



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 42–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-42-52

УДК 519.1

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ РЕСУРСНОЙ СЕТИ

© 2022 г. В. А. СКОРОХОДОВ, Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, С. Ч. МУРТУЗАЛИЕВА

Аннотация. В работе изучается модель распределения ресурсного потока в ресурсной сети. Основной задачей является разработка методов нахождения начального состояния (распределения) ресурса в ресурсной сети, если известно состояние в некоторый момент дискретного времени. Существенной особенностью является существенная нелинейность процесса перераспределения ресурса в таких сетях. Показано, что задача нахождения начального состояния разрешима, предложены подходы к уточнению решения и нахождения начального состояния ресурсной сети в случаях больших и малых ресурсов.

Ключевые слова: динамическая сеть, эргодическая ресурсная сеть, ресурсный поток, распределение потока, пороговое значение, начальное состояние ресурсной сети.

THE PROBLEM OF FINDING THE INITIAL STATE OF A RESOURCE NETWORK

© 2022 V. A. SKOROKHODOV, Ya. M. ERUSALIMSKY, S. Ch. MURTUZALIEVA

ABSTRACT. In this paper, we study distributions of resource flows in resource networks. The main problem is to develop methods for finding the initial state (distribution) of resources in a resource network if the state is known at some moment of discrete time. An essential feature is the significant nonlinearity of the resource redistribution process in such networks. We prove that the problem of finding the initial state is solvable and propose approaches for refining the solution and finding the initial state of the resource network in the cases of large and small resources.

Keywords and phrases: dynamic network, ergodic resource network, resource flow, flow distribution, threshold value, initial state of the resource network.

AMS Subject Classification: 05C21, 05C50, 90B10

1. Введение. Ресурсные сети являются потоковой моделью, предложенной в работах О. П. Кузнецова и Л. Ю. Жиликовой (см., например, [3–6, 11]). Ресурсная сеть — это связный ориентированный граф, для каждой дуги которого указана пропускная способность, а для каждой вершины — количество ресурса в этой вершине. В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по некоторым правилам с учётом пропорциональности пропускным способностям дуг, выходящих из соответствующей вершины. При этом, правила функционирования сети удовлетворяют двум условиям. Первое условие (условие замкнутости сети): ресурс ни в какой вершине сети не добавляется извне и не исчезает. Второе условие (условие неразрывности): ресурс, выходящий из вершины, вычитается, а входящий в вершину, прибавляется к ресурсу данной вершины. Таким образом, между каждыми последовательными моментами времени по дугам сети проходит поток.

Поскольку ресурс перераспределяется между вершинами сети в некоторой пропорции, то задача нахождения предельного распределения ресурса в сети схожа как с задачей поиска сбалансированного потока, рассмотренной в статье [13], так и с задачами о распределении потока, рассмотренными в статье [18].

В [7, 8, 10, 12, 14–16] исследованы динамические периодические сети. В [10] показано, что такие сети схожи с графами с нестандартной достижимостью (см. [2, 17]) и предложен подход для решения задач о потоках в таких сетях.

Для ресурсных сетей хорошо изучен вопрос нахождения следующих по времени состояний, а также и предельного состояния, если оно существует для заданного начального распределения ресурса. Настоящая работа посвящена разработке методов восстановления «истории» перераспределения ресурса в сети, до начального состояния включительно. Для произвольной ресурсной сети мы считаем известным её состояние (распределение ресурса между вершинами) в некоторый момент времени $t_0 > 0$. Поскольку все пропускные способности сети известны, то, применяя классические методы теории ресурсных сетей, можно находить все последующие состояния, однако нахождение предшествующих состояний оказалось достаточно трудной задачей из-за в общем случае существенной нелинейности процесса перераспределения ресурса в сети.

В зависимости от количества общего ресурса в сети, рассмотрены два различных способа восстановления начального состояния. В первую очередь, исследован случай распределения сверхмалого ресурса в ресурсной сети. Сверхмалым называется ресурс, суммарная величина которого не превышает суммы пропускных способностей дуг для каждой вершины ресурсной сети. В этом случае распределение ресурса полностью определяется стохастической матрицей, а распределение ресурса является линейным. Показано, что для сверхмалого ресурса поиск исходного состояния сети можно представить как матричное уравнение. В зависимости от ранга исходной стохастической матрицы, были предложены различные способы решения.

