ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 17–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-17-27

УДК 514.76

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ $(n-m)m$-МЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. **О. О. БЕЛОВА**

Аннотация. В проективном пространстве P_n рассмотрен $(n-m)m$-мерный комплекс. В главном расслоении, ассоциированном с этим комплексом, строится фундаментально-групповая связность, ее объекты кривизны и кручения. Исследование комплекса производится методом Картана—Лаптева. Показано, что фундаментальный объект 1-го порядка данного комплекса является псевдоквазитензором, кривизна — псевдотензором, а кручение образует геометрический объект лишь в совокупности с подобъектом связности и фундаментальным объектом. Произведено композиционное оснащение $(n-m)m$-мерного комплекса. Доказано, что данное оснащение индуцирует связности трех типов в главном расслоении, ассоциированном с комплексом.

Ключевые слова: метод Картана—Лаптева, комплекс, проективное пространство, связность, кривизна, кручение, композиционное оснащение.

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF $(n-m)m$-DIMENSIONAL COMPLEXES IN n-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE

© 2023 **O. O. BELOVA**

Abstract. We consider an $(n-m)m$-dimensional complex in the projective space P_n. In the principal bundle associated with this complex, we construct a fundamental-group connection and calculate the curvature and torsion of this connection. We examine this complex by the Cartan–Laptev method. We prove that the fundamental object of the 1th order of this complex is a pseudoquasitensor, the curvature is a pseudotensor, and the torsion is a geometric object only in combination with the connection subobject and the fundamental object. We perform the compositional framing of the $(n-m)m$-dimensional complex. Also, we prove that this framing induces connections of three types in the principal bundle associated with the complex.

Keywords and phrases: Cartan–Laptev method, complex, projective space, connection, curvature, torsion, compositional framing.

AMS Subject Classification: 53A20, 53C05

1. Введение. Теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства является одной из наиболее красивых и интересных областей дифференциальной геометрии [9]. Данная теория находит применение в интегральной геометрии и теоретической физике.

r-Мерный комплекс K_r m-мерных плоскостей — это r-мерное подмногообразие грассманова многообразия $Gr(m,n)$, состоящего из m-мерных плоскостей проективного пространства P_n, где $r < (m+1)(n-m)$. Различные виды комплексов K_r в пространстве P_n получаются путем различного взаимного расположения плоскости PT_pV^r с многообразием Сегре $S_p(m, n-m-1)$, где в качестве PT_pV^r рассматривается $(r-1)$-мерная плоскость, полученная путем проективизации касательной плоскости T_pV^r с центром в точке $p \in V^r$, V^r — алгебраическое многообразие, соответствующее данному комплексу при грассмановом отображении (см. [10]).

Многообразие Сегре $S(m,n)$ является образом прямого произведения $P_m \times P_n$ двух проективных пространств P_m и P_n (см. [16]). Данное многообразие имеет важное значение для дифференциальной геометрии грассмановых многообразий (см., например, [1–7, 30]), которая является средством построения различных многообразий в проективных пространствах. Так, многообразие Сегре $S(2,2)$ связано с грассмановым многообразием $Gr(2,5)$ (см. [9]). В [12] при помощи условия редуцируемости главных расслоений найден дифференциально-геометрический признак многообразий Сегре.

Дифференциальная геометрия комплексов многомерных плоскостей полностью не изучена, поэтому представленная работа является актуальной. В данной статье при исследовании комплекса $K_{(n-m)m}$ применяется метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева, который основан на инвариантном дифференциально-алгебраическом аппарате структурных дифференциальных форм рассматриваемых расслоений [17, 18, 20, 26, 33]. На данном комплексе задана фундаментально-групповая связность, найдены дифференциальные уравнения компонент объекта связности Γ, которая широко используется для параллельных перенесений [18, 32], и выражения компонент объектов кривизны и кручения. Объект связности содержит два подобъекта, задающие связности в соответствующих подрасслоениях. Показано, что объект кривизны является псевдотензором, а кручение является геометрическим объектом лишь в совокупности с компонентами фундаментального объекта 1-го порядка и подобъекта связности, задающего связность в подрасслоении с типовым слоем — фактор-группой, действующей на m-плоскости и в двойственной плоскости. При осуществлении композиционного оснащения комплекса $K_{(n-m)m}$ индуцируются связности трех типов в ассоциированном расслоении, причем одна из данных связностей является средней по отношению к двум другим.

2. Аппарат исследования. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_{I'}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами (см., например, [14])

$$dA_{I'} = \theta_{I'}^{J'} A_{J'}, \quad (I', \dots = \overline{0,n}), \tag{1}$$

где d — символ обычного дифференцирования в пространстве P_n, а $\theta_{I'}^{J'}$ — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям Картана

$$D\theta_{J'}^{I'} = \theta_{J'}^{K'} \wedge \theta_{K'}^{I'} \tag{2}$$

линейной группы $GL(n+1)$. В формулах (2) D является символом внешнего дифференцирования.

Замечание 1. Отметим, что линейная группа $GL(n+1)$ действует эффективно в линейном пространстве $L(n+1)$ и неэффективно в проективном пространстве P_n.

С помощью условия

$$\theta_{I'}^{I'} = 0 \tag{3}$$

из линейной группы $GL(n+1)$ можно выделить специальную линейную группу $SGL(n+1)$, эффективно действующую в пространстве P_n.

Замечание 2. В [26] показано, что однородный аналитический аппарат (1)—(3) неудобен для выделения подгрупп.

Введем новые формы (см., например, [14, 15])

$$\omega_{J'}^{I'} = \theta_{J'}^{I'} - \delta_{J'}^{I'} \theta_0^0. \tag{4}$$

Разбивая индекс $I' = \{0, I\}$, можно записать более детально формы (4)

$$\omega_0^I = \theta_0^I, \quad \omega_J^I = \theta_J^I - \delta_J^I \theta_0^0, \quad \omega_I^0 = \theta_I^0, \tag{5}$$
$$\omega_0^0 = 0.$$

Запишем деривационные формулы (1) подробно

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \quad (I, J, K, \ldots = \overline{1,n}), \tag{6}$$

где $A = A_0$, $\omega^I = \omega_0^I$, $\omega_I = \omega_I^0$, а форма $\theta = \theta_0^0$ играет роль множителя пропорциональности.

Таблица 1. Классификация семейств плоскостей.

