ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 28–32
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-28-32

УДК 519.28

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ С РАСТУЩЕЙ СТЕПЕНЬЮ

© 2023 г. **В. М. БУРЛАКОВ**

Аннотация. В статье рассматриваются бесконечные произведения биномов с растущей степенью переменной. Даны формулы для вычисления степенных коэффициентов в бесконечных произведениях, представляющих гладкие функции. Приводится условие сходимости бесконечных произведений с растущей степенью.

Ключевые слова: бесконечное произведение, разложение функций, экспоненциальная функция.

INFINITE PRODUCTS OF BINOMIALS WITH INCREASING DEGREE

© 2023 **V. M. BURLAKOV**

Abstract. In this paper, we considered infinite products of binomials with increasing degree of the variable. We present formulas for calculating power coefficients in infinite products representing smooth functions and propose a condition for the convergence of infinite products with increasing degree.

Keywords and phrases: infinite product, function expansion, exponential function.

AMS Subject Classification: 05A15, 11A25, 26A99

Простейшим бесконечным произведением биномов с растущей степенью переменной можно считать переразложение суммы бесконечной геометрической прогрессии в произведение в следующем тождестве

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^k+\ldots=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^n})\ldots \qquad (1)$$

Для $x\in(-1;1)$ это бесконечное произведение биномов с растущей степенью сходится и даёт представление функции $f(x)=(1-x)^{-1}$, то т.е.

$$(1-x)^{-1}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^{2^n}) \qquad (2)$$

Обобщением формулы (2) будут следующие разложения гладких функций $f(x)$ в бесконечные произведения биномов с растущей степенью

$$f(x)=\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^n)^{a_n} \quad \text{или} \quad f(x)=\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^n)^{b_n}, \qquad (3)$$

которые при некоторых a_n и b_n впервые рассматривал Эйлер [5]. При этом согласно критерию сходимости бесконечных произведений [1], такие произведения будут сходиться тогда и только тогда, когда будут сходиться следующие ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\ln(1+x^n) \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{\infty}b_n\ln(1-x^n)$$

Как отыскать коэффициенты a_n и b_n в этих тождествах? Рассмотрим сначала, как найти коэффициенты b_n. Для этого надо второе тождество (3) прологарифмировать, а затем продифференцировать:

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{b_1}{1-x} + \frac{2b_2x}{1-x^2} + \frac{3b_3x^2}{1-x^3} + \ldots + \frac{nb_nx^{n-1}}{1-x^n} + \ldots =$$
$$= b_1(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots) +$$
$$+ 2b_2(x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \ldots + x^{2n+1} + \ldots) +$$
$$+ 3b_3(x^2 + x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + \ldots + x^{3n+2} + \ldots) + \ldots +$$
$$+ mb_m(x^{m-1} + x^{2m-1} + x^{3m-1} + x^{4m-1} + \ldots + x^{mn+m-1} + \ldots) + \ldots.$$

Если положить

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots,$$

то для отыскания b_k получим систему линейных уравнений

$$\sum_{k/m} kb_k = c_{m-1}. \tag{4}$$

В частности, для $f(x) = e^x$ будем иметь $-f'(x)/f(x) = -1$, и из (4) получим $b_n = -\mu(n)/n$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса [2, 3], т.е.

$$e^x = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\mu(n)/n}. \tag{5}$$

Если же взять функцию $f(x) = e^{x^m}$, то $-f'(x)/f(x) = -mx^{m-1}$, и из (4) получим, что

$$e^{x^m} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\frac{m}{n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)}, \tag{6}$$

где полагаем, что $\mu(q) = 0$, если q не целое число. При этом можно утверждать, что бесконечные произведения (4) и (5) сходятся на интервале $(-1; 1)$, поскольку ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)\ln(1-x^n)$$

мажорируются рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-x^n),$$

который сходится на указанном интервале [4]

