$$S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_2} h_r F_{jk}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = u_k S^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \quad (9)$$

и функций $S^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $s = 1, \dots, N$, используя базис $\{F_{jk}^{(r)}(\mathbf{u}); r = 1, \dots, n_2\}$ форм-инвариантных функций, представляющих тензоры второго ранга, и соответствующего набора $\{h^{(r)}; r = 1, \dots, n_2\}$ непрерывных коэффициентных функций от того же самого, что и выше, набора переменных.

На основе указанных выше образующих элементов тензорной алгебры можно построить только лишь два линейно независимых тензора второго ранга, которые являются мономами относительно операций тензорного умножения и свертки, а именно, их компоненты даются выражениями $F_{jk}^{(1)} = \delta_{jk}$ и $F_{jk}^{(2)} = u_j u_k$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$, которые представляют тензоры второго ранга и которые составляют базис для разложений тензор-функций 2-го ранга в (8), (9).

Аналогично убеждаемся, что имеется только лишь четыре линейно независимых монома, которые представляют тензоры третьего ранга:

$$F_{jkl}^{(1)} = \delta_{jk} u_l, \quad F_{jkl}^{(2)} = \delta_{kl} u_j, \quad F_{jkl}^{(3)} = \delta_{jl} u_k, \quad F_{jkl}^{(4)} = u_j u_k u_l, \quad j, k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

Они составляют базис в первом разложении в (8) тензоров 3-го ранга.

Таким образом, получаем, что $n_3 = 4$ и $n_2 = 2$ и разложения (8) и (9), соответственно, принимают вид

$$a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = f_1 \delta_{jk} u_l + f_2 \delta_{kl} u_j + f_3 \delta_{jl} u_k + f_4 u_j u_k u_l, \quad (10)$$

$$b_{jk}^{(s)} = g_1^{(s)} \delta_{jk} + g_2^{(s)} u_j u_k, \quad a_{k;l}^{(s)} = \delta_{kl} f_1^{(s)} + u_k u_l f_2^{(s)} \quad (11)$$

с непрерывными функциями $f_r \equiv f_r(\eta, \boldsymbol{\rho})$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$; $f_r^{(s)} = f_r^{(s)}(\eta, \boldsymbol{\rho})$, $g_r^{(s)} = g_r^{(s)}(\eta, \boldsymbol{\rho})$, $r \in \{1, 2\}$, $s = 1, \dots, N$. Аналогичным образом разложение в (9) превращается в сумму

$$S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = h_1 \delta_{jk} + h_2 u_j u_k \quad (12)$$

с непрерывными коэффициентными функциями $h_r \equiv h_r(\eta, \boldsymbol{\rho})$, $r \in \{1, 2\}$.

Выпишем список линейно независимых дифференциальных операторов первого порядка $F_{jkl}^{(r)}(\mathbf{u}) \nabla_k u_l$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, соответствующих элементам базиса тензоров 3-го ранга. Нумерация элементов из приводимого ниже списка соответствует указанному выше порядку в этом базисе:

$$(\mathbf{u}, \nabla_j \mathbf{u}), \quad u_j (\nabla, \mathbf{u}), \quad (\mathbf{u}, \nabla) u_j, \quad u_j (\mathbf{u}, (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}),$$

где круглыми скобками обозначена операция скалярного умножения заключенных в них векторов. Соответственно, общий вид уравнения $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$ системы (1) из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$, согласно (10), (11), дается формулой

$$\begin{aligned} \dot{u}_j = & f_1(\mathbf{u}, \nabla_j \mathbf{u}) + f_2 u_j (\nabla, \mathbf{u}) + f_3 (\mathbf{u}, \nabla) u_j + f_4 u_j (\mathbf{u}, (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}) + \\ & + \sum_s (g_1^{(s)} \nabla_j \rho^{(s)} + g_2^{(s)} u_j (\mathbf{u}, \nabla) \rho^{(s)}) + H_j, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогичным образом система уравнений $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{L}''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$ из (1) с оператором (3), на основании (11), принимает вид

$$\dot{\rho}^{(s)} = f_1^{(s)} (\nabla, \mathbf{u}) + f_2^{(s)} (\mathbf{u}, (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}) + \sum_{s'} g^{(s,s')} (\mathbf{u}, \nabla) \rho^{(s')} + H^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Сформулируем полученный результат в виде отдельного утверждения.