Многообразие Грассмана	Комплексы	**Коконгруэнция**	Псевдоконгруэнция	**Конгруэнция**	Линейчатая пов-ть с m-мерным образ. элем., $(m+r)$-мерная пов-ть	**Плоскость L_m**
$(m+1)(n-m)$		$m(n-m)$		$n-m$	$1 \leqslant r \leqslant n-m-1$	m

Из структурных уравнений (2), вводя базисные формы (5) и для простоты опуская 0 у форм ω_0^I и ω_I^0, получаем уравнения Картана

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \tag{7}$$

которым удовлетворяют базисные формы ω^I, ω_J^I, ω_I проективной группы $GP(n)$, действующей эффективно в пространстве P_n.

Замечание 3. Для дальнейшего исследования будем пользоваться неоднородным аналитическим аппаратом с деривационными формулами (6) и структурными уравнениями (7).

3. Комплекс $K_{(n-m)m}$. В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную плоскость L_m $(1 \leqslant m < n)$. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_I\}$ с деривационными формулами (6) (ср. [19])

$$dA = \theta A + \omega^a A_a + \omega^\alpha A_\alpha,$$
$$dA_a = \theta A_a + \omega_a^b A_b + \omega_a^\alpha A_\alpha + \omega_a A,$$
$$dA_\alpha = \theta A_\alpha + \omega_\alpha^a A_a + \omega_\alpha^\beta A_\beta + \omega_\alpha A,$$

помещая вершины A, A_a на плоскость L_m. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения

$$a, b, c, \ldots = 1, \ldots, m; \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n.$$

В этом случае уравнения стационарности данной плоскости имеют вид $\omega^\alpha = 0$ и $\omega_a^\alpha = 0$.

Рассмотрим комплекс $K_{(n-m)m}$ m-мерных плоскостей L_m. Примем формы ω_a^α за базисные, тогда уравнения комплекса $K_{(n-m)m}$ имеют вид (ср. [11, 13])

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta. \tag{8}$$

Замечание 4. В. И. Близникас дал классификацию подмногообразий $Gr(m, n, r)$ многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ (см. [8]) и назвал данный комплекс $K_{(n-m)m}$ коконгруэнцией m-мерных плоскостей.

В таблице 1 граничные многообразия выделены темным цветом с указанием их размерностей и межграничные многообразия с размерностями, находящимися в пределах размерностей граничных многообразий.

Используя структурные уравнения (7) проективной группы $GP(n)$, действующей в пространстве P_n, найдем дифференциалы базисных форм

$$D\omega_a^\alpha = (\delta_\beta^\alpha \omega_a^b - \delta_a^b \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\beta^{\alpha b} \omega_a) \wedge \omega_b^\beta. \tag{9}$$

Продолжая систему (8), находим дифференциальные уравнения на компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\beta^{\alpha a}\}$ в следующем виде:

$$\Delta \Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a = \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha ab} \omega_b^\gamma, \tag{10}$$

причем $\Lambda^{\alpha ab}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha ba}_{\gamma\beta}$, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом (см., например, [29, 33]):

$$\Delta\Lambda^{\alpha a}_{\beta} = d\Lambda^{\alpha a}_{\beta} + \Lambda^{\gamma a}_{\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma} + \Lambda^{\alpha b}_{\beta}\omega^{a}_{b} - \Lambda^{\alpha a}_{\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}.$$

Замечание 5. Фундаментальный объект 1-го порядка Λ комплекса $K_{(n-m)m}$ является псевдоквазитензором. Фундаментальный объект 1-го порядка конгруэнции B_{n-m} также является псевдоквазитензором [11], а фундаментальный объект 1-го порядка комплекса $K_{m(n-m+1)}$ состоит из двух псевдотензоров [13]. В нашем случае, если $\omega^a = 0$, получим центрированную плоскость, тогда фундаментальный объект станет псевдотензором.

4. Главное расслоение. С комплексом $K_{(n-m)m}$ ассоциируется главное расслоение $G_s(K)$ со структурными уравнениями (9) и уравнениями

$$\begin{aligned}
&D\omega^a_b = \omega^c_b\wedge\omega^a_c + (\delta^a_b\omega_c + \delta^a_c\omega_b)\wedge\omega^c + (\delta^a_b\Lambda^{\beta c}_{\alpha}\omega_\beta - \delta^\beta_\alpha\delta^c_b\omega^a_\beta)\wedge\omega^\alpha_c,\\
&D\omega^a = \omega^b\wedge\omega^a_b - \Lambda^{\alpha b}_{\beta}\omega^a_\alpha\wedge\omega^\beta_b,\\
&D\omega_a = \omega^b_a\wedge\omega_b - \omega_\alpha\wedge\omega^\alpha_a;
\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&D\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta\wedge\omega^\alpha_\gamma + \delta^\alpha_\beta\omega_a\wedge\omega^a + (\Lambda^{\alpha a}_{\gamma}\omega_\beta + \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_{\gamma}\omega_\mu + \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta)\wedge\omega^\gamma_a;\\
&D\omega^a_\alpha = (\delta^a_b\omega^\beta_\alpha - \delta^\beta_\alpha\omega^a_b)\wedge\omega^b_\beta + \omega_\alpha\wedge\omega^a;\\
&D\omega_\alpha = \omega^a_\alpha\wedge\omega_a + \omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta.
\end{aligned}\tag{12}$$

Базой главного расслоения $G_s(K)$ является комплекс $K_{(n-m)m}$, а типовым слоем — s-членная подгруппа G_s стационарности плоскости L_m, причем $s = n(n+1) - m(n-m-1)$.

Теорема 1. *В главном расслоении $G_s(K)$ выделяются следующие фактор-расслоения:*

1. *расслоение $P(K)$ со структурными уравнениями* (9), (11) *и типовым слоем — фактор-группой $P = GP(m)$ группы $GP(n)$, действующей на плоскости L_m;*
2. *расслоение $H(K)$ имеет структурные уравнения* (9), (11), (12). *Типовым слоем фактор-расслоения $H(K)$ является фактор-группа H группы G, действующая на плоскости L_m и в двойственной плоскости.*

Доказательство следует из структурных уравнений (9), (11), (12).