И теперь, располагая тождествами (5) и (6), можем произвольную экспоненциальную функцию $f(x) = \exp(q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \ldots + q_mx^m + \ldots)$ представить бесконечным произведением биномов с растущей степенью:

$$f(x) = \exp q_0 \cdot \exp q_1x \cdot \exp q_2x^2 \cdot \exp q_3x^3 \cdot \ldots \cdot \exp q_mx^m \cdot \ldots =$$
$$= e^{q_0}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\frac{\mu(n)q_1}{n}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\frac{2}{n}\mu\left(\frac{n}{2}\right)q_2}\ldots\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\frac{m}{n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)q_m}\ldots$$

и таким образом для экспоненциальной функции получаем

$$f(x) = \exp\sum_{m=0}^{\infty}q_mx^m = e^{q_0}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)q_m} \tag{7}$$

Хотя формально в показателях степеней биномов стоят бесконечные суммы, на самом деле для каждого n эти суммы будут конечными:

$$f(x) = \exp \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m = e^{q_0}(1-x)^{-q_1} \cdot (1-x^2)^{\frac{q_1}{2}-q_2} \cdot (1-x^2)^{\frac{q_1}{3}-q_3} \cdot \ldots$$

В системе линейных уравнений (4) сумму по делителям натуральных чисел n можно заменить суммой по всем натуральным $m \leqslant n$. Для этого введём в рассмотрение так называемые *мигающие функции* (см. [2]), которые можно определить следующей формулой

$$\beta_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi hni}{m}\right),$$

и которые принимают такие значения

$$\beta_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = km, \\ 0, & \text{если } n \neq km. \end{cases}$$

Тогда систему уравнений (4) можно переписать в таком виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} kb_k \beta_k(n) = c_{n-1}, \tag{8}$$

а её решение находить по формулам Крамера через мигающие функции:

$$b_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \beta_1(1) & 0 & \ldots & 0 & c_0 \\ \beta_1(2) & 2\beta_2(2) & \ldots & 0 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \beta_1(n-1) & 2\beta_2(n-1) & \ldots & (n-1)\beta_{n-1}(n-1) & c_{n-1} \\ \beta_1(n) & 2\beta_2(n) & \ldots & (n-1)\beta_{n-1}(n) & c_n \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Система (8) удобна ещё тем, что формула (9) даёт общий член последовательности b_n, если она уже задана тем или иным способом. Например, известно, что $b_n = -\mu(n)/n$ для функции $\exp x$. И тогда (9) даёт нам такую формулу для функции Мёбиуса:

$$\mu(n) = \begin{vmatrix} \beta_1(1) & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \beta_1(2) & \beta_2(2) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \beta_1(n-1) & \beta_2(n-1) & \ldots & \beta_{n-1}(n-1) & 0 \\ \beta_1(n) & \beta_2(n) & \ldots & \beta_{n-1}(n) & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим ещё такое тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k\beta_k(m) x^{m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) x^{n-1}$$

где $S(n) = \beta_1(n) + 2\beta_2(n) + 3\beta_3(n) + \ldots + n\beta_n(n)$ — сумма делителей числа n. Отсюда

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}dt}{1-t^n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-x^n) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} S(n) t^{n-1} dt\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S(m)x^m}{m},$$

то есть

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1} = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S(m)x^m}{m}. \tag{10}$$

Как заметил Эйлер [5], в тождестве

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n) x^n$$

коэффициенты $L(n)$ дают количество представлений числа n другими натуральными числами. Поэтому из (10) получаем, что

$$L(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{S(m)x^m}{m}\right)\bigg|_{x=0}.$$

Возьмём ещё такое тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_k(m)x^{m-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^{n-1},$$

где $\tau(n) = \beta_1(n) + \beta_2(n) + \beta_3(n) + \ldots + \beta_n(n)$ — количество делителей числа n. Интегрируя его, получим, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\frac{1}{n}} = \exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau(m)x^m}{m}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь первое из тождеств (3). Для того чтобы найти коэффициенты a_n введём в рассмотрение арифметические функции $\gamma_m(n) = e^{\pi n i/m}\beta_m(n)$. Тогда прологарифмировав и продифференцировав первую из формул (3), получим следующие тождества:

