



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 88–107
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-88-107

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ
С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ.
II. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Работа содержит вторую и третью части обзора по вопросам интегрируемости систем с пятью степенями свободы (первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 208. — С. 91–121). В первой части была подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. Во второй и третьей частях рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к пятимерной сфере и к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система с пятью степенями свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION
WITH FIVE DEGREES OF FREEDOM:
ANALYSIS AND INTEGRABILITY.
II. DYNAMICAL SYSTEMS ON TANGENT BUNDLES

© 2022 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. The work contains the second and third parts of the survey on the integrability of systems with five degrees of freedom (the first part: *Itoги Nauki i Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **208**, (2022), pp. 91–121). In the first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field was described in detail. In the second and third parts, we consider more general dynamical systems on tangent bundles to the five-dimensional sphere and other smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

Keywords and phrases: dynamical system with five degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзором по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с пятью степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы автора по системам с четырьмя степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое пятимерное многообразие, то касательное (кокасательное) его расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно, с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи [6, 22, 30, 33].

Работа состоит из трех частей. В первой части (см. [70]) проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики шестимерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении пятимерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

Данная статья содержит вторую и третью части обзора. Во второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к пятимерной сфере. Данные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по пятимерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В заключительной третьей части рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширным классам гладких пятимерных многообразий и также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

2. БОЛЕЕ ОБЩИЙ КЛАСС ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ПЯТИМЕРНОЙ СФЕРЫ

Как мы знаем, в динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы с пространствами положений — конечномерными сферами. Таким образом, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. Так, например, изучение шестимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к пятимерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [17, 29, 44, 47].

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики свободного шестимерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к пятимерной сфере. При этом исследование проводилось, начиная от систем при отсутствии силового поля, и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий [48, 49, 72].

Построение неконсервативного силового поля, действующего на шестимерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для шестимерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (ср. с [73]).

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности пятимерной сферы, вообще говоря, в неконсервативном поле сил.

В данном разделе 2 показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в динамике шестимерного твердого тела, а также в динамике точки, на касательном расслоении к пятимерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [40] и обобщают ранее рассмотренные.

2.1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к пятимерному многообразию. Рассмотрим гладкое пятимерное риманово многообразие M^5 с метрикой g_{ij} , которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^5)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma_{jk}^i(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение $T_*M^5\{z_5, \dots, z_1; x^1, \dots, x^5\}$, где $z = (z_5, \dots, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, \dots, 5$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид (дифференцирование, вообще говоря, в данном случае берется по натуральному параметру)

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^5 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (2.1.1)$$

2.2. Системы на касательном расслоении к пятимерной сфере. Рассмотрим следующую систему (2.2.1), (2.2.2) десятого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_5 + bg(\alpha), \\ \dot{z}_5 = F(\alpha) - (z_1^2 + \dots + z_4^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_4 = z_4 z_5 f(\alpha) + (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_3 = z_3 z_5 f(\alpha) - z_3 z_4 f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - (z_1^2 + z_2^2)f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_5 f(\alpha) - z_2 z_4 f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + z_2 z_3 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + z_1^2 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_5 f(\alpha) - z_1 z_4 f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + z_1 z_3 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - z_1 z_2 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3}, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = z_4 f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = -z_3 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1}, \\ \dot{\beta}_3 = z_2 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2}, \\ \dot{\beta}_4 = -z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{z_5, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ к пятимерной сфере

$$\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4 : 0 \leq \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq \pi, \beta_4 \bmod 2\pi\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha) - 2\pi$ -периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geq 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — (внешнее) силовое поле. О задачах как с внешним, так и внутренним полями см. также в [61, 62, 65].

Первое уравнение подсистемы (2.2.1) и подсистема (2.2.2) задают координаты $z_5, \dots, z_1$ в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (2.2.1), (2.2.2) без последнего уравнения является независимой подсистемой девятого порядка (ввиду цикличности переменной β_4).