5. Фундаментально-групповая связность. На данном комплексе $K_{(n-m)m}$ способом Лаптева — Лумисте (см., например, [21, 27]) зададим связность, для этого рассмотрим преобразование слоевых форм

$$\begin{aligned}
&\tilde\omega^a_b = \omega^a_b - \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c, \quad \tilde\omega^a = \omega^a - \Gamma^{ab}_{\alpha}\omega^\alpha_b, \quad \tilde\omega^a_\alpha = \omega^a_\alpha - \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b,\\
&\tilde\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a, \quad \tilde\omega_a = \omega_a - \Gamma^b_{a\alpha}\omega^\alpha_b, \quad \tilde\omega_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a.
\end{aligned}\tag{13}$$

Найдем структурные уравнения форм связности. Для этого продифференцируем формы (13) внешним образом, используя структурные уравнения (9), (11), (12). Выразим формы Пфаффа ω из (13) и подставим в полученные уравнения. Раскроем скобки, делая обратную замену по формулам (13) в тех слагаемых, где формы $\tilde\omega$ внешним образом умножаются на базисные. Получим

$$\begin{aligned}
D\tilde\omega^a_b &= \tilde\omega^c_b\wedge\tilde\omega^a_c + (\delta^a_b\tilde\omega_c + \delta^a_c\tilde\omega_b)\wedge\tilde\omega^c + (-\Gamma^{dc}_{b\alpha}\Gamma^{ae}_{d\beta} - \delta^a_b\Gamma^c_{d\alpha}\Gamma^{de}_{\beta} - \Gamma^c_{b\alpha}\Gamma^{ae}_{\beta})\omega^\alpha_c\wedge\omega^\beta_e -\\
&- (\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha} + (\Gamma^{ae}_{b\beta}\Lambda^{\beta c}_{\alpha} - \delta^a_b\Gamma^{ec}_{\alpha} - \delta^e_b\Gamma^{ac}_{\alpha})\omega_e + (\delta^a_b\Gamma^c_{e\alpha} + \delta^a_e\Gamma^c_{b\alpha})\omega^e + \delta^c_b\omega^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_{\alpha}\omega_\beta)\wedge\omega^\alpha_c,\\
D\tilde\omega^a &= \tilde\omega^b\wedge\tilde\omega^a_b + (-\Gamma^{eb}_{\alpha}\Gamma^{ac}_{e\beta})\omega^\alpha_b\wedge\omega^\beta_c - (\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha} + \Gamma^{ac}_{\beta}\Lambda^{\beta b}_{\alpha}\omega_c - \Gamma^{ab}_{e\alpha}\omega^e + \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\omega^a_\beta)\wedge\omega^\alpha_b,\\
D\tilde\omega^a_\alpha &= \tilde\omega^b_\alpha\wedge\tilde\omega^a_b + \tilde\omega^\beta_\alpha\wedge\tilde\omega^a_\beta + \tilde\omega_\alpha\wedge\tilde\omega^a + (-\Gamma^{eb}_{\alpha\beta}\Gamma^{ac}_{e\gamma} - \Gamma^{\mu b}_{\alpha\beta}\Gamma^{ac}_{\mu\gamma} - \Gamma^b_{\alpha\beta}\Gamma^{ac}_{\gamma})\omega^\beta_b\wedge\omega^\gamma_c -\\
&\qquad - \Big(\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha\beta} + \Gamma^{ac}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma b}_{\beta}\omega_c + (\delta^a_c\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \delta^\gamma_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta})\omega^c_\gamma - \Gamma^{ab}_{\beta}\omega_\alpha + \Gamma^b_{\alpha\beta}\omega^a\Big)\wedge\omega^\beta_b,\\
D\tilde\omega^\alpha_\beta &= \tilde\omega^\gamma_\beta\wedge\tilde\omega^\alpha_\gamma + \delta^\alpha_\beta\tilde\omega_a\wedge\tilde\omega^a + (-\Gamma^{\eta a}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha b}_{\eta\mu} - \delta^\alpha_\beta\Gamma^a_{c\gamma}\Gamma^{cb}_{\mu})\omega^\gamma_a\wedge\omega^\mu_b -\\
&- \Big(\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} + (\Gamma^{\alpha b}_{\beta\mu}\Lambda^{\mu a}_{\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Gamma^{ba}_{\gamma})\omega_b + \delta^\alpha_\beta\Gamma^a_{b\gamma}\omega^b - (\delta^\mu_\beta\Lambda^{\alpha a}_{\gamma} + \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_{\gamma})\omega_\mu - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta\Big)\wedge\omega^\gamma_a,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D\tilde{\omega}_a &= \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + (-\Gamma^{eb}_{a\alpha}\Gamma^c_{e\beta})\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c - \Big(\Delta\Gamma^b_{a\alpha} + (\Gamma^{cb}_{a\alpha} + \Gamma^c_{a\beta}\Lambda^{\beta b}_\alpha)\omega_c + \delta^b_a\omega_\alpha\Big) \wedge \omega^\alpha_b,\\
D\tilde{\omega}_\alpha &= \tilde{\omega}^a_\alpha \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta + (-\Gamma^{ca}_{\alpha\beta}\Gamma^b_{c\gamma} - \Gamma^{\mu a}_{\alpha\beta}\Gamma^b_{\mu\gamma})\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b -\\
&\quad - (\Delta\Gamma^a_{\alpha\beta} + (\Gamma^b_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma a}_\beta + \Gamma^{ba}_{\alpha\beta})\omega_b - \Gamma^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma) \wedge \omega^\beta_a.
\end{aligned}
$$