В случае, когда ресурс не является сверхмалым, показано, что необходима дополнительная информация для однозначного определения начального состояния. Предложен подход нахождения точного начального состояния сети, основанный на установке «датчиков» в вершинах ресурсной сети, которые дают дополнительную информацию о ресурсных потоках. Доказаны теоремы о минимальном количестве таких датчиков и вершинах, а также предложен метод нахождения вершин, в которых их нужно установить для однозначного определения начального состояния сети.

2. Основные понятия. Приведем основные понятия, определения и утверждения, необходимые для дальнейшего изложения (см. [2–9, 11]).

Определение 1. Ресурсной сетью называется связный ориентированный граф $G(X, U, f)$ такой, что с каждой дугой u такой сети связана величина её пропускной способности r_u , а с каждой вершиной x_i — величина $q_i(t)$, которая называется количеством ресурса в вершине x_i в момент времени $t \in \mathbb{Z}_+$. Вектор $\mathbf{Q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ называется состоянием сети G в момент t .

Правила функционирования ресурсной сети определяются следующим образом: для каждого $i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{u \in [x_i]^+} F(u, t) + \sum_{u \in [x_i]^-} F(u, t), \quad (1)$$

где $F(u, t)$ — величина ресурсного потока, выходящего по дуге $u = (x_i, y_j)$ в момент времени t , определяется следующим образом:

$$F(u, t) = \begin{cases} r_u, & q_i > \sum_{v \in [x_i]^+} r_v, \\ \frac{r_u}{\sum_{v \in [x_i]^+} r_v} \cdot q_i(t), & q_i \leq \sum_{v \in [x_i]^+} r_v; \end{cases} \quad (2)$$

при этом, здесь и далее $[x]^+$ — множество всех дуг, входящих в вершину x , а $[x]^-$ — множество всех дуг, выходящих из вершины x .

Правила функционирования сети (1) и (2) можно записать в сокращенной форме:

$$Q(t+1) = \mathcal{A}(Q(t)). \quad (3)$$

Здесь следует отметить, что оператор $\mathcal{A}$, вообще говоря, не является линейным. Оператор $\mathcal{A}$ является линейным только в том случае, если для каждого момента времени величина потока по каждой дуге определяется только нижней строчкой в (2).

Обозначим через R матрицу пропускных способностей дуг сети G ; при этом считаем, что

$$r_{ij} = \begin{cases} r_u, & \text{если } u \text{ — дуга из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j; \\ 0, & \text{если из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j \text{ не ведёт ни одной дуги,} \end{cases}$$

а через P — такую стохастическую матрицу сети G , что

$$p_{ij} = r_{ij} / \sum_{k=1}^n r_{ik}.$$

Также обозначим через W величину суммарного ресурса сети, т.е.

$$W = \sum_{i=1}^n q_i(0).$$

Определение 2. Состояние $Q(t)$ называется устойчивым, если $Q(t) = Q(t+1)$.

Согласно правилам перераспределения ресурса, если $Q(t)$ устойчиво, то для всех натуральных i имеет место равенство $Q(t) = Q(t+i)$.

Определение 3. Состояние $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ называется асимптотически достижимым из состояния $Q(0)$, если для каждого $i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такое t_ε , что для всех $t > t_\varepsilon$ имеет место неравенство $|q^* - q_i(t)| < \varepsilon$.

Определение 4. Состояние Q^* называется предельным, если оно либо устойчиво и существует такой момент времени t , что $Q^* = Q(t)$, либо оно асимптотически достижимо из состояния $Q(0)$.

Таким образом, зная начальное состояние $Q(0)$ сети G , можно находить любое из состояний $Q(t)$, а также предельное состояние и предельный поток в сети G (см. [4]).

3. Начальное состояние ресурсной сети. Пусть G — ресурсная сеть, для которой известно её состояние в некоторый момент времени t_0 . В этом случае для любого $k \in \mathbb{N}$ всегда можно найти вектор состояния $Q(t_0+k)$, а также предельное состояние, если оно существует. Рассмотрим задачу нахождения неизвестного начального состояния в этой сети.