Теорема 1. Для того чтобы система (1) квазилинейных уравнений первого порядка с дифференциальными операторами (2), (3) принадлежала классу $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$ ковариантных систем уравнений для векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и набора $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$ скалярных полей, необходимо и достаточно, чтобы составляющие ее уравнения представлялись равенствами (13) и (14) с непрерывными коэффициентными функциями от $\eta \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ и $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}; s = 1, \dots, N \rangle \in \mathbb{R}^N$.

4. Системы дивергентных уравнений класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3; 1, N)$. Рассмотрим системы (1) квазилинейных уравнений первого порядка с операторами (4), (5), которые имеют дивергентный тип и которые принадлежат классу $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$ систем ковариантных уравнений для векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ на $\mathbb{R}^3$ и набора $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$ скалярных полей. На основании (9) и (12), каждая такая система должна иметь следующий вид

$$\dot{u}_j = \nabla_j h_1 + \nabla_k (h_2 u_j u_k) + u_j H, \quad j \in \{1, 2, 3\}; \quad \dot{\rho}^{(s)} = \nabla_k (u_k S^{(s)}) + H^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N, \quad (15)$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями h_m , $m \in \{1, 2\}$, $S^{(s)}$, H , $H^{(s)}$, которые зависят от $\eta \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ и $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}; s = 1, \dots, N \rangle \in \mathbb{R}^N$.

На основе формул (6), для коэффициентов $a_{jk;l}$, $b_{jk}^{(s)}$ в случае, если система уравнений (1) имеет дивергентный тип, находим

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{jk} = & 2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta}(\mathbf{u}, \nabla_j \mathbf{u}) + 2u_j \frac{\partial h_2}{\partial \eta}(\mathbf{u}, (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}) + h_2[(\mathbf{u}, \nabla)u_j + u_j(\nabla, \mathbf{u})] + \\ & + \sum_s \left(\frac{\partial h_1}{\partial \rho^{(s)}} \nabla_j \rho^{(s)} + u_j \frac{\partial h_2}{\partial \rho^{(s)}}(\mathbf{u}, \nabla) \rho^{(s)} \right). \end{aligned}$$

Сравнение этого разложения с (13) дает следующие связи между коэффициентами

$$2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} = f_1, \quad 2 \frac{\partial h_2}{\partial \eta} = f_4, \quad h_2 = f_2 = f_3, \quad \frac{\partial h_1}{\partial \rho^{(s)}} = g_1^{(s)}, \quad \frac{\partial h_2}{\partial \rho^{(s)}} = g_2^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Аналогично, исходя из формул (7), в случае дивергентности системы (1), находим

$$\nabla_k S_k^{(s)} = 2 \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \eta}(\mathbf{u}, (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}) + S^{(s)}(\nabla, \mathbf{u}) + \sum_{s'} \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}}(\mathbf{u}, \nabla) \rho^{(s')}, \quad s = 1, \dots, N.$$

Сравнение с (14) дает связи между коэффициентами

$$2 \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \eta} = f_2^{(s)}, \quad S^{(s)} = f_1^{(s)}, \quad \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}} = g^{(s,s')}, \quad s, s' = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Совместность выражений для f_m , $m \in \{1, 2, 3, 4\}$; $f_n^{(s)}$, $g_n^{(s)}$ $n \in \{1, 2\}$ и $g^{(s,s')}$, $s, s' = 1, \dots, N$, получающихся из формул (16), (17), является критерием того, что система уравнений (1) с операторами (2), (3) является системой дивергентного типа.

5. Гиперболические системы квазилинейных уравнений. Обратимся к понятию гиперболической системы квазилинейных уравнений (см. [7, 9]). Сопоставим системе (1) с операторами (2), (3) систему линеаризованных уравнений, которым подчиняется пара $\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$, состоящая из векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \langle v_j(\mathbf{x}, t); j = 1, 2, 3 \rangle$ и набора $\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_s(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$ при фиксации пары $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$:

$$\dot{v}_j = a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k v_l + \sum_s b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k \sigma_s + \frac{\partial H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial u_l} v_l + \sum_s \frac{\partial H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial \rho^{(s)}} \sigma_s, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (18)$$