Связность в главном расслоении задается с помощью поля объекта групповой связности $\Gamma = \{\Gamma^{ac}_{b\alpha}, \Gamma^{ab}_\alpha, \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \Gamma^b_{a\alpha}, \Gamma^a_{\alpha\beta}\}$ на базе $K_{(n-m)m}$. Компоненты объекта Γ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$
\begin{gathered}
\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha} + (\Gamma^{ae}_{b\beta}\Lambda^{\beta c}_\alpha - \delta^a_b\Gamma^{ec}_\alpha - \delta^e_b\Gamma^{ac}_\alpha)\omega_e + (\delta^a_b\Gamma^c_{e\alpha} + \delta^a_e\Gamma^c_{b\alpha})\omega^e + \delta^c_b\omega^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_\alpha\omega_\beta = \Gamma^{ace}_{b\alpha\beta}\omega^\beta_e,\\
\Delta\Gamma^{ab}_\alpha + \Gamma^{ac}_\beta\Lambda^{\beta b}_\alpha\omega_c - \Gamma^{ab}_{e\alpha}\omega^e + \Lambda^{\beta b}_\alpha\omega^a_\beta = \Gamma^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c,\\
\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha\beta} + \Gamma^{ac}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma b}_\beta\omega_c + (\delta^a_c\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \delta^\gamma_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta})\omega^c_\gamma - \Gamma^{ab}_\beta\omega_\alpha + \Gamma^b_{\alpha\beta}\omega^a = \Gamma^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_c,\\
\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} + (\Gamma^{\alpha b}_{\beta\mu}\Lambda^{\mu a}_\gamma - \delta^\alpha_\beta\Gamma^{ba}_\gamma)\omega_b + \delta^\alpha_\beta\Gamma^a_{b\gamma}\omega^b - (\delta^\mu_\beta\Lambda^{\alpha a}_\gamma + \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_\gamma)\omega_\mu - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta = \Gamma^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_b,\\
\Delta\Gamma^b_{a\alpha} + (\Gamma^{cb}_{a\alpha} + \Gamma^c_{a\beta}\Lambda^{\beta b}_\alpha)\omega_c + \delta^b_a\omega_\alpha = \Gamma^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\beta_c,\\
\Delta\Gamma^a_{\alpha\beta} + (\Gamma^b_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma a}_\beta + \Gamma^{ba}_{\alpha\beta})\omega_b - \Gamma^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma = \Gamma^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_b.
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Замечание 6. Объект групповой связности Γ образует геометрический объект в совокупности с фундаментальным объектом 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda^{\alpha a}_\beta\}$. Данный объект содержит два подобъекта $\Gamma_1 = \{\Gamma^{ac}_{b\alpha}, \Gamma^{ab}_\alpha, \Gamma^b_{a\alpha}\}$ и $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$, задающие связность в соответствующих подрасслоениях.

Замечание 7. Для комплекса $K_{(n-m)m}$ m-мерных плоскостей L_m нельзя задать обобщенные аффинные [22] и билинейные связности, а также нормальную линейную связность, которые были исследованы в [13] для комплекса $K_{(n-m+1)m}$ центрированных плоскостей L^*_m. Кроме того, для комплекса $K_{(n-m)m}$ нельзя задать плоскостную и нормальную обобщенные аффинные связности, которые были изучены автором в [31] для пространства центрированных плоскостей. Отметим также, что связность Столярова [28] в данном случае также не может быть задана, так как в структурные уравнения входят другие формы.

6. Объект кривизны. Учитывая во внешних дифференциалах форм связности (13) дифференциальные уравнения (14) компонент объекта фундаментально-групповой связности Γ, полученные в предыдущем пункте, запишем структурные уравнения

$$
\begin{aligned}
D\tilde{\omega}^a_b &= \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c + (\delta^a_b\tilde{\omega}_c + \delta^a_c\tilde{\omega}_b) \wedge \tilde{\omega}^c + R^{ace}_{b\alpha\beta}\omega^\alpha_c \wedge \omega^\beta_e,\\
D\tilde{\omega}^a &= \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^a_b + R^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c,\\
D\tilde{\omega}^a_\alpha &= \tilde{\omega}^b_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a_b + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a_\beta + \tilde{\omega}_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a + R^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,\\
D\tilde{\omega}^\alpha_\beta &= \tilde{\omega}^\gamma_\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\gamma + \delta^\alpha_\beta\tilde{\omega}_a \wedge \tilde{\omega}^a + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma_a \wedge \omega^\mu_b,\\
D\tilde{\omega}_a &= \tilde{\omega}^b_a \wedge \tilde{\omega}_b + R^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c,\\
D\tilde{\omega}_\alpha &= \tilde{\omega}^a_\alpha \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta + R^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b,
\end{aligned}
$$

где компоненты объекта кривизны R имеют вид

$$
\begin{aligned}
R^{ace}_{b\alpha\beta} &= \Gamma^{a}_{b}{}^{ce}_{[\alpha\beta]} - \Gamma^{d}_{b}{}^{c}_{[\alpha}\Gamma^{ae}_{d\beta]} - \delta^a_b\Gamma^{\lceil c}_{d\lfloor\alpha}\Gamma^{de\rceil}_{\beta\rfloor} - \Gamma^{\lceil c}_{b\lfloor\alpha}\Gamma^{ae\rceil}_{\beta\rfloor},\\
R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} &= \Gamma^{a}_{\alpha}{}^{bc}_{[\beta\gamma]} - \Gamma^{e}_{\alpha}{}^{b}_{[\beta}\Gamma^{ac}_{e\gamma]} - \Gamma^{\mu}_{\alpha}{}^{b}_{[\beta}\Gamma^{ac}_{\mu\gamma]} - \Gamma^{\lceil b}_{\alpha\lfloor\beta}\Gamma^{ac\rceil}_{\gamma\rfloor},\\
R^{abc}_{\alpha\beta} &= \Gamma^{a\lceil bc\rceil}_{\lfloor\alpha\beta\rfloor} - \Gamma^{e\lceil b}_{\lfloor\alpha}\Gamma^{ac\rceil}_{e\beta\rfloor},\\
R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta}{}^{ab}_{[\gamma\mu]} - \Gamma^{\eta}_{\beta}{}^{a}_{[\gamma}\Gamma^{\alpha b}_{\eta\mu]} - \delta^\alpha_\beta\Gamma^{\lceil a}_{c\lfloor\gamma}\Gamma^{cb\rceil}_{\mu\rfloor},\\
R^{bc}_{a\alpha\beta} &= \Gamma^{\lceil bc\rceil}_{a\lfloor\alpha\beta\rfloor} - \Gamma^{e\lceil b}_{a\lfloor\alpha}\Gamma^{c\rceil}_{e\beta\rfloor},\\
R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} &= \Gamma^{\lceil ab\rceil}_{\alpha\lfloor\beta\gamma\rfloor} - \Gamma^{c}_{\alpha}{}^{a}_{[\beta}\Gamma^{b}_{c\gamma]} - \Gamma^{\mu}_{\alpha}{}^{a}_{[\beta}\Gamma^{b}_{\mu\gamma]}.
\end{aligned}
$$

В данных выражениях квадратные скобки означают альтернирование по парам индексов, например,
$$\Gamma^{[ab}_{\alpha[\beta\gamma]}] = \frac{1}{2}(\Gamma^{ab}_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma^{ba}_{\alpha\gamma\beta}).$$