Система (2.2.1), (2.2.2) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\tilde{g}(\alpha) + F(\alpha) - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \sin^2 \beta_3] \frac{1}{f(\alpha)} = 0, \quad (2.2.3a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \left[\frac{f^2(\alpha) - \tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)} \right] - \\ - [\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_2 \sin^2 \beta_3] \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.2.3b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \left[\frac{f^2(\alpha) - \tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)} \right] - \\ - [\dot{\beta}_3^2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_3] \sin \beta_2 \cos \beta_2 + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0, \end{aligned} \quad (2.2.3c)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 \left[\frac{f^2(\alpha) - \tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)} \right] - \\ - \dot{\beta}_4^2 \sin \beta_3 \cos \beta_3 + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} = 0, \end{aligned} \quad (2.2.3d)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_4 - b\dot{\beta}_4 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_4 \left[\frac{f^2(\alpha) - \tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)} \right] + \\ + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_4 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + 2\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_4 \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} = 0, \end{aligned} \quad (2.2.3e)$$

где

$$\tilde{g}(\alpha) = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}, \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}.$$

2.3. Первые интегралы, метрики и силовые поля. При $b = 0$ система (2.2.1), (2.2.2) является консервативной и обладает полным набором (шестью) первых интегралов:

$$\begin{aligned} F_1(z_5, \dots, z_1; \alpha) &= z_1^2 + \dots + z_5^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_1 = \text{const}, \\ F_2(z_4, \dots, z_1; \alpha) &= \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2} \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \text{const}, \\ F_3(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 = C_3 = \text{const}, \\ F_4(z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 \sin \beta_2 = C_4 = \text{const}, \\ F_5(z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_3) &= z_1 \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 = C_5 = \text{const}, \\ F_6(z_5, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= C_6 = \text{const}. \end{aligned}$$

При $b > 0$ система (2.2.1), (2.2.2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [40]).

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (2.3.1)$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (2.3.2)$$

Случай (2.3.1) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного шестимерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. часть I: [70]).

Случай (2.3.2) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на пятимерной сфере так же, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой всеобъемлющего шестимерного пространства. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (2.2.1), (2.2.2) описывает геодезический поток на пятимерной сфере.

Замечание 2.1. В случае (2.3.1), если

$$g(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}, \quad (2.3.3)$$

то система (2.2.1), (2.2.2) описывает движение свободного шестимерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin \alpha, \quad (2.3.4)$$

то система (2.2.1), (2.2.2) описывает также закрепленный шестимерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей шестимерное пространство, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим (асимптотическим) предельным множествам системы (2.2.1), (2.2.2).

Для полного интегрирования системы (2.2.1), (2.2.2) необходимо знать, вообще говоря, *девять* независимых первых интегралов. Однако после замены переменных в касательном пространстве

$$w_1 = \frac{z_4}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}, \quad w_2 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad w_3 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_4 = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2}, \quad w_5 = z_5, \quad (2.3.5)$$

система (2.2.1), (2.2.2) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -w_5 + g(\alpha), \\ \dot{w}_5 &= F(\alpha) - w_4^2 f(\alpha), \\ \dot{w}_4 &= w_4 w_5 f(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_k &= d_k \frac{1 + w_k^2 \cos \beta_k}{w_k \sin \beta_k}, \\ \dot{\beta}_k &= d_k, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

$$\dot{\beta}_4 = -Z_1(w_1, \dots, w_5) f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (2.3.8)$$

где $Z_1(w_1, \dots, w_5) = z_1$ в силу замены (2.3.5), d_k , $k = 1, 2, 3$, — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (2.3.6)—(2.3.8) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.3.6), по одному — для систем (2.3.7) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.8) (т.е. *всего шесть*).

2.4. Случай (2.3.1). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a - 1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \quad (2.4.1)$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (2.3.4).

Теорема 2.1. В случаях (2.3.1), (2.4.1) система (2.2.1), (2.2.2) обладает полным набором (шестью), вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.

Следствие 2.1. Система (2.2.3) при условиях (2.3.1), (2.4.1) обладает шестью, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_4 = u_1 \tau^a, \quad w_5 = u_2 \tau^a,$$

то поиск ключевого первого интеграла

$$\Phi_1(w_5, w_4; \alpha) = C_1$$

системы (2.3.6) приведет к уравнению Абеля [29]

$$[(a+1)u_2 - ab]u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2]du_1, \quad (2.4.2)$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ если и интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций, то выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл $\Phi_2(w_5, w_4; \alpha) = C_2$ системы (2.3.6) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \quad (2.4.3)$$