$$\begin{aligned}
-\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{a_1}{1+x} - \frac{2a_2x}{1+x^2} - \frac{3a_3x^2}{1+x^3} - \ldots - \frac{na_nx^{n-1}}{1+x^n} - \ldots = \\
= a_1(\gamma_1(1) + \gamma_1(2)x + \gamma_1(3)x^2 + \gamma_1(4)x^3 + \gamma_1(5)x^4 + \gamma_1(6)x^5 + \ldots) + \\
+ 2a_2(\gamma_2(1) + \gamma_2(2)x + \gamma_2(3)x^2 + \gamma_2(4)x^3 + \gamma_2(5)x^4 + \gamma_2(6)x^5 + \ldots) + \ldots + \\
+ na_n(\gamma_n(1) + \gamma_n(2)x + \gamma_n(3)x^2 + \gamma_n(4)x^3 + \gamma_n(5)x^4 + \gamma_n(6)x^5 + \ldots) + \ldots
\end{aligned}$$

Откуда получается система уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\gamma_k(n) = c_{n-1}, \tag{12}$$

для нахождения коэффициентов a_n в первой формуле (3) для произвольной (гладкой) функции.

Например, если взять $f(x) = (1-x)^{-1}$, то

$$-f'(x)/f(x) = -(1-x)^{-1} = -1 - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^n - \ldots,$$

и подставляя $c_n = -1$ в (12) получим $a_{2^n} = 1$ и $a_m = 0$ для $m \neq 2^n$, т.е. тождество (1).

Произведения, входящие в тождества (3), являются частными случаями произведения биномов $(1 - zx^n)$. Как найти разложение произвольной функции в произведения таких биномов? Как и прежде, прологарифмируем и продифференцируем тождество

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - zx^n)^{a_n};$$

в результате чего получим

$$\begin{aligned}
-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_1z}{1-zx} + \frac{2a_2zx}{1-zx^2} + \frac{3a_3zx^2}{1-zx^3} + \ldots + \frac{na_nzx^{n-1}}{1-zx^n} + \ldots = \\
= a_1(z + z^2x + z^3x^2 + z^4x^3 + z^5x^4 + \ldots) + \\
+ 2a_2(zx + z^2x^3 + z^3x^5 + z^4x^7 + z^5x^9 + \ldots) + \\
+ 3a_3(zx^2 + z^2x^5 + z^3x^8 + z^4x^{11} + z^5x^{14} + \ldots) + \ldots = \\
= a_1(\beta_1(1)z + \beta_1(2)z^2x + \beta_1(3)z^3x^2 + \beta_1(4)z^4x^3 + \beta_1(5)z^5x^4 + \ldots) + \\
+ 2a_2(\beta_2(1)z^{\frac{1}{2}} + \beta_2(2)z^{\frac{2}{2}}x + \beta_2(3)z^{\frac{3}{2}}x^2 + \beta_2(4)z^{\frac{4}{2}}x^3 + \beta_2(5)z^{\frac{5}{2}}x^4 + \ldots) + \\
+ 3a_3(\beta_3(1)z^{\frac{1}{3}} + \beta_3(2)z^{\frac{2}{3}}x + \beta_3(3)z^{\frac{3}{3}}x^2 + \beta_3(4)z^{\frac{4}{3}}x^3 + \beta_3(5)z^{\frac{5}{3}}x^4 + \ldots) + \ldots =
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} ka_k\beta_k z^{\frac{1}{k}}\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} ka_k\beta_k z^{\frac{2}{k}}\right) x + \left(\sum_{k=1}^{\infty} ka_k\beta_k z^{\frac{3}{k}}\right) x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

и для вычисления a_n получаем такую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k\beta_k(n) z^{\frac{n}{k}} = c_{n-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлаков М. П.* Алгебраические структуры математического анализа. — Грозный: Изд-во ЧИГУ, 1991.
2. *Бурлаков В. М., Бурлаков М. П.* Мемуар о бесконечных произведениях. — М.: Изд-во «Ким», 2019.
3. *Бурлаков В. М., Бурлаков М. П.* Второй мемуар о бесконечных произведениях. — М.: Изд-во «Ким», 2020.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1969.
5. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. Т. 1. — М.: ГИФМЛ, 1961.

Валерий Михайлович Бурлаков
Пензенский государственный университет
E-mail: `burlakovmihail@mail.ru`