Продолжая дифференциальные уравнения (14) и учитывая сравнения на компоненты объекта кривизны R, соответствующие уравнениям (10), находим следующие дифференциальные сравнения по модулю базисных форм ω^α_a:
$$\Delta R^{ace}_{b\alpha\beta} + \Big(R^{acd}_{b\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma e}_\beta + R^{ade}_{b\gamma\beta}\Lambda^{\gamma c}_\alpha - \delta^a_b R^{dce}_{\alpha\beta} - \delta^d_b R^{ace}_{\alpha\beta} + \Gamma^{ad}_{b\gamma}\Lambda^{\gamma[ce}_{[\alpha\beta]}]\Big)\,\omega_d +$$
$$+ \left(\delta^a_b R^{ce}_{d\alpha\beta} + \delta^a_d R^{ce}_{b\alpha\beta}\right)\omega^d - \delta^a_b \Lambda^{\gamma[ce}_{[\alpha\beta]}]\omega_\gamma \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta} + \Big(R^{abe}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_\beta + R^{aec}_{\gamma\beta}\Lambda^{\gamma b}_\alpha + \Gamma^{ae}_\gamma \Lambda^{\gamma[bc}_{[\alpha\beta]}]\Big)\,\omega_e - R^{abc}_{e\alpha\beta}\omega^e + \delta^a_e \Lambda^{\gamma[bc}_{[\alpha\beta]}]\omega^e_\gamma \equiv 0,$$
$$\Delta R^{bc}_{a\alpha\beta} + \Big(R^{ebc}_{a\alpha\beta} + R^{be}_{a\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_\beta - R^{ce}_{a\beta\gamma}\Lambda^{\gamma b}_\alpha + \Gamma^e_{a\gamma}\Lambda^{\gamma[bc}_{[\alpha\beta]}]\Big)\,\omega_e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + \Big(R^{abe}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu c}_\gamma + R^{aec}_{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu b}_\beta + \Gamma^{ae}_{\alpha\mu}\Lambda^{\mu[bc}_{[\beta\gamma]}]\Big)\,\omega_e + R^{bc}_{\alpha\beta\mu}\omega^a + \Big(\delta^a_e R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma} - \delta^\mu_\alpha R^{abc}_{e\beta\gamma}\Big)\,\omega^e_\mu - R^{abc}_{\beta\gamma}\omega_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} + \Big(R^{\alpha ac}_{\beta\gamma\eta}\Lambda^{\eta b}_\mu + R^{\alpha cb}_{\beta\eta\mu}\Lambda^{\eta a}_\gamma - \delta^\alpha_\beta R^{cab}_{\gamma\mu} + \Gamma^{\alpha c}_{\beta\eta}\Lambda^{\eta[ab}_{[\gamma\mu]}]\Big)\,\omega_c + \delta^\alpha_\beta R^{ab}_{c\gamma\mu}\omega^c - \Big(\delta^\alpha_\beta \Lambda^{\eta[ab}_{[\gamma\mu]}] + \delta^\eta_\beta \Lambda^{\alpha[ab}_{[\gamma\mu]}]\Big)\,\omega_\eta \equiv 0,$$
$$\Delta R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + \Big(R^{cab}_{\alpha\beta\gamma} + R^{ac}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu b}_\gamma + R^{cb}_{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu a}_\beta + \Gamma^c_{\alpha\mu}\Lambda^{\mu[ab}_{[\beta\gamma]}]\Big)\,\omega_c - R^{ab}_{c\beta\gamma}\omega^c_\alpha + R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu \equiv 0.$$

Учитывая условие симметрии $\Lambda^{\alpha ab}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha ba}_{\gamma\beta}$ для пфаффовых производных фундаментального объекта 1-го порядка, последние сравнения упростятся
$$\begin{gathered}
\Delta R^{ace}_{b\alpha\beta} + \Big(R^{acd}_{b\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma e}_\beta + R^{ade}_{b\gamma\beta}\Lambda^{\gamma c}_\alpha - \delta^a_b R^{dce}_{\alpha\beta} - \delta^d_b R^{ace}_{\alpha\beta}\Big)\,\omega_d + \left(\delta^a_b R^{ce}_{d\alpha\beta} + \delta^a_d R^{ce}_{b\alpha\beta}\right)\omega^d \equiv 0,\\
\Delta R^{abc}_{\alpha\beta} + \Big(R^{abe}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_\beta + R^{aec}_{\gamma\beta}\Lambda^{\gamma b}_\alpha\Big)\,\omega_e - R^{abc}_{e\alpha\beta}\omega^e \equiv 0,\\
\Delta R^{bc}_{a\alpha\beta} + \Big(R^{ebc}_{a\alpha\beta} + R^{be}_{a\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_\beta - R^{ce}_{a\beta\gamma}\Lambda^{\gamma b}_\alpha\Big)\,\omega_e \equiv 0,\\
\Delta R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + \Big(R^{abe}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu c}_\gamma + R^{aec}_{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu b}_\beta\Big)\,\omega_e + R^{bc}_{\alpha\beta\mu}\omega^a + \Big(\delta^a_e R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma} - \delta^\mu_\alpha R^{abc}_{e\beta\gamma}\Big)\,\omega^e_\mu - R^{abc}_{\beta\gamma}\omega_\alpha \equiv 0,\\
\Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} + \Big(R^{\alpha ac}_{\beta\gamma\eta}\Lambda^{\eta b}_\mu + R^{\alpha cb}_{\beta\eta\mu}\Lambda^{\eta a}_\gamma - \delta^\alpha_\beta R^{cab}_{\gamma\mu}\Big)\,\omega_c + \delta^\alpha_\beta R^{ab}_{c\gamma\mu}\omega^c \equiv 0,\\
\Delta R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + \Big(R^{cab}_{\alpha\beta\gamma} + R^{ac}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu b}_\gamma + R^{cb}_{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu a}_\beta\Big)\,\omega_c - R^{ab}_{c\beta\gamma}\omega^c_\alpha + R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu \equiv 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Теорема 2. *Объект кривизны R связности Γ на комплексе $K_{(n-m)m}$ является псевдотензором* (см. [24])*, который содержит два подпсевдотензора $R_1 = \{R^{abc}_{e\alpha\beta}, R^{abc}_{\alpha\beta}, R^{ab}_{c\alpha\beta}\}$ и $R_2 = \{R_1, R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$.*

Доказательство следует из сравнений (15).