$$\dot{\sigma}_s = a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k v_l + \sum_{s'} b_k^{(s,s')} \nabla_k \sigma_{s'} + \frac{\partial H^{(s)}}{\partial u_l} v_l + \sum_{s'} \frac{\partial H^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}} \sigma_{s'}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Определение 1. Система уравнений (1) с операторами (2), (3) называется гиперболической в области $\{ \langle \mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle \in \Omega : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \}$, где $\mathbf{q} = \langle q_j; j \in \{1, 2, 3\} \rangle \in \mathbb{R}^3$, если в соответствующей ей линеаризованной системе уравнений (18), (19) $((N+3) \times (N+3))$ -матрица $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, которая определяется следующей блочной структурой

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \begin{pmatrix} T_{jl} & A_j^{(s')} \\ B_l^{(s)} & T^{(s,s')} \end{pmatrix}, \quad j, l \in \{1, 2, 3\}; \quad s, s' \in \{1, \dots, N\} \quad (20)$$

с блоками в виде (3×3) -матрицы $T_{jl} = q_k a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $(N \times N)$ -матрицы $T^{(s,s')} = q_k b_k^{(s,s')}$ и прямоугольными блоками: $(3 \times N)$ -матрицей $A_j^{(s')} = q_k b_{jk}^{(s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ и $(N \times 3)$ -матрицей $B_l^{(s)} = q_k a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ является диагонализуемой и все ее собственные числа $\omega^{(m)} \equiv \omega^{(m)}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})$, $m = 1, \dots, N+3$, вещественны. Система уравнений (1) называется гиперболической, если $\Omega = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N$.

Таким образом, условие гиперболичности уравнения (1) состоит в вещественности корней $\omega^{(m)}$, $m = 1, \dots, N+3$, уравнения

$$\det(\omega \mathcal{I} - \mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})) = 0 \quad (21)$$

относительно ω .

Так как все матричные элементы матрицы $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$ линейны по $\mathbf{q}$, то при любом вещественном $\mu \neq 0$ и $\langle \mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho \rangle \in \Omega$, для решений ω уравнения (21) имеет место

$$\det(\omega\mu\mathcal{I} - \mathcal{T}(\mu\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)) = \mu^{N+3} \det(\omega\mathcal{I} - \mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)) = 0,$$

т.е. $\omega\mu$ является вещественным собственным числом для матрицы $\mathcal{T}(\mu\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Область гиперболичности системы уравнений (13), (14) инвариантна относительно умножения вектора $\mathbf{q}$ на любое число $\mu \in \mathbb{R}$. В частности, эта область является центрально-симметричной в пространстве $\mathbb{R}^3$ векторов $\mathbf{q}$.

Следствие 1. Для того чтобы система (13), (14) была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная, открытая, сколь угодно малая, центрально-симметричная область в пространстве векторов $\mathbf{q}$, в которой матрица $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$ диагонализирована и все ее собственные числа вещественны.

6. Гиперболичность систем класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$. Для определения условий гиперболичности системы уравнений (13), (14) определим соответствующую этой системе матрицу $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$ (20) в терминах коэффициентных функций.

Используя (10), находим матричные элементы $T_{jl}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho) = q_k a_{jk;l}(\mathbf{u})$:

$$T_{jl}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho) = f_1 q_j u_l + f_2 u_j q_l + f_3 \delta_{jl} \xi + f_4 \xi u_j u_l, \quad (22)$$

где введено обозначение $\xi = \langle \mathbf{q}, \mathbf{u} \rangle$. Так как $b_k = u_k g^{(s,s')}$, то $T^{(s,s')} = \xi g^{(s,s')}$ и, исходя из (11), остальные матричные блоки определяются формулами

$$A_j^{(s')} = g_1^{(s')} q_j + g_2^{(s')} \xi u_j, \quad B_l^{(s)} = q_l f_1^{(s)} + \xi u_l f_2^{(s)} \quad (23)$$

На основе формул (22), (23) вычислим собственные числа матрицы. Собственные векторы будем разбивать на пары $\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$, согласно разбиению матрицы $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$ на блоки.