Ясно, что рассматриваемая задача сводится к нахождению решения уравнения

$$\mathcal{A}(Q(t_0-1)) = Q(t_0) \quad (4)$$

с неизвестными элементами состояния $Q(t_0-1)$. Так как известное состояние $Q(t_0)$ получено из состояния $Q(t_0-1)$ по правилу (3), значит, решение уравнения (4) существует, однако, ввиду нелинейности оператора $\mathcal{A}$, может не быть единственным. Таким образом, необходимо дополнительно рассмотреть вопрос об уточнении решения $Q(t_0-1)$.

Далее рассмотрим отдельно два случая нахождения решения уравнения (4) для процесса распределения ресурса относительно величины суммарного ресурса в сети W : для сверхмалого ресурса $W \leq W_0$ и для $W > W_0$, где

$$W_0 = \min_{i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}} \left\{ \sum_{k=1}^n r_{ik} \right\}.$$

Приведем матрицу (8) к верхнетреугольному виду. Заметим, что в некоторых случаях при приведении к верхнетреугольному виду происходит перестановка столбцов, что приводит к перенумерации неизвестных, а соответственно и к перенумерации вершин исходной сети G . Введем перестановку φ , определяющую перенумерацию неизвестных при приведении матрицы к верхнетреугольному виду.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} & a_{(k+1)1} & \dots & a_{n1} & \mu_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{k2} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{n2} & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{(k+1)k} & \dots & a_{nk} & \mu_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{array} \right).$$

Поскольку система (7) совместна, все элементы $\mu_{k+1}, \dots, \mu_n$ равны нулю.

Для того чтобы однозначно определить состояние в качестве единственного решения системы (7), необходимо знать величины $q_{k+1}(t_0), \dots, q_n(t_0)$, а значит, в вершинах $x_{\varphi^{-1}(k+1)}, \dots, x_{\varphi^{-1}(n)}$ нужно установить датчики вида $\mathcal{N}$. После установки датчиков, состояние $Q(t_0 - 1)$ будет определено однозначно, а повторяя этот процесс t_0 раз, можно найти состояние $Q(0)$ для произвольной ресурсной сети с распределением сверхмалого ресурса.

Таким образом, показано, что для однозначного нахождения начального состояния в ресурсной сети в случае распределения сверхмалого ресурса, минимальное количество датчиков вида $\mathcal{N}$ равно $n - k = n - \text{rang}(\mathbf{P})$. $\square$

Замечание. Так как матрица P необратима, найти сразу вектор $Q(0)$, как это было описано для предыдущего случая, нельзя. Необходимо последовательно найти все состояния: $Q(t_0 - 1)$, затем $Q(t_0 - 2)$ и так далее до $Q(0)$.

Пример 1. Рассмотрим ресурсную сеть G на рис. 1 с ресурсом $W = 1$. Все пропускные способности дуг сети равны единице.

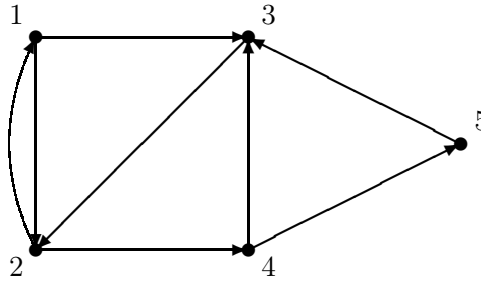


Рис. 1. Ресурсная сеть G со сверхмалым ресурсом

Матрицы R и P ресурсной сети G соответственно имеют вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Вначале выберем некоторое состояние ресурсной сети $Q(t_0 - 1) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,2)$ и найдём для него следующее состояние сети: $Q(t_0) = (0,1; 0,35; 0,25; 0,1; 0,1)$.

Теперь, считая состояние $Q(t_0 - 1)$ неизвестным, найдём его как решение системы вида (5). Положим $Q(t_0 - 1) = (y_1; y_2; y_3; y_4; y_5)$. Рассмотрим расширенную матрицу для уравнения вида (6), приведём её к верхнетреугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,35 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0,7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 & -0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Заметим, что $\text{rang}(\mathbf{P}) = 4$, следовательно, достаточно установить один датчик вида $\mathcal{N}$ в вершину x_5 . Выразив переменные y_1, y_2, y_3 и y_4 через независимую переменную y_5 , запишем общее решение:

$$\begin{cases} y_1 = 0,7 - 2 \cdot (0,1 + 0,5 \cdot (0,4 - y_5)); \\ y_2 = 0,2; \\ y_3 = 0,1 + 0,5 \cdot (0,4 - y_5) + 0,5 \cdot y_5; \\ y_4 = 0,4 - y_5. \end{cases}$$

Установив в вершину x_5 датчик вида $\mathcal{N}$, получим значение $y_5 = q_5(t_0 - 1) = 0,2$. Подставляя это значение в общее решение, получим вектор $Q(t_0 - 1) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,2)$, который совпадает с выбранным в начале исходным состоянием сети. $\square$

Следует отметить, что в некоторых случаях количество датчиков вида $\mathcal{N}$ может быть слишком большим и доходить до $n - 1$. Такую ситуацию можно показать следующим примером.