7. Объект кручения. Учитывая в структурных уравнениях (9) базисных форм формы связности, находим
$$D\omega^\alpha_a = (\delta^\alpha_\beta\tilde\omega^b_a - \delta^b_a\tilde\omega^\alpha_\beta + \Lambda^{\alpha b}_\beta\tilde\omega_a) \wedge \omega^\beta_b + S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,$$
где компоненты объекта кручения S имеют вид
$$S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = \delta^{[b}_a\Gamma^{\alpha c}_{[\beta\gamma]}] - \delta^\alpha_{[\beta}\Gamma^{[bc]}_{a\gamma]} - \Lambda^{\alpha[b}_{[\beta}\Gamma^{c}_{a\gamma]}].$$

Учитывая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты объекта связности Γ и компоненты фундаментального объекта 1-го порядка Λ, получим дифференциальные сравнения
$$\Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} + \Big(2S^{\alpha[be}_{a[\beta\mu}\Lambda^{\mu c}_{\gamma]}] + \delta^e_a M^{\alpha bc}_{\beta\gamma}\Big)\,\omega_e \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha_a),$$
где $M^{\alpha bc}_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_{[\beta}\Gamma^{[bc]}_{\gamma]} + \Gamma^{\alpha[b}_{\mu[\beta}\Lambda^{\mu c]}_{\gamma]}$, причем
$$\Delta M^{\alpha bc}_{\beta\gamma} + 2M^{\alpha[be}_{[\beta\mu}\Lambda^{\mu c}_{\gamma]}]\omega_e + S^{\alpha bc}_{e\beta\gamma}\omega^e \equiv 0,$$

откуда вытекает

Теорема 3. *Объект кручения S связности Γ на комплексе $K_{(n-m)m}$ является геометрическим объектом лишь в совокупности с компонентами $\{\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \Gamma^{ab}_{\alpha}\}$ подобъекта Γ_2 и фундаментальным объектом $\Lambda^{\alpha a}_{\beta}$.*

8. Композиционное оснащение комплекса. Оснащением многообразия называется процесс присоединения к точкам базы некоторых дополнительных геометрических образов в пространстве P_n, которые позволяют естественным образом определить связность в проективном расслоении [15], при этом связность индуцируется данным оснащением. Классические оснащения были рассмотрены в [15,25]. К таким оснащениям относятся оснащение Картана и нормализация Нордена. Оснащения многообразий плоскостей были описаны в [23].

Осуществим композиционное оснащение (см. [26]) комплекса $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой плоскости L_m $(n-m-1)$-мерную плоскость C_{n-m-1}, не имеющую общих точек с плоскостью L_m, и точку $C = A + \lambda^a A_a$.

Замечание 8. Плоскость C_{n-m-1} является аналогом плоскости Э. Картана. Прямая сумма данной плоскости и плоскости L_m дает все проективное пространство P_n, т.е.

$$L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n.$$

Замечание 9. Точка $C = A + \lambda^a A_a$ принадлежит плоскости L_m и не принадлежит плоскости N_{m-1} — аналогу нормали 2-го рода А. П. Нордена. Прямая сумма данной точки и плоскости N_{m-1} дает плоскость L_m, т.е.

$$C \in L_m, \quad C \notin N_{m-1}, \quad C \oplus N_{m-1} = L_m.$$

Плоскость C_{n-m-1} зададим совокупностью точек $C_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$.

Рассмотрим дифференциалы точек C_α, учтем в них деривационные формулы и выражения базисных точек плоскости C_{n-m-1} и точки C, свернем часть слагаемых при помощи оператора Δ. Тогда

$$\begin{gathered} dC_\alpha = \big(\delta^\beta_\alpha\theta + \omega^\beta_\alpha + (\delta^\beta_\gamma\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\Lambda^{\beta a}_\gamma)\omega^\gamma_a\big)C_\beta + \big(\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha - (\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha + \lambda^a_\gamma\lambda_\alpha\Lambda^{\gamma b}_\beta)\omega^\beta_b\big)A_a + \\ +\big(\Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha - (\lambda_\beta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\lambda_\gamma\Lambda^{\gamma a}_\beta)\omega^\beta_a\big)A, \\ dC = \big(\theta + \lambda^a\omega_a - (\lambda_\beta\Lambda^{\beta a}_\alpha + \lambda^a\lambda_\alpha)\omega^\alpha_a\big)C + \big((\Lambda^{\alpha a}_\beta + \delta^\alpha_\beta\lambda^a)\omega^\beta_a\big)C_\alpha + \\ +\big(\Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a + (\lambda^a\lambda^b\lambda_\alpha - \lambda^a_\beta\Lambda^{\beta b}_\alpha - \lambda^a_\alpha\lambda^b + \lambda^a\lambda_\beta\Lambda^{\beta b}_\alpha)\omega^\alpha_b\big)A_a. \end{gathered}$$

Данные уравнения можно переписать в виде сравнений

$$\begin{gathered} dC_\alpha \equiv \big(\delta^\beta_\alpha\theta + \omega^\beta_\alpha\big)C_\beta + \big(\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha\big)A_a + \big(\Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha\big)A, \\ dC \equiv \big(\theta + \lambda^a\omega_a\big)C + \big(\Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a\big)A_a. \end{gathered}$$

Требуя относительную инвариантность оснащающей плоскости C_{n-m-1} и точки C, из данных сравнений получим дифференциальные уравнения для компонент оснащающего геометрического объекта $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda^a\}$

$$\begin{gathered} \Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a = \lambda^{ab}_\alpha\omega^\alpha_b, \\ \Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha = \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b, \\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a. \end{gathered} \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения (16) можно записать в виде сравнений по модулю базисных форм ω^α_a

$$\begin{gathered} \Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a \equiv 0, \\ \Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha \equiv 0, \\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0, \end{gathered} \tag{17}$$

откуда следует

Теорема 4. *Оснащающий геометрический объект $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda^a\}$ является квазитензором.*

9. Связность 1-го типа.