Первые интегралы для систем (2.3.7) имеют вид

$$\Phi_{k+2}(w_k; \beta_k) = \frac{\sqrt{1 + w_k^2}}{\sin \beta_k} = C_{k+2} = \text{const}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.4.4)$$

а дополнительный первый интеграл

$$\Phi_6(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6,$$

«привязывающий» уравнение (2.3.8), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_4}{d\beta_3} = -\frac{z_1}{z_2 \sin \beta_3}, \quad (2.4.5)$$

при этом, используя первый интеграл (2.4.4) при $k = 2, 3$, окончательно получим его вид:

$$\Phi_6(\beta_3, \beta_4) = \beta_4 \pm \arctg \frac{C_5 \cos \beta_3}{\sqrt{C_4^2 \sin^2 \beta_3 - C_5^2}} = C_6 = \text{const}. \quad (2.4.6)$$

В частности, при $a = 1$ равенство (2.4.2) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_5}{\sin \alpha}, \frac{w_4}{\sin \alpha}\right) = \frac{w_5^2 + w_4^2 - bw_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}.$$

2.5. Случай (2.3.2). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1} \alpha}{\cos^{2k+1} \alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k \alpha}{\cos^k \alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.5.1)$$

Теорема 2.2. В случаях (2.3.2), (2.5.1) система (2.2.1), (2.2.2) обладает полным набором (шестью), вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.

Следствие 2.2. Система (2.2.3) при условиях (2.3.2), (2.5.1) обладает шестью, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_4 = u_1 \left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right)^k, \quad w_5 = u_2 \left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right)^k,$$

то поиск ключевого первого интеграла

$$\Phi_1(w_5, w_4; \alpha) = C_1$$

системы (2.3.6) приведет к уравнению Абеля (2.4.2) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_5, w_4; \alpha) = C_2$$

системы (2.3.6) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1-U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (2.3.7) имеют вид (2.4.4). А дополнительный первый интеграл

$$\Phi_6(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6,$$

«привязывающий» уравнение (2.3.8), найдется из равенства (2.4.5), при этом, используя первый интеграл (2.4.4) при $k = 2, 3$, окончательно получим его в виде (2.4.6).

В частности, при $k = 1$ равенство (2.4.2) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1 \left(\frac{w_5 \cos \alpha}{\sin \alpha}, \frac{w_4 \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{(w_5^2 + w_4^2) \cos^2 \alpha - bw_5 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha \cos \alpha} = C_1 = \text{const}.$$

В предыдущих работах автора [50, 52, 53] уже рассматривались задачи о движении свободного шестимерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к пятимерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по пятимерной сфере в более общих, чем ранее, неконсервативных силовых полях.

3. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ К ГЛАДКОМУ ПЯТИМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ

Выше было показано, что изучение шестимерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к пятимерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выше был также введен класс задач о движении точки по гладкой пятимерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удастся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В данном же разделе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому пятимерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3 и 4, см. [66–68]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

3.1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы. Как известно, в случае пятимерного гладкого риманова многообразия M^5 с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_4)$, и аффинной связностью $\Gamma_{jk}^i(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^5\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_4; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2, \dots, \beta_4 = x^5$, $x = (x^1, \dots, x^5)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^5 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.1.1)$$

Изучим структуру уравнений (3.1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^5 . Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^5 R^{ij}(x) z_j, \quad (3.1.2)$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^5 T_{ji}(x) \dot{x}^i,$$

при этом R^{ij} , T_{ji} , $i, j = 1, \dots, 5$, — функции от $x^1, \dots, x^5$, так что матрицы $R = (R^{ij})$ и $T = (T_{ji})$ удовлетворяют соотношению $RT = E$. Назовем также уравнения (3.1.2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^5 .

Справедливы тождества

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^5 \dot{T}_{ji} \dot{x}^i + \sum_{i=1}^5 T_{ji} \ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^5 T_{ji,k} \dot{x}^k, \quad (3.1.3)$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \dots, 5.$$

Подставляя в (3.1.3) уравнения (3.1.1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^5 T_{ij,k} \dot{x}^j \dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^5 T_{ij} \Gamma_{pq}^j \dot{x}^p \dot{x}^q; \quad (3.1.4)$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, \dots, 5$, надо подставить формулы (3.1.2), в результате чего в правой части последнего равенства будет стоять квадратичная форма по переменным z_j . Другими словами, равенство (3.1.4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^5 Q_{ijk} \dot{x}^j \dot{x}^k|_{(3.1.2)} = 0, \quad (3.1.5)$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^5 T_{is}(x) \Gamma_{jk}^s(x) - T_{ij,k}(x). \quad (3.1.6)$$

Предложение 3.1. Система (3.1.1) в той области, где $\det R(x) \neq 0$, эквивалентна составной системе (3.1.2), (3.1.4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (3.1.1) к эквивалентной системе уравнений (3.1.2), (3.1.4) зависит как от замены переменных (3.1.2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^i(x)$.