Пример 2. Рассмотрим полную ресурсную сеть G с петлёй в каждой вершине. Положим пропускные способности всех дуг, включая петли, равными единице. Матрицы R и P ресурсной сети G соответственно имеют вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы P равен единице. Таким образом, в данном случае для однозначного определения начального состояния ресурсной сети необходимо установить датчики вида $\mathcal{N}$ в четыре из пяти вершин. $\square$

5. Начальное состояние в сети с произвольным ресурсом. Рассмотрим ресурсную сеть G , между вершинами которой перераспределяется суммарной величины W . В данном разделе мы будем рассматривать случай

$$W > \min_{i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}} \left\{ \sum_{k=1}^n r_{ik} \right\},$$

который означает, что найдутся такие начальные состояния, что оператор $\mathcal{A}$ не является линейным. В силу нелинейности оператора $\mathcal{A}$ для поиска начального состояния $Q(0)$ нужно последовательно найти все состояния ресурсной сети: $Q(t_0 - 1), Q(t_0 - 2), \dots, Q(1)$.

Рассмотрим более подробно соотношение (1) для момента времени $t_0 - 1$: $\forall i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$

$$q_i(t_0) = q_i(t_0 - 1) - \sum_{u \in [x_i]^+} F(u, t_0 - 1) + \sum_{u \in [x_i]^+} F(u, t_0 - 1).$$

Отметим, что если найти все величины $F(u, t_0 - 1)$ потоков по дугам ресурсной сети в момент времени $t_0 - 1$, то можно однозначно восстановить и вектор $Q(t_0 - 1)$.

Определение 6. Будем говорить, что в вершине x_i установлен датчик вида $\mathcal{U}$, если нам известна полная информация о количествах ресурса в вершине x_i в каждый момент времени:

1. набор значений $(q_i(0), q_i(1), \dots, q_i(t_0), q_i(t_0 + 1), \dots)$;
2. для каждой дуги $u \in [x_i]^-$ набор значений $(F(u, 0), F(u, 1), \dots, F(u, t_0), \dots)$.

Другими словами, если установить датчик вида $\mathcal{U}$ в некоторую вершину x_i , то будет известна информация не только о количестве ресурса вершины x_i в каждый момент времени, но и количества ресурса, приходящие по каждой входящей в x_i дуге в каждый момент времени.

Рассмотрим задачу поиска минимального количества датчиков вида $\mathcal{U}$ и вершин, в которые их надо установить.

Рассмотрим схематично два соседних слоя временной развертки (см. [2]) сети на рис. 2. Здесь наклонные дуги соответствуют дугам исходной сети, а вертикальные — возможным переносам остатка ресурса между моментами времени. Таким образом, условие пропорциональности задано только для наклонных дуг.

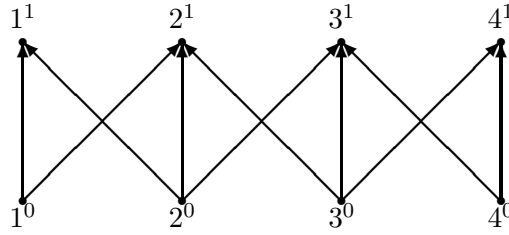


Рис. 2. Два слоя временной развёртки ресурсной сети (схема).

Поскольку перераспределение ресурса в соответствии с правилом (2) происходит пропорционально пропускным способностям выходящих из вершины дуг, следовательно, если известна информация о величине потока хотя бы для одной выходящей из вершины x дуге, то можно однозначно определить величины потоков по остальным дугам, выходящим из вершины x .

Рассмотрим алгоритм поиска множества вершин сети, в котором будут установлены датчики вида $\mathcal{U}$.

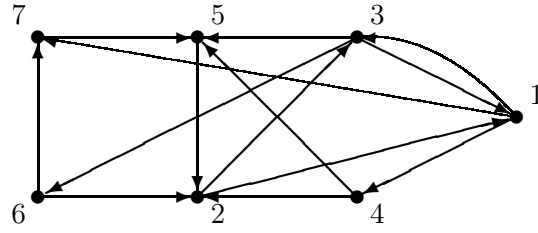
Алгоритм 1.

1. Построим матрицу смежности A графа G . Полагаем $S := \emptyset$.
2. Транспонируем матрицу $A := A^T$ и каждому диагональному элементу присвоим значение 1.
3. Если найдётся столбец ровно с одной единицей, то выбираем строку A_i , в которой находится данная единица. Вершину x_i добавляем к множеству $S := S \cup \{x_i\}$, и для всех значений $j \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$, если $a_{ij} = 1$, то обнуляем все элементы столбца A^j .
4. Если найдутся две ненулевых строки A_l и A_p , такие, что $a_{lk} \leq a_{pk} \forall k \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$, то обнуляем все элементы строки A_l .
5. Повторяем шаги 3 и 4 до тех пор, пока они производят изменения в матрице A .
6. Выбираем произвольную ненулевую строку A_q . Вершину x_q добавляем к множеству $S := S \cup \{x_i\}$, и для всех значений $j \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$, если $a_{qj} = 1$, то обнуляем все элементы столбца A^j .
7. Повторяем шаги 3, 4, 5 и 6 до тех пор, пока не обнулятся все элементы матрицы.

Итоговое множество S будет множеством вершин, в который нужно установить датчики вида $\mathcal{U}_k$, чтобы восстановить полностью матрицу потоков $F(t_0 - 1)$ в момент времени $t_0 - 1$.

Пример 3. Рассмотрим ресурсную сеть G на рис. 3. Матрица пропускных способностей R ресурсной сети G имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рис. 3. Ресурсная сеть G .

Выберем некоторое состояние ресурсной сети $Q(t_0 - 1) = (3; 5; 5; 2; 2; 2; 1)$ и найдём для него следующее состояние сети $Q(t_0) = (4; 4; 3; 5; 0,5; 4,5; 1; 2,5)$. Отметим, что поток в рассматриваемой сети не является сверхмалым.

Кроме этого, запишем матрицу потоков по дугам рассматриваемой ресурсной сети G в момент времени $t_0 - 1$:

$$F(t_0 - 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, считая состояние $Q(t_0 - 1)$ неизвестным и применяя алгоритм 1, найдём матрицу потоков, а затем из соотношения вида (1) и само состояние $Q(t_0 - 1)$.

Применим алгоритм 1 для нахождения множества вершин под установку датчиков вида $\mathcal{U}$. Положим $S = \emptyset$. Построим матрицу смежности рассматриваемой сети. Затем транспонируем ее, и каждому диагональному элементу присвоим единицу (матрица A_1^T).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_1^T нет столбцов с ровно одной единицей, тогда на шаге 4 обнулим элементы третьей строки, поскольку все элементы первой строки не меньше соответствующих элементов третьей строки. Результат приведен ниже (матрица B_1).

Далее, согласно шагу 6, добавим вершину 2 к множеству S , и обнулим все элементы столбцов с номерами 2, 4, 5 и 6. Результат приведен ниже (матрица B_2).

Следующим этапом, на шаге 6, добавим вершину 1 к множеству S , и обнулим все элементы столбцов с номерами 1 и 3. Результат приведен ниже (матрица B_3).

После этого, на шаге 4, обнулим строку с номером 5, а затем, на шаге 3, добавим вершину 7 к множеству S и, обнуляя оставшиеся элементы, получим нулевую матрицу.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате мы получили множество $S = \{1, 2, 7\}$.

Установим датчики вида $\mathcal{U}$ в найденных вершинах 1, 2 и 7. Так как нам известны количества ресурса в вершинах множества S , следовательно, из соотношения (2) получим величины потоков на дугах, выходящих из указанных вершин: $F(1, 3) = 0,5$, $F(1, 4) = 0,5$, $F(1, 7) = 2$, $F(2, 1) = 2$, $F(2, 3) = 2$ и $F(7, 5) = 1$. Кроме этого, нам известны величины потоков на дугах, входящих в вершины множества S : $F(3, 1) = 2$, $F(4, 2) = 0,5$, $F(5, 2) = 1$, $F(6, 2) = 1,5$ и $F(6, 7) = 0,5$. Последнее означает, что по свойству пропорциональности распределения потока в соотношении (2) можно получить величины потока по всем дугам, выходящим из вершин 3, 4, 5 и 6: $F(3, 5) = 1$, $F(3, 6) = 1$ и $F(4, 5) = 1,5$. Следовательно, нам известны величины потока по всем дугам сети G , тогда решая уравнения вида (1) получим вектор $Q(t_0) = (3; 5; 5; ; 2; 2; 1)$.

Теорема 2. Минимальное количество датчиков вида $\mathcal{U}$ для однозначного определения начального состояния ресурсной сети не превышает величины $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Доказательство. Установка датчика вида $\mathcal{U}$ в вершину ресурсной сети, в силу сильной связности сети дает нам полную информацию о всех исходящих потоках дуг как минимум еще одной вершины. Следовательно, последовательная установка каждого датчика (за исключением, быть может, последнего), приводит к тому, что нам становятся известны исходящие потоки как минимум двух вершин.

Таким образом, минимальное количество датчиков вида $\mathcal{U}$ не превышает величины $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. $\square$

Рассмотрим полную неоднородную ресурсную сеть G из примера 2. Показано, что такая сеть требует установки $n - 1$ датчика вида $\mathcal{N}$, однако установка единственного датчика вида $\mathcal{U}$ в произвольную вершину позволяет полностью восстановить матрицу потоков $F(t_0 - 1)$. Действительно, если установить датчик в произвольную вершину x_k , нам будут известны $F(x_1, x_k), \dots, F(n, k)$, причем, если $F(l, k) = 0$, то это означает, что в момент времени $t_0 - 1$ в вершине x_l находится нулевой ресурс, соответственно, все элементы $F(l, 1), \dots, F(l, n)$ также будут равны нулю. Таким образом, известны величины потоков для каждой дуги сети G . Подставив найденные значения в соотношение (1), можно найти состояние $Q(t_0 - 1)$.

Определение 7 (см. [1]). Пусть $G = (X, U, f)$ — ресурсная сеть. Множество $S \subseteq X$ называется внешне устойчивым, если для любой вершины $x \notin S$ имеет место $\Gamma(x) \cap S \neq \emptyset$.

Теорема 3. Минимальное количество датчиков вида $\mathcal{U}$ для однозначного определения начального состояния ресурсной сети G равно $\min_{S \in \mathcal{S}} \{|S|\}$, где $\mathcal{S}$ — множество всех внешнеустойчивых подмножеств множества вершин ресурсной сети G .

Доказательство. Пусть $G(X, U, f)$ — ресурсная сеть и пусть V — внешне устойчивое множество минимальной мощности для сети G , т.е.

$$|V| = \min_{S \in \mathcal{S}} \{|S|\}.$$

Поскольку по определению 7 для каждой вершины $x \notin V$ имеет место $\Gamma(x) \cap V \neq \emptyset$, значит, в сети G существует дуга, ведущая из вершины x в одну из вершин y множества V . Последнее означает, что если в вершине y будет установлен датчик вида $\mathcal{U}$, то можно восстановить все величины потоков, исходящие из вершины x . Таким образом, установив датчики вида $\mathcal{U}$ в вершины множества V , для известного состояния $Q(t)$ можно однозначно найти предыдущее состояние $Q(t - 1)$ для любого $t \in \mathbb{N}$.

Покажем теперь, что меньшего количества датчиков вида $\mathcal{U}$ в общем случае недостаточно. Предположим, что существует подмножество вершин $M \subset X$ такое, что установка датчиков вида $\mathcal{U}$ в вершинах множества M позволяет полностью восстановить матрицу потоков F , при этом

$$|M| < \min_{T \in \mathcal{T}} \{|T|\}.$$

Последнее неравенство также означает, что множество M не является внешне устойчивым. Следовательно, существует хотя бы одна вершина $x \in X \setminus M$ такая, что $\Gamma(x) \cap V = \emptyset$. Однако в таком

случае восстановить все величины исходящих из вершины x потоков, вообще говоря, не представляется возможным. Рассмотрим такую ситуацию для части временной развёртки ресурсной сети на рис. 4. Здесь на нижнем слое показаны копии двух вершин $x, y \notin M$, на верхнем слое показаны вершины, в которые ведут дуги из вершины x . Отметим, что все такие вершины не принадлежат множеству M . Кроме этого, наклонные дуги на рис. 4 соответствуют дугам исходной ресурсной сети, а вертикальные — соответствуют возможным переносам остатка ресурса в вершине между соседними моментами времени. Дуги, для которых известны величины потоков, на рис. 4 не показаны.