Теорема 5. *Композиционное оснащение комплекса $K_{(n-m)m}$ позволяет задать связность (1-го типа) в ассоциированном расслоении.*

Доказательство. Учитывая дифференциальные сравнения

$$\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha} + (\Gamma^{ae}_{b\beta}\Lambda^{\beta c}_{\alpha} - \delta^a_b\Gamma^{ec}_{\alpha} - \delta^e_b\Gamma^{ac}_{\alpha})\omega_e + (\delta^a_b\Gamma^c_{e\alpha} + \delta^a_e\Gamma^c_{b\alpha})\omega^e + \delta^c_b\omega^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_\alpha\omega_\beta \equiv 0,$$
$$\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha} + \Gamma^{ac}_{\beta}\Lambda^{\beta b}_{\alpha}\omega_c - \Gamma^{ab}_{e\alpha}\omega^e + \Lambda^{\beta b}_\alpha\omega^a_\beta \equiv 0,$$
$$\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha\beta} + \Gamma^{ac}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma b}_{\beta}\omega_c + (\delta^a_c\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \delta^\gamma_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta})\omega^c_\gamma - \Gamma^{ab}_\beta\omega_\alpha + \Gamma^b_{\alpha\beta}\omega^a \equiv 0,$$
$$\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} + (\Gamma^{\alpha b}_{\beta\mu}\Lambda^{\mu a}_{\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Gamma^{ba}_{\gamma})\omega_b + \delta^\alpha_\beta\Gamma^a_{b\gamma}\omega^b - (\delta^\mu_\beta\Lambda^{\alpha a}_\gamma + \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_\gamma)\omega_\mu - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta \equiv 0,$$
$$\Delta\Gamma^b_{a\alpha} + (\Gamma^{cb}_{a\alpha} + \Gamma^c_{a\beta}\Lambda^{\beta b}_\alpha)\omega_c + \delta^b_a\omega_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta\Gamma^a_{\alpha\beta} + (\Gamma^b_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma a}_\beta + \Gamma^{ba}_{\alpha\beta})\omega_b - \Gamma^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma \equiv 0,$$

соответствующие уравнениям (14) на компоненты объекта связности Γ, и сравнения (17) компонент оснащающего квазитензора λ, получим, что оснащающий квазитензор λ позволяет охватить компоненты объекта групповой связности следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{\Gamma}{}^{b}_{a\alpha} = \delta^b_a\lambda_\alpha, && \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = \Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda^a_\beta,\\
&\overset{0}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha} = \delta^c_b\lambda^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_\alpha\lambda_\beta, && \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^a_\gamma M^{\gamma b}_{\alpha\beta},\\
&\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma} = M^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_\gamma\lambda_\mu, && \overset{01}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma M^{\gamma a}_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{18}$$

где $M^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\big(\delta^\alpha_\gamma\lambda^a_\beta + \Lambda^{\alpha a}_\gamma\lambda_\beta\big)$. □

Обозначим первый охват через

$$\overset{01}{\Gamma} = \Big\{\overset{0}{\Gamma}{}^{b}_{a\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha}, \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta}, \overset{01}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta}\Big\}.$$

10. Связность 2-го типа. Внесем в дифференциальные уравнения (16) формы связности $\tilde\omega$ (13), получим выражения ковариантных дифференциалов компонент объекта λ через ковариантные производные

$$\nabla\lambda^a = \nabla^b_\alpha\lambda^a\omega^\alpha_b, \quad \nabla\lambda^a_\alpha = \nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha\omega^\beta_b, \quad \nabla\lambda_\alpha = \nabla^a_\beta\lambda_\alpha\omega^\beta_a,$$

где ковариантные дифференциалы компонент объекта λ имеют вид

$$\nabla\lambda^a = d\lambda^a + \lambda^b\tilde\omega^a_b - \lambda^a\lambda^b\tilde\omega_b + \tilde\omega^a,$$
$$\nabla\lambda^a_\alpha = d\lambda^a_\alpha + \lambda^b_\alpha\tilde\omega^a_b - \lambda^a_\beta\tilde\omega^\beta_\alpha + \lambda_\alpha\tilde\omega^a + \tilde\omega^a_\alpha,$$
$$\nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\tilde\omega^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha\tilde\omega_a + \tilde\omega_\alpha,$$

а ковариантные производные выражаются по формулам

$$\nabla^b_\alpha\lambda^a = \lambda^{ab}_\alpha - \lambda^c\Gamma^{ab}_{c\alpha} + \lambda^a\lambda^c\Gamma^b_{c\alpha} - \Gamma^{ab}_\alpha,$$
$$\nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^c_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta} + \lambda^a_\gamma\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha\Gamma^{ab}_\beta - \Gamma^{ab}_{\alpha\beta},$$
$$\nabla^a_\beta\lambda_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_\gamma\Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha\Gamma^a_{b\beta} - \Gamma^a_{\alpha\beta}.$$

Продолжая дифференциальные уравнения (16), находим

$$\Delta\lambda^{ab}_\alpha + F^{\beta b}_\alpha\omega^a_\beta - \lambda^a F^{\beta b}_\alpha\omega_\beta + \big(\Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda^{ac}_\beta - \lambda^{ab}_\alpha\lambda^c - \lambda^{cb}_\alpha\lambda^a\big)\omega_c \equiv 0,$$
$$\Delta\lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_\beta\omega^a_\alpha + \big(\Lambda^{\gamma a}_\beta\lambda^b_{\alpha\gamma} + \lambda^{ba}_{\alpha\beta}\big)\omega_b + \big(-M^{\gamma a}_{\alpha\beta} + \delta^\gamma_\alpha\Lambda^{\mu a}_\beta\lambda_\mu\big)\omega_\gamma \equiv 0,$$
$$\Delta\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \big(-\delta^a_c M^{\gamma b}_{\alpha\beta} + \delta^b_c\delta^\gamma_\alpha\lambda^a_\beta\big)\omega^c_\gamma + \Lambda^{\gamma b}_\beta\lambda^a_\gamma\omega_\alpha + \Lambda^{\gamma b}_\beta\lambda^{ac}_{\alpha\gamma}\omega_c + \lambda^b_{\alpha\beta}\omega^a \equiv 0,$$

где $F^{\beta b}_\alpha = \Lambda^{\beta b}_\alpha + \delta^\beta_\alpha\lambda^b$.