Существует исключительный собственный вектор $\langle [\mathbf{q}, \mathbf{u}], 0 \rangle$ с собственным числом нуль, так как $(\mathbf{q}, [\mathbf{q}, \mathbf{u}]) = (\mathbf{u}, [\mathbf{q}, \mathbf{u}]) = 0$, и поэтому $B_l^{(s)}[\mathbf{q}, \mathbf{u}]_l = 0$, $s = 1, \dots, N$; $T_{jl}[\mathbf{q}, \mathbf{u}]_l = 0$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Покажем, что пространство, ортогональное этому собственному вектору, инвариантно относительно действия матрицы $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$. Для того чтобы вектор был ортогонален $\langle [\mathbf{q}, \mathbf{u}], 0 \rangle$ необходимо и достаточно, чтобы его первая компонента $\mathbf{v}$ была ортогональна $[\mathbf{q}, \mathbf{u}]$. Векторы $\mathbf{v}$, ортогональные $[\mathbf{q}, \mathbf{u}]$, представимы в виде $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{u}$ с некоторыми коэффициентами α и β . Тогда, действуя матрицей $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$ на пары из $\mathbb{R}^{N+3}$ с первой компонентой в виде $v_j = \alpha q_j + \beta u_j$, находим, на основании (22),

$$\begin{aligned} T_{jl} \cdot (\alpha q_l + \beta u_l) &= (f_1 q_j u_l + f_2 u_j q_l + f_3 \delta_{jl} \xi + f_4 \xi u_j u_l)(\alpha q_l + \beta u_l) = \\ &= q_j [f_1 u_l (\alpha q_l + \beta u_l) + \xi f_3 \alpha] + u_j [(f_2 q_l + \xi f_4 u_l)(\alpha q_l + \beta u_l) + \xi f_3 \beta] \equiv T^{(1)} q_j + T^{(2)} u_j, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$T^{(1)} = \alpha \xi (f_1 + f_3) + \beta f_1 u^2, \quad T^{(2)} = \alpha (f_2 q^2 + f_4 \xi^2) + \beta \xi (f_2 + f_3 + f_4 u^2). \quad (25)$$

Кроме того, так как, согласно (23),

$$\sum_{s'} A_j^{(s')} \sigma_{s'} = q_j \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'} + u_j \xi \sum_{s'} g_2^{(s')} \sigma_{s'},$$

то отсюда следует, что подпространство в $\mathbb{R}^{N+3}$, состоящее из пар $\langle \mathbf{v} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$, инвариантно относительно действия матрицы $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$. В связи с этим, все собственные векторы матрицы $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho)$ достаточно находить в подпространстве пар $\langle \mathbf{v} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ размерности $N + 2$. Сформулируем задачу соответствующую задаче определения собственных векторов и собственных чисел в этом подпространстве. Так как

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \rho) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{jl} & A_j^{(s')} \\ B_l^{(s)} & T^{(s,s')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_l \\ \sigma_{s'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{jl} & A_j^{(s')} \\ B_l^{(s)} & T^{(s,s')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha q_l + \beta u_l \\ \sigma_{s'} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \alpha q_j + \beta u_j \\ \sigma_s \end{pmatrix},$$

то, на основании (24),

$$\omega\alpha q_j + \omega\beta u_j = \left(T^{(1)} + \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'}\right) q_j + \left(T^{(2)} + \xi \sum_{s'} g_2^{(s')} \sigma_{s'}\right) u_j.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при q_j и u_j в обеих частях первого равенства и используя (25), находим

$$\begin{aligned}\omega\alpha &= T^{(1)} + \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'} = \xi(f_1 + f_3)\alpha + f_1 u^2 \beta + \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'}, \\ \omega\beta &= T^{(2)} + \xi \sum_{s'} g_2^{(s')} \sigma_{s'} = (f_2 q^2 + f_4 \xi^2)\alpha + \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2)\beta + \xi \sum_{s'} g_2^{(s')} \sigma_{s'}.\end{aligned}$$

Добавим к этим уравнениям, уравнение для компонент σ_s , $s = 1, \dots, N$,

$$\omega\sigma_s = B_l^{(s)}(\alpha q_l + \beta u_l) + \xi \sum_{s'} g^{(s,s')} \sigma_{s'} = (q^2 f_1^{(s)} + \xi^2 f_2^{(s)})\alpha + \xi(f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)})\beta + \xi \sum_{s'} g^{(s,s')} \sigma_{s'}.$$

Из этих трех равенств получается уравнение, определяющее компоненты собственных векторов $\langle \alpha, \beta, \sigma \rangle$,

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma_{s'} \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|c} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 & g_1^{(s')} \\ f_2 q^2 + f_4 \xi^2 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & \xi g_2^{(s')} \\ \hline q^2 f_1^{(s)} + \xi^2 f_2^{(s)} & \xi(f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)}) & \xi g^{(s,s')} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma_{s'} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma_s \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где произведено разбиение матрицы $\mathcal{R}$ на блоки, согласно разбиению собственных векторов на компоненты.