3.2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -z_5, \\ \dot{\beta}_1 &= z_4 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_3 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 &= z_2 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \\ \dot{\beta}_4 &= z_1 f_4(\alpha) g_3(\beta_1) h_2(\beta_2) i(\beta_3),\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, 4$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2, 3$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, 2$, $i(\beta_3)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1, \dots, z_5$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических (в частности, на сфере, более общих поверхностях вращения и др.):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_4 + 2\Gamma_{\alpha 4}^4(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3 \dot{\beta}_4 = 0, \end{cases}\tag{3.2.2}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (3.2.1) уравнения (3.1.4) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \left[2\Gamma_{\alpha 4}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_5 - \left[2\Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_3(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_4 - \\ &\quad - \left[2\Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_2(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_3 - \\ &\quad - \left[2\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2) z_1 z_2, \quad (3.2.3a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_5 - \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_2 z_4 - \\ &\quad - \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_1(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_2 z_3 - \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \frac{f_4^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \frac{g_3^2(\beta_1)}{g_2(\beta_1)} \frac{h_2^2(\beta_2)}{h_1(\beta_2)} i^2(\beta_3) z_1^2, \quad (3.2.3b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_5 - \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_3 z_4 - \\ &\quad - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h_1^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) \frac{f_4^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_3^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \quad (3.2.3c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_4 &= \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4 z_5 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_3^2 - \\ &\quad - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) \frac{f_4^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_2^2, \quad (3.2.3d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_5 &= \Gamma_{11}^\alpha f_1^2(\alpha) z_4^2 + \Gamma_{22}^\alpha f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_3^2 + \Gamma_{33}^\alpha f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) z_2^2 + \\ &\quad + \Gamma_{44}^\alpha f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \quad (3.2.3e)\end{aligned}$$

и уравнения (3.2.2) почти всюду эквивалентны составной системе (3.2.1), (3.2.3) на касательном расслоении $T_* M^5 \{z_5, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ гладкого пятимерного многообразия $M^5 \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$.

Для полного интегрирования системы (3.2.1), (3.2.3) необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно будет меньше, что будет показано далее при изучении систем с диссипацией.

Предложение 3.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \quad (3.2.4a)$$

$$2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \quad (3.2.4b)$$

$$2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.4c)$$

$$2\Gamma_{\alpha 4}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta) f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.4d)$$

$$\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \quad (3.2.4e)$$

$$\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.4f)$$

$$\left[2\Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_3(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.4g)$$

$$\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_1(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.4h)$$

$$\left[2\Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_2(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.4i)$$

$$\left[2\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.4j)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(z_5, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_5^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (3.2.5)$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (3.2.5) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (3.2.4) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (3.2.4) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, 4$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2, 3$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, 2$, $i(\beta_3)$ системы (3.2.4) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (3.2.5) для системы (3.2.1), (3.2.3) уравнений геодезических (3.2.2). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (3.2.4) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (3.2.1) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = \dots = f_4(\alpha) = f(\alpha), \quad (3.2.6)$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2, 3$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, 2$, $i(\beta_3)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (3.2.4):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \quad (3.2.7a)$$

$$2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.7b)$$

$$2\Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_3(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.7c)$$

$$\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_1(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.7d)$$

$$\left[2\Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_2(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.7e)$$

$$\left[2\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) g_3^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0. \quad (3.2.7f)$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2, 3$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, 2$, $i(\beta_3)$ зависят от коэффициентов связности через систему (3.2.7), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3.3. Если выполнены свойства (3.2.6), (3.2.7), при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \dots = \Gamma_{\alpha 4}^4(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad (3.2.8)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_4, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (3.2.9)$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}.$$