Теорема 6. *Ковариантные производные оснащающего квазитензора* λ *в групповой связности* Γ *образуют тензор.*

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из дифференциальных сравнений для ковариантных производных

$$\begin{gathered}\Delta\nabla^b_\alpha\lambda^a + \big(\Lambda^{\beta b}_\alpha\nabla^c_\beta\lambda^a - \lambda^a\nabla^b_\alpha\lambda^c - \lambda^c\nabla^b_\alpha\lambda^a\big)\omega_c \equiv 0,\\ \Delta\nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha + \nabla^b_\beta\lambda_\alpha\omega^a + \Lambda^{\gamma b}_\beta\nabla^c_\gamma\lambda^a_\alpha\omega_c \equiv 0,\\ \Delta\nabla^a_\beta\lambda_\alpha + \big(\nabla^a_\beta\lambda^b_\alpha + \Lambda^{\gamma a}_\beta\nabla^b_\gamma\lambda_\alpha\big)\omega_b \equiv 0.\end{gathered}$$

□

Из данной теоремы вытекает инвариантность обращения в нуль ковариантных производных компонент оснащающего квазитензора λ. Приравнивая их нулю и учитывая формулы (18) для компонент $\Gamma^b_{a\alpha}$, $\Gamma^{ac}_{b\alpha}$, $\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}$, найдем выражения остальных компонент объекта связности Γ

$$\begin{aligned}\overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} &= \lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda_\beta\lambda^a - \lambda^b\mu^a_\alpha,\\ \overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} &= \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha\lambda^{ab}_\beta + 2\lambda^a_\gamma M^{\gamma b}_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha\lambda^b\mu^a_\beta,\\ \overset{02}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} &= \lambda^a_{\alpha\beta} + 2\lambda_\gamma M^{\gamma a}_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{19}$$

где $\mu^a_\alpha = \lambda^a_\alpha - \lambda^a\lambda_\alpha$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Композиционное оснащение комплекса* $K_{(n-m)m}$ *позволяет задать связность* (2-*го типа*)

$$\overset{02}{\Gamma} = \Big\{\overset{0}{\Gamma}{}^{b}_{a\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha}, \overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta}, \overset{02}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta}\Big\}$$

в ассоциированном расслоении.

11. Связность 3-го типа. Если предположить, что связность 1-го типа является средней (см., например, [5]) по отношению к двум связностям, одной из которых является связность 2-го типа, а другой — некоторая связность 3-го типа, т.е.

$$\overset{01}{\Gamma} = \frac{1}{2}\Big(\overset{02}{\Gamma} + \overset{03}{\Gamma}\Big),$$

то, учитывая равенства (18) и (19), получим

$$\begin{aligned}\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} &= -\lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^{\beta b}_\alpha(\lambda^a_\beta + \mu^a_\beta) + \lambda^b\mu^a_\alpha,\\ \overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} &= -\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha\lambda^{ab}_\beta - \lambda_\alpha\lambda^b\mu^a_\beta,\\ \overset{03}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} &= -\lambda^a_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{20}$$

Теорема 8. *Композиционное оснащение комплекса* $K_{(n-m)m}$ *позволяет задать связность* (3-*го типа*)

$$\overset{03}{\Gamma} = \Big\{\overset{0}{\Gamma}{}^{b}_{a\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha}, \overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta}, \overset{03}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta}\Big\}$$

в ассоциированном расслоении.

Доказательство следует из первых выражений (18) и формул (20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2000. — № 31. — С. 8–11.
2. *Белова О. О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей центрированного многообразия Грассмана// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 10–13.

3. *Белова О. О.* Связность 2-го типа в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2007. — № 38. — С. 6–12.
4. *Белова О. О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2008. — № 39. — С. 13–18.
5. *Белова О. О.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 2. — С. 29—67.
6. *Белова О. О.* Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 812–822.
7. *Белова О. О.* Редукция расслоений грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей при нормализации// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *180*. — С. 3–8.
8. *Близникас В. И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1974. — *6*. — С. 43–111.
9. *Бубякин И. В.* О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 с единственным торсом// Мат. заметки СВФУ. — 2017. — *24*, № 2. — С. 3–12.
10. *Бубякин И. В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащих конечное число торсов// Мат. заметки СВФУ. — 2017. — *24*, № 4. — С. 3–16.
11. *Жовтенко О. М. Роль оснащения Бортолотти конгруэнции плоскостей* Диффер. геом. многообр. фигур. — 2000. — № 31. — С. 31–36.
12. *Коннов В. В. Об одном условии редуцируемости главных расслоений и его применении в проективной геометрии подмногообразий* Фундам. прикл. мат. — 2001. — *7*, № 4. — С. 1003–1035.
13. *Кулешов А. В.* Обобщенные связности на комплексе центрированных плоскостей в проективном пространстве// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2010. — № 41. — С. 75–85.
14. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — *2*. — С. 275–382.
15. *Лумисте Ю. Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях// Уч. зап. Тартус. ун-та. — 1965. — *177*. — С. 6–41.
16. *Никитина Е. С., Бубякин И. В.* К геометрии многообразия Сегре $S(m, n)$// Мат. заметки СВФУ. — 2004. — С. 57–62.
17. *Полякова К. В.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием пар касательной и соприкасающейся плоскостей поверхности// Тр. геом. сем. Казан. ун-та. — 1997. — *23*. — С. 99–112.
18. *Полякова К. В.* Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 2. — С. 129–177.
19. *Полякова К. В.* Обобщение деривационных формул проективного пространства// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2009. — № 40. — С. 109–117.
20. *Полякова К. В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 1. — С. 84–94.
21. *Полякова К. В., Шевченко Ю. И.* Способ Лаптева—Лумисте задания связности и горизонтальные векторы// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2012. — № 43. — С. 114–121.
22. *Сафонов Д. А.* Обобщенная аффинная связность и ее вырождение в аффинную связность// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — № 45. — С. 120–125.
23. *Шевченко Ю. И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве// Диффер. геом. многообр. фигур. — 1978. — № 9. — С. 124–133.
24. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград: КГУ, 1998.
25. *Шевченко Ю. И.* Оснащения подмногообразий голономного и неголономного центропроективноых многообразий// Диффер. геом. многообр. фигур. — 1997. — № 28. — С. 86–98.
26. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. — Калининград: КГУ, 2000.
27. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 185–193.
28. *Шевченко Ю. И.* Вырождение плоскостной аффинной связности Столярова// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 2. — С. 155–161.
29. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective Differential Geometry of Submanifolds. — North-Holland, 1993.
30. *Belova O.* The third type bunch of connections induced by an analog of Norden's normalization for the Grassmann-like manifold of centered planes// Miskolc Math. Notes. — 2013. — *14*, № 2. — P. 557–560.

31. *Belova O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes// Mathematics. — 2021. — *9*, № 7. — 782.
32. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Univ. Palackého, 2015.
33. *Polyakova K. V.* Prolongations generated by horizontal vectors// J. Geom. — 2019. — *110*. — 53.

Белова Ольга Олеговна
Балтийский федеральный университет имени И. Канта, Калининград
E-mail: olgaobelova@mail.ru