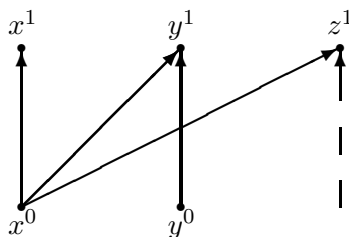


Рис. 4. Два слоя временной развёртки ресурсной сети (схема).

Если величины ресурса в вершинах y^1 и z^1 больше нуля, то однозначно восстановить потоки невозможно, поскольку для этих вершин нельзя однозначно сказать, какая часть пришедшего ресурса является переносом по вертикальной, а какая поступила из вершины x^0 . Последнее означает, что в этом случае необходима установка как минимум одного дополнительного датчика вида $\mathcal{U}$.

Следовательно, в общем случае однозначное восстановление матрицы потока F по подмножеству M означает, что каждая вершина множества $X \setminus M$ должна иметь хотя бы одну исходящую дугу в вершину множества M . Значит, согласно определению 7 множество M — внешне устойчивое подмножество для ресурсной сети G . Получили противоречие.

Таким образом, показали, что для однозначного определения начального состояния ресурсной сети требуется $\min_{S \in \mathcal{S}} \{|S|\}$ датчиков, расставленных в вершинах внешне устойчивого подмножества минимальной мощности. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берг К. Теория графов и её применения. — М.: ИЛ, 1962.
2. Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьмина М. В., Петросян А. Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный ун-т, 2009.
3. Жилиякова Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах// Автомат. телемех. — 2011. — № 4. — С. 133–143.
4. Жилиякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах// Управл. большими сист. — 2013. — № 43. — С. 34–54.
5. Жилиякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы// Управл. большими сист. — 2013. — № 45. — С. 6–29.
6. Кузнецов О. П., Жилиякова Л. Ю. Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель// Докл. РАН. — 2010. — 433, № 5. — С. 609–612.
7. Кузьмина М. В. Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2008. — № 5. — С. 16–20.
8. Скороходов В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2011. — № 1. — С. 21–26.
9. Скороходов В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети// Управл. большими сист. — 2016. — № 63. — С. 6–23.
10. Скороходов В. А., Абдулрахман Х. Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса// Вестн. Воронеж. ун-та. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 186–194.

11. *Kuznetsov O. P.* Nonsymmetric resource networks. The study of limit states// *Manag. Product. Eng. Rev.* — 2011. — 2, № 3. — P. 33–39.
12. *Aronson J. E.* A survey of dynamic network flows// *Ann. Oper. Res.* — 1989. — № 20. — P. 1–66.
13. *Erzin A. I., Takhonov I. I.* The problem of finding balanced flow *J. Appl. Industr. Math.* — 2005. — 8, № 3 (23). — P. 58–68.
14. *Fonoberova M., Lozovanu D.* The maximum flow in dynamic networks// *Comp. Sci. J. Moldova.* — 2004. — 12, № 3 (36). — P. 387–396.
15. *Fonoberova M., Lozovanu D.* The minimum cost multicommodity flow problem in dynamic networks and an algorithm for its solving// *Comp. Sci. J. Moldova.* — 2005. — 13 *, № 1 (37). — P. 29–36.
16. *Ford L. R., Fulkerson D. R.* Constructing maximal dynamic flows from static flows// *Oper. Res.* — 1958. — 6. — P. 419–433.
17. *Skorokhodov V. A.* Generalization of the reachability problem on directed graphs// 2020. — 8, № 6. — P. 699–704.
18. *Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S.* The maximum flow problem in a network with special conditions of flow distribution// *J. Appl. Industr. Math.* — 2015. — 9, № 435–446.

Скорыходов Владимир Александрович

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru

Ерусалимский Яков Михайлович

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Муртузалиева Софья Чамсыевна

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: murtuzalieva@sfedu.ru