Предложение 3.4. Если выполнены условия предложения 3.3, а также

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g_3(\beta_1) = g(\beta_1), \quad (3.2.10)$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad (3.2.11)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (3.2.12)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

Предложение 3.5. Если выполнены условия предложений 3.3, 3.4, а также

$$h_1(\beta_2) = h_2(\beta_2) = h(\beta_2), \quad (3.2.13)$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2), \quad (3.2.14)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_4(z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const}, \quad (3.2.15)$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\}.$$

Предложение 3.6. Если выполнены условия предложений 3.3–3.5, при этом справедливо равенство

$$\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) = \Gamma_4(\beta_3), \quad (3.2.16)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_5(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) \Psi_3(\beta_3) = C_5 = \text{const}, \quad (3.2.17)$$

$$\Psi_3(\beta_3) = i(\beta_3) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{3,0}}^{\beta_3} \Gamma_4(b) db \right\}. \quad (3.2.18)$$

Предложение 3.7. Если выполнены условия предложений 3.3–3.6, то система (3.2.1), (3.2.3) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_6(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta_4 \pm \int_{\beta_{3,0}}^{\beta_3} \frac{C_5 i(b)}{\sqrt{C_4^2 \Phi_3^2(b) - C_5^2}} db = C_6 = \text{const}, \quad (3.2.19)$$

где после взятия интеграла (3.2.19) вместо постоянных C_4, C_5 нужно подставить левые части равенств (3.2.12), (3.2.17), соответственно.

Набор первых интегралов (3.2.5), (3.2.9), (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17), (3.2.19) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.2.1), (3.2.3) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из шести, а не из девяти, первых интегралов, будет показано ниже).

Как и выше, необходимо отметить, что вопрос о гладкости первого интеграла (3.2.19) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.2.19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

3.3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы.

Теперь несколько модифицируем систему (3.2.1), (3.2.3) при условиях (3.2.6)–(3.2.8), (3.2.10), (3.2.11), (3.2.13), (3.2.14), (3.2.16), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (3.3.1). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_* M^5\{z_5, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ гладкого пятимерного многообразия $M^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ примет вид

$$\dot{\alpha} = -z_5, \quad (3.3.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_5 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha f^2(\alpha) z_4^2 + \Gamma_{22}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_3^2 + \Gamma_{33}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 + \\ + \Gamma_{44}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.3.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4 z_5 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_3^2 - \\ - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.3.1c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_5 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_3 z_4 - \\ - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.3.1d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_5 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_2 z_4 - \\ - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f(\alpha) g(\beta_1) z_2 z_3 - \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.3.1e)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_5 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_1 z_4 - \\ & - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_3 - \left[2\Gamma_4(\beta_3) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) z_1 z_2, \end{aligned} \quad (3.3.1f)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_4 f(\alpha), \quad (3.3.1g)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_3 f(\alpha) g(\beta_1), \quad (3.3.1h)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.3.1i)$$

$$\dot{\beta}_4 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) i(\beta_3), \quad (3.3.1j)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_4 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_3(\beta_2) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_4(\beta_3) \dot{\beta}_3 \dot{\beta}_4 = 0. \end{cases}$$

Предложение 3.8. Если выполнены условия предложения 3.2, то система (3.3.1) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_5, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_5^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da. \quad (3.3.2)$$

Предложение 3.9. Если выполнены условия предложений 3.3–3.6, то система (3.3.1) имеет четыре гладких первых интеграла вида (3.2.9), (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17).

Предложение 3.10. Если выполнены условия предложения 3.7, то система (3.3.1) имеет первый интеграл вида (3.2.19).

Набор первых интегралов (3.3.2), (3.2.9), (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17), (3.2.19) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.3.1) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из шести, а не из девяти, первых интегралов, будет показано ниже).