Рассмотрим сначала случай $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0$, т.е. случай, когда векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{q}$ перпендикулярны. Тогда матрица $\mathcal{R}$ в (26) принимает вид

$$\mathcal{R}_0 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & f_1 u^2 & g_1^{(s')} \\ f_2 q^2 & 0 & 0 \\ \hline q^2 f_1^{(s)} & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (27)$$

Очевидным образом, для диагонализруемости матрицы (27) должны выполняться неравенства

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0, \quad f_1^2 + \sum_s (g_1^{(s)})^2 \neq 0,$$

так как в противном случае матрица $\mathcal{R}_0$ нильпотентна. Предполагая эти условия выполненными, составим систему уравнений для собственных векторов $\langle \alpha, \beta, \sigma_s \rangle$:

$$f_1 u^2 \beta + \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'} = \omega\alpha, \quad f_2 q^2 \alpha = \omega\beta, \quad f_1^{(s)} q^2 \alpha = \omega\sigma_s.$$

Рассмотрим случай $\omega = 0$. Тогда при

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0$$

обязательно либо $f_2 \neq 0$, либо $f_1^{(s)} \neq 0$ при каком-нибудь $s = 1, \dots, N$ и поэтому из 2-го и 3-го уравнений следует, что $\alpha = 0$. Кроме того, в этом случае из первого уравнения следует при

$$f_1^2 + \sum_{s'} (g_1^{(s')})^2 \neq 0,$$

что имеется подпространство векторов $\langle 0, \beta, \sigma_s \rangle$ размерности N , которые являются собственными с нулевым собственным значением. Таким образом, может иметься не более двух собственных векторов с ненулевыми собственными числами.

Для $\omega \neq 0$ из 2-го и 3-го уравнений и условия

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0$$

следует, что $\alpha \neq 0$. Умножая первое уравнение на ω и подставляя выражения для $\omega\beta$ и $\omega\sigma_s$ из 2-го и 3-го уравнений, находим при $\alpha \neq 0$

$$f_1 f_2 u^2 q^2 + \sum_s g_1^{(s)} f_1^{(s)} q^2 = \omega^2.$$

Тогда необходимым и достаточным условием гиперболичности является неравенство

$$f_1 f_2 u^2 + \sum_s g_1^{(s)} f_1^{(s)} > 0. \quad (28)$$

Его достаточность следует из того, что $\text{Sp } \mathcal{R}_0 = 0$, а так как след равен сумме собственных чисел, то должно быть два ненулевых собственных числа ω и $-\omega$. Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. Если $(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = 0$, то для гиперболичности системы квазилинейных уравнений (13) и (14) с дифференциальными операторами первого порядка из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$ необходимо и достаточно, чтобы для коэффициентов этой системы выполнялись условия

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0, \quad f_1^2 + \sum_s (g_1^{(s)})^2 \neq 0$$

и неравенство (28).

Замечание 1. Так как гиперболичность системы уравнений (13), (14), согласно определению 1, подразумевает диагонализруемость матрицы $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ и вещественность ее собственных чисел при любых значениях вектора $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, то условия теоремы 3 являются необходимыми для ее гиперболичности в общем случае при отказе от условия $(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ — малые положительные числа. Зафиксируем угол $(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{u}})$, близкий к $\pi/2$ так, чтобы $\cos(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{u}}) = \varepsilon$. Рассмотрим конечную, открытую, центрально-симметричную область $\Omega(\varepsilon, \delta)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ векторов $\mathbf{q}$, для которой $|\mathbf{q}| \leq \delta$ и $\cos(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{u}}) \geq \varepsilon$.

Лемма 1. Необходимым и достаточным условием гиперболичности системы (13), (14) в области $\Omega(\varepsilon, \delta)$ при достаточно малом δ является диагонализруемость $((N+1) \times (N+1))$ -матрицы

$$\mathcal{R}_g \equiv \left(\begin{array}{cc|c} f_2 + f_3 + f_4 u^2 & & g_2^{(s')} \\ \hline f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)} & & g^{(s,s')} \end{array} \right) \quad (29)$$

и вещественность всех ее собственных чисел.

Доказательство. Для доказательства достаточно пренебречь в матричных элементах матрицы $\mathcal{R}$ слагаемыми, пропорциональными q^2 , $\mathcal{R} = \mathcal{R}' + O(q^2)$, учитывая при этом, что $\xi = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{q}| \cos(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{u}})$. В результате получаем матрицу $\mathcal{R}'$ в виде

$$\mathcal{R}' = \left(\begin{array}{cc|c} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 & g_1^{(s')} \\ \hline 0 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & \xi g_2^{(s')} \\ \hline 0 & \xi(f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)}) & \xi g^{(s,s')} \end{array} \right).$$

Тогда уравнение, определяющее собственные числа $\omega = \xi\lambda$ этой матрицы, принимает вид

$$\det(\mathcal{R}' - \omega\mathcal{I}) = \det \left(\begin{array}{c|c} \xi[(f_1 + f_3) - \lambda] & f_1 u^2 g_1^{(1)} \dots g_1^{(N)} \\ \hline 0 & \xi(\mathcal{R}_g - \lambda\mathcal{I}) \end{array} \right) = \xi^{N+1}[(f_1 + f_3) - \lambda] \det(\mathcal{R}_g - \lambda\mathcal{I}) = 0,$$

где произведено раскрытие определителя матрицы $\mathcal{R}' - \omega\mathcal{I}$ по первому столбцу. Собственные векторы матрицы $\mathcal{R}'$, соответствующие собственным числам — решениям строятся в виде $\langle v, \mathbf{0} \rangle$ и $\langle 0, \boldsymbol{\sigma} \rangle$. $\square$

Теперь мы в состоянии доказать утверждение, которое является основным результатом настоящей работы.

Теорема 4. *Для того чтобы система квазилинейных уравнений (13), (14) с дифференциальными операторами первого порядка из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$ была гиперболической, необходимо и достаточно выполнение для коэффициентов этой системы следующей совокупности условий:*

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0; \quad (30)$$

$$f_1^2 + \sum_s (g_1^{(s)})^2 \neq 0; \quad (31)$$

$$f_1 f_2 u^2 + \sum_s g_1^{(s)} f_1^{(s)} > 0; \quad (32)$$

а также диагонализруемость $((N+1) \times (N+1))$ -матрицы $\mathcal{R}_g$ (29) и вещественность всех ее собственных чисел.

Доказательство. Необходимость выполнения условий теоремы следует из теоремы 3 и леммы 1. Достаточность устанавливаем следующим образом.

Для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$, согласно лемме 1, найдется такая область $\Omega(\varepsilon, \delta)$, для векторов $\mathbf{q}$ которой система (13), (14) гиперболична. Тогда для любого $\mu > 0$ в области $\mu\Omega(\varepsilon, \delta)$ также имеет место гиперболичность этой системы и, следовательно, система (13), (14) гиперболическая в любой области

$$\bigcup_{\mu>0} \mu\Omega(\varepsilon, \delta),$$

которая уже не зависит от δ . Следовательно, она является гиперболической в области

$$\bigcup_{\varepsilon>0} \bigcup_{\mu>0} \mu\Omega(\varepsilon, \delta) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{q} : (\mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0\}.$$

Наконец, на основании условий теоремы, применяя теорему 3, добавим в эту область гиперплоскость $\{\mathbf{q} : (\mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0\}$. $\square$

Замечание 2. Смысл утверждения теоремы состоит в том, что она сводит задачу о диагонализруемости матрицы $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ и вещественности ее собственных чисел к аналогичной задаче для матрицы $\mathcal{R}_g$, которая не зависит от векторов $\mathbf{q}$ и ее свойства есть отражение свойств только коэффициентов системы уравнений (13), (14).

Следствие 2. *Система квазилинейных дифференциальных уравнений (13), (14) при $N = 1$ является гиперболической в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

- (i) $f_2^2 + (f_1^{(1)})^2 \neq 0$;
- (ii) $f_1^2 + (g_1^{(1)})^2 \neq 0$;
- (iii) $f_1 f_2 u^2 + g_1^{(1)} f_1^{(1)} > 0$ и либо
- (iv) $(f_2 + f_3 + u^2 f_4 - g)^2 + 4g_1^{(1)}(f_1^{(1)} + u^2 f_2^{(1)}) > 0$, либо
- (v) $g_2^{(1)} = f_1^{(1)} + u^2 f_2^{(1)} = 0$, $g = f_2 + f_3 + u^2 f_4$.

Доказательство. (3×3) -Матрица $\mathcal{R}$ при $N = 1$ принимает вид

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 & g_1^{(1)} \\ f_2 q^2 + f_4 \xi^2 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & \xi g_2^{(1)} \\ q^2 f_1^{(1)} + \xi^2 f_2^{(1)} & \xi(f_1^{(1)} + u^2 f_2^{(1)}) & \xi g \end{pmatrix}, \quad g^{(1,1)} \equiv g.$$

Условия (i)–(iii) приводят к неравенствам, приведенным в формулировке следствия. Соответствующая (2×2) -матрица

$$\mathcal{R}_g = \begin{pmatrix} \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & \xi g_2^{(1)} \\ \xi(f_1^{(1)} + u^2 f_2^{(1)}) & \xi g \end{pmatrix}$$

диагонализируема в том случае, если ее дискриминант $D_g = (\text{Sp } \mathcal{R}_g)^2 - 4 \det \mathcal{R}_g \neq 0$. При этом собственные числа вещественны, если $D_g > 0$. Откуда следует при $\xi \neq 0$ условие (iv). Наконец, если $D_g = 0$, то диагонализировать (2×2) -матрицу имеет место только в случае кратности ее единичной матрице, что дает при $\xi \neq 0$ условие (v). $\square$

Следствие 3. Если совокупность коэффициентов $g_1^{(s)}, g_2^{(s)}, s = 1, \dots, N$, либо совокупность коэффициентов $f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, s = 1, \dots, N$, равны нулю, то система (13), (14) гиперболическая в том и только в том случае, если $f_1 f_2 > 0$, а матрица $g^{(s,s')}$ диагонализируема и все ее собственные числа вещественны.

Доказательство. При $g_1^{(s)} = 0, g_2^{(s)} = 0, s = 1, \dots, N$, матрица $\mathcal{R}$ принимает вид

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{cc|c} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 & 0 \\ f_2 q^2 + f_4 \xi^2 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & 0 \\ \hline q^2 f_1^{(s)} + \xi^2 f_2^{(s)} & \xi(f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)}) & \xi g^{(s,s')} \end{array} \right).$$

Ее собственные числа ω определяются уравнением

$$\det(\mathcal{R} - \omega \mathcal{I}) = \det(g^{(s,s')} - \omega \mathcal{I}) \cdot \det(\bar{\mathcal{R}} - \omega \mathcal{I}),$$

где

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 \\ f_2 q^2 + f_4 \xi^2 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) \end{pmatrix}.$$

Аналогичная ситуация имеет место в случае $f_1^{(s)} = f_2^{(s)}, s = 1, \dots, N$. Для того, чтобы все решения уравнения соответствовали вещественным собственным числам, необходимо и достаточно, чтобы таким свойством обладали решения уравнений

$$\det(g^{(s,s')} - \omega \mathcal{I}) = 0, \quad \det(\bar{\mathcal{R}} - \omega \mathcal{I}) = 0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно ω . Вещественность его решений имеет место тогда и только тогда, когда его дискриминант $\bar{D} = (\text{Sp } \bar{\mathcal{R}})^2 - 4 \det \bar{\mathcal{R}}$ неотрицателен. Вычисление дискриминанта дает неравенство

$$\bar{D} = \xi^2(f_2 + f_1 + u^2 f_4)^2 + 4[\mathbf{u}, \mathbf{q}]^2 f_1 f_2 \geq 0,$$

где квадратная скобка означает векторное произведение заключенных в нее векторов. Для того чтобы оно выполнялось для любых векторов $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы $f_1 f_2 \geq 0$.

Наконец, допустим что $f_1 = 0$. Тогда матрица $\bar{\mathcal{R}}$ идемпотентна при $\xi = 0$. Аналогичная ситуация имеет место при $f_2 = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае необходимым и достаточным условием гиперболичности является неравенство $f_1 f_2 > 0$. $\square$

7. Гиперболичность систем дивергентного типа из класса $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$. Опишем класс систем (15) гиперболических ковариантных уравнений дивергентного типа. Это описание получается как следствие из теоремы 4 при учете формул (16), (17) и представляет собой список ограничений на функции h_1 , h_2 , $S^{(s)}$, которые следуют из списка условий в формулировке теоремы 4. Из (30) следует, что

$$h_2^2 + \sum_s (S^{(s)})^2 \neq 0,$$

Ограничение (31) означает, что функция h_1 не должна быть постоянной. Из (32) следует неравенство

$$2u^2 h_2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \sum_s S^{(s)} \frac{\partial h_1}{\partial \rho^{(s)}} > 0.$$

Согласно (16), (17) $((N+1) \times (N+1))$ -матрица $\mathcal{R}_g$ (29) для системы уравнений дивергентного типа принимает вид

$$\mathcal{R}_g \equiv \left(\begin{array}{c|c} 2h_2 + 2u^2 \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \frac{\partial h_2}{\partial \rho^{(s')}} \\ \hline S^{(s)} + 2u^2 \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \eta} & \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}} \end{array} \right),$$

которая, согласно последнему условию теоремы, должна быть диагонализированной и все ее собственные числа должны быть вещественными.

8. Заключение. Задача, решению которой посвящена работа, является частным случаем общей проблемы, связанной с разработкой физически обоснованных математических методов конструирования адекватных эволюционных уравнений для описания эволюции макроскопических состояний конденсированных сред. Такие уравнения должны удовлетворять фундаментальным, с физической точки зрения, принципам симметрии относительно пространственных и временных трансляций и относительно вращений пространства погружения среды.

В настоящей работе дан ответ на вопрос, как должна выглядеть система эволюционных уравнений в том случае, когда полное описание макроскопического состояния среды осуществляется посредством полярного векторного поля и некоторого набора скалярных (термодинамических) параметров, но при этом не учитывается влияние на эволюцию физических диссипативных процессов в среде. Именно на этом пути эволюция каждой среды описывается квазилинейными системами гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка, которые являются трансляционно инвариантными и ковариантными относительно вращений пространства.

С целью развития этого направления в теории систем дифференциальных уравнений в частных производных необходимо решить задачи, аналогичные той, которая рассмотрена в настоящей работе для произвольного набора векторных и скалярных полей. В частности, важно описать класс возможных гиперболических ковариантных систем уравнений с аксиальным векторным полем вместе с набором скалярных полей. При этом, по-видимому, необходимые и достаточные условия гиперболичности ковариантных систем должны формулироваться таким же образом, как это сделано в настоящей работе. Как легко заметить, смысл теоремы 4 состоит в том, что условиях гиперболичности, даваемых ее формулировкой, не содержится произвольного вектора («волнового») q .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики // Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 170. — С. 15–30.
2. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Математические задачи конструирования эволюционных уравнений динамики конденсированных сред // Мат. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 25–29 июня 2018 г.). — Уфа, 2018. — С. 262–264.

3. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения// Мат. V Междунар. науч. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 4–7 декабря 2018 г.). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. — С. 59.
4. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Мат. IV Всеросс. науч.-практ. конф. «Современные проблемы физико-математических наук» (Орёл, 22–25 ноября 2018 г.). — Орёл, 2018. — С. 83–86.
5. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Ковариантные дифференциальные операторы первого порядка// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 187. — С. 19–30.
6. *Вирченко Ю. П., Новосельцева А. Э.* Гиперболические уравнения первого порядка в $\mathbb{R}^3$ // Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.). — Воронеж, 2021. — С. 81.
7. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
8. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
9. *Рожdestвенский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
10. *Spencer A. G. M.* Theory of invariants// in: Continuum Physics, I. Part III (*Eringen A. C.*, ed.). — New York: Academic Press, 1971. — P. 239–353.
11. *Virchenko Yu. P., Subbotin A. V.* The class of evolutionary ferrodynamic equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — 44. — P. 11913–11922.

Вирченко Юрий Петрович

Белгородский государственный университет

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Новосельцева Алина Эдуардовна

Белгородский государственный технологический университет

E-mail: novoseltseva@gmail.com