Аналогично мы вынуждены подчеркнуть, что вопрос о гладкости первого интеграла (3.2.19) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.2.19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

3.4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Теперь усложним систему (3.3.1) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\dot{\alpha} = -z_5 + b\delta(\alpha), \quad (3.4.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_5 = & F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha f^2(\alpha) z_4^2 + \Gamma_{22}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_3^2 + \Gamma_{33}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 + \\ & + \Gamma_{44}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.4.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = & \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4 z_5 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_3^2 - \\ & - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.4.1c)$$

$$\dot{z}_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_5 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_3 z_4 - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \quad (3.4.1d)$$

$$\dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_5 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_2 z_4 - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f(\alpha) g(\beta_1) z_2 z_3 - \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \quad (3.4.1e)$$

$$\dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_5 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_1 z_4 - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_3 - \left[2\Gamma_4(\beta_3) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) z_1 z_2, \quad (3.4.1f)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_4 f(\alpha), \quad (3.4.1g)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_3 f(\alpha) g(\beta_1), \quad (3.4.1h)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.4.1i)$$

$$\dot{\beta}_4 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) i(\beta_3), \quad (3.4.1j)$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\tilde{\delta}(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_4 - b\dot{\beta}_4\delta(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_4 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_4 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_4 + 2\Gamma_4(\beta_3)\dot{\beta}_3\dot{\beta}_4 = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}(\alpha) = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}.$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы десятого порядка (3.4.1) при условии (3.2.7), а также при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)i^2(\beta_3) = \Gamma_5(\alpha). \quad (3.4.2)$$

Введем также (по аналогии с (3.2.7)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (3.2.4):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_5(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \quad (3.4.3)$$

Для полного интегрирования системы (3.4.1) необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_5 = z_5, \quad w_4 = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2}, \quad w_3 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_2 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad w_1 = \frac{z_4}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}, \quad (3.4.4)$$

система (3.4.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_5 + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_5 = F(\alpha) + \Gamma_5(\alpha)f^2(\alpha)w_4^2, \\ \dot{w}_4 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_4 w_5, \end{cases} \quad (3.4.5)$$

$$\begin{cases} w'_3 = d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2}{w_3} \left[2\Gamma_4(\beta_3) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3}\right], \\ \beta'_3 = d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{cases} \quad (3.4.6)$$

$$\begin{cases} w'_2 = d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2}{w_2} \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \beta'_2 = d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{cases} \quad (3.4.7)$$

$$\begin{cases} w'_1 = d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2}{w_1} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \beta'_1 = d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{cases} \quad (3.4.8)$$

$$\beta'_4 = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (3.4.9)$$

где выполнены условия

$$\begin{aligned} d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= Z_4(w_5, \dots, w_1)f(\alpha), \\ d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= Z_3(w_5, \dots, w_1)f(\alpha)g(\beta_1), \\ d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= Z_2(w_5, \dots, w_1)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \\ d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= Z_1(w_5, \dots, w_1)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)i(\beta_3), \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_5, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (3.4.11)$$

— функции в силу замены (3.4.4).

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.4.5)—(3.4.9) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.4.5), по одному — для систем (3.4.6)—(3.4.8) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.9) (т.е. всего *шесть*).

Теорема 3.1. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\Gamma_5(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \quad (3.4.12)$$

Тогда система (3.4.5)—(3.4.9) при выполнении условий (3.2.7), (3.4.3) обладает полным набором (шестью) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Действительно, для начала сопоставим системе третьего порядка (3.4.5) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_5}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_5(\alpha)f^2(\alpha)w_4^2}{-w_5 + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + d \ln |f(\alpha)|/d\alpha]w_4 w_5}{-w_5 + b\delta(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_5 = u_5 \delta(\alpha), \quad w_4 = u_4 \delta(\alpha), \quad (3.4.14)$$

приводим систему (3.4.13) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\delta(\alpha) \frac{du_5}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha) u_5 &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_5(\alpha) f^2(\alpha) \delta^2(\alpha) u_4^2}{-u_5 \delta(\alpha) + b \delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_4}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha) u_4 &= \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + d \ln |f(\alpha)|/d\alpha] \delta^2(\alpha) u_4 u_5}{-u_5 \delta(\alpha) + b \delta(\alpha)},\end{aligned}\quad (3.4.15)$$

что почти всюду эквивалентно

$$\begin{aligned}\delta(\alpha) \frac{du_5}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_5(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_4^2 + \tilde{\delta}(\alpha) u_5^2 - b \tilde{\delta}(\alpha) u_5}{-u_5 + b}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_4}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma_5(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_4 u_5 + \tilde{\delta}(\alpha) u_4 u_5 - b \tilde{\delta}(\alpha) u_4}{-u_5 + b}, \\ F_3(\alpha) &= \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.\end{aligned}\quad (3.4.16)$$

А после выполнения условий (3.4.12) система (3.4.16) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_5}{du_4} = \frac{\lambda + \kappa u_4^2 + u_5^2 - b u_5}{(1 - \kappa) u_4 u_5 - b u_4}.\quad (3.4.17)$$

Уравнение (3.4.17) имеет вид уравнения Абеля [29]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_5^2 + u_4^2 - b u_5 + \lambda}{u_4} = C_1 = \text{const},\quad (3.4.18)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_5, w_4; \alpha) = G_1 \left(\frac{w_5}{\delta(\alpha)}, \frac{w_4}{\delta(\alpha)} \right) = \frac{w_5^2 + w_4^2 - b w_5 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_4 \delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}.\quad (3.4.19)$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.4.5) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.4.18) при $u_3 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_5 - \frac{b}{2} \right)^2 + \left(u_4 - \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda.\quad (3.4.20)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0,\quad (3.4.21)$$

и фазовое пространство системы (3.3.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.4.20).

Таким образом, в силу соотношения (3.4.18) первое уравнение системы (3.4.16) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)} \frac{du_5}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - b u_5 + u_5^2) - C_1 U_1(C_1, u_5)}{-u_5 + b},\quad (3.4.22)$$

где

$$U_1(C_1, u_5) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_5^2 - b u_5 + \lambda)} \right\},\quad (3.4.23)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.4.21).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (3.4.5) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_5, w_4; \alpha) = G_2 \left(\delta(\alpha), \frac{w_5}{\delta(\alpha)}, \frac{w_4}{\delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}\quad (3.4.24)$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln |\delta(\alpha)| = \int \frac{(b - u_5) du_5}{2(\lambda - b u_5 + u_5^2) - C_1 \{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_5^2 - b u_5 + \lambda)} \} / 2},$$

где $u_5 = w_5/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно формально подставить левую часть равенства (3.4.19). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (3.4.19), (3.4.24) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (3.4.6)–(3.4.8) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (3.4.25)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2, 3$, см. (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.9), находится по аналогии с (3.2.19):

$$\Theta_6(\beta_3, \beta_4) = \beta_4 \pm \int_{\beta_{3,0}}^{\beta_3} \frac{C_5 i(b)}{\sqrt{C_4^2 \Psi_3^2(b) - C_5^2}} db = C_6 = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_4 , C_5 можно формально подставить соответствующие левые части равенства (3.4.25).

3.5. Замечание о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (3.4.5) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [40]. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (3.3.2), (3.2.9). В силу (3.4.12)

$$\Phi_1(z_5, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_5^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da \cong w_5^2 + w_4^2 + \lambda \delta^2(\alpha), \quad (3.5.1)$$

где « $\cong$ » означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (3.4.3) и (3.4.12)

$$\Phi_2(z_4, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2} f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} \cong w_4 \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (3.5.2)$$

где « $\cong$ » означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.5.1), (3.5.2) (или (3.3.2), (3.2.9)) также является первым интегралом системы (3.4.5) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_5^2 + w_4^2 - b w_5 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha) \quad (3.5.3)$$

и (3.5.2) по отдельности не является первым интегралом системы (3.4.5). Однако отношение функций (3.5.3), (3.5.2) является первым интегралом системы (3.4.5) (при $\kappa = -1$) при любом b .

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 46–51.
2. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 71–86.
3. Богоявленский О. И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // Докл. АН СССР. — 1983. — 272, № 6. — С. 1364–1367.
4. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
5. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.

6. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$ // Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 6. — С. 1298–1300.
8. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
9. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
10. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
11. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 22–39.
12. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
15. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
16. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
17. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
18. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
19. Локишин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 76–133.
20. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела// Функци. анализ. прилож. — 1976. — 10, № 4. — С. 93–94.
21. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
22. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
23. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
24. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. Тихонов А. А. Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
27. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундамент. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
28. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — 1. — С. 52–58.
31. Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — 57, № 4. — С. 40–49.
32. Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — 4. — С. 57–69.

33. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
34. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
35. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
36. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
37. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
38. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
39. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
40. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
41. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
42. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
43. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
45. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
46. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
47. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
48. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
49. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
50. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
51. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
52. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
53. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
55. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
56. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
57. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анализ. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.

59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
70. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — 208. — С. 91–121.
71. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 080001.
72. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
73. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
74. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru