ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 33–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-33-37

УДК 512.62, 514.16

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ

© 2023 г. И. М. БУРЛАКОВ

Аннотация. В статье рассматривается такое обобщение алгебр кватернионов и гиперкомплексных алгебр Клиффорда над полем комплексных чисел, при котором m-я степень вектора подстилающего пространства будет суммой m-х степеней координат этого вектора.

Ключевые слова: кватернионы, алгебры Клиффорда, циклические алгебры, групповые алгебры, процедура удвоения.

ON A GENERALIZATION OF THE QUATERNION ALGEBRA

© 2023 I. M. BURLAKOV

Abstract. In this paper, we consider a generalization of quaternion algebras and hypercomplex Clifford algebras over the field of complex numbers in which the mth power of a vector of the underlying space is the sum of the mth powers of the coordinates of this vector.

Keywords and phrases: quaternions, Clifford algebras, cyclic algebras, group algebras, doubling procedure.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 15A72

Открытие Гамильтоном кватернионов было знаковым событием в математике и послужило источником многих важных структур математики [1]. Обобщением кватернионов стали алгебры гиперкомплексных чисел Клиффорда, которые нашли приложения в разных разделах математики и теоретической физики [7].

Алгебры Клиффорда $\mathbf{K}_n$ устроены следующим образом. Пусть $\mathbf{V}_n$ — линейное n-мерное пространство и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$ — некоторый его базис. Тогда базисом линейного пространства алгебры $\mathbf{K}_n$ над *подстилающим пространством* $\mathbf{V}_n$ будет совокупность мономов

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2 \dots k_r} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} \cdot \dots \cdot \mathbf{e}_{k_r},$$

где $k_1 < k_2 < \dots < k_r \leqslant n$. Умножение в алгебре $\mathbf{K}_n$ задаётся на некотором базисе $\mathbf{V}_n$ следующими структурными уравнениями:

$$\mathbf{e}_k^2 = 1; \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = -\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k, \ k \neq h; \tag{1}$$

на любые элементы алгебры $\mathbf{K}_n$ умножение распространяется по ассоциативности и дистрибутивности. При этом базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$, векторы которого удовлетворяют структурным уравнениям, называется *каноническим*. Если $\mathbf{V}_n$ вещественное линейное пространство, то алгебра $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(\mathbb{R})$ будет вещественной, а в случае комплексных пространств $\mathbf{V}_n$ алгебра $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(\mathbb{C})$ будет комплексной.

Из (1) следует *фундаментальное тождество*

$$(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 \tag{2}$$

для любого вектора $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbf{V}_n \subset \mathbf{K}_n$. Это тождество лежит в основе разнообразных приложений алгебр Клиффорда.

Алгебры $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(\mathbb{C})$ можно обобщить так, чтобы для любого $m \in \mathbf{N}$ выполнялось следующее *фундаментальное тождество*:

$$(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n)^m = x_1^m + x_2^m + \ldots x_n^m, \tag{3}$$

где $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ — произвольный вектор n-мерного линейного комплексного пространства $\mathbf{V}_n$.

Серия таких алгебр (для каждого $m \geqslant 2$) получается, если для векторов некоторого базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$ в n-мерном линейном комплексном пространстве $\mathbf{V}_n$ задать такой закон умножения:

$$\mathbf{e}_k^m = 1, \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = \alpha_m \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k, \text{ если } k > h, \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = \alpha_m^{m-1} \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k, \text{ если } k < h, \tag{4}$$

где $\alpha_m = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m)$. Такие алгебры были введены в рассмотрение в начале 1970-х гг. М. П. Бурлаковым (см. [3,6]). Они называются *элементальными алгебрами порядка* m и обозначаются $\mathbf{B}_n^m$. Базисом алгебры $\mathbf{B}_n^m$ будут мономы

$$\mathbf{e}_{k_1k_2\ldots k_n} = \mathbf{e}_1^{k_1} \cdot \mathbf{e}_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{e}_n^{k_n},$$

где $0 \leqslant k < m$, так что произвольный элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_n^m$ имеет вид

$$\mathbf{x} = \sum x_{k_1k_2\ldots k_n} \mathbf{e}_{k_1k_2\ldots k_n},$$

и произведение базисных мономов по ассоциативности определяется структурными тождествами (4), а на произвольные элементы алгебры $\mathbf{B}_n^m$ переносится по дистрибутивности.

Структурные уравнения (4) обеспечивают выполнение фундаментального тождества (3). Для малых m и n его проверка не представляет труда. Например, если $m = 3$, и $n = 2$, то

$$(x_1\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_1)^3 = x_1^3 + (1 + \alpha_3 + \alpha_3^2)x_1^2x_2\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2 + (1 + \alpha_3 + \alpha_3^2)x_1x_2^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3,$$

так как $1 + \alpha_3 + \alpha_3^2 = 0$. Однако доказательство тождества (3) для любых элементальных алгебр — задача нетривиальная.

Есть разные варианты доказательства тождества (3), но, пожалуй, самое элегантное принадлежит В. П. Кузьмину. Прежде всего, заметим, что

$$(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \cdot (c\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = (c\mathbf{e}_1 + \alpha_m^{m-1} b\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m y\mathbf{e}_2).$$

Отсюда получается такая цепочка тождеств

$$\begin{aligned}
(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^m &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^{m-2} \cdot (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = \\
&= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^{m-2} \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m^{m-1} y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m y\mathbf{e}_2) = \\
&= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^{m-3} \cdot (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m^{m-1} y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m y\mathbf{e}_2) = \\
&= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^{m-4} \cdot (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m^{2(m-1)} y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m y\mathbf{e}_2)^2 = \ldots = \\
&= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m^{(m-2)(m-1)} y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m y\mathbf{e}_2)^{m-2} = \\
&= (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m^{(m-1)(m-1)} y\mathbf{e}_2) \cdot (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m y\mathbf{e}_2)^{m-1} = (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m y\mathbf{e}_2)^m,
\end{aligned}$$

так как $\alpha_m^{(m-1)(m-1)} = \alpha_m$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^m &= \sum_{k=0}^{m} P_m^k(\alpha_m) x^{m-k} y^k \mathbf{e}_1^{m-k} \cdot \mathbf{e}_2^k = \\
&= (x\mathbf{e}_1 + \alpha_m y\mathbf{e}_2)^m = \sum_{k=0}^{m} \alpha_m^k P_m^k(\alpha_m) x^{m-k} y^k \mathbf{e}_1^{m-k} \cdot \mathbf{e}_2^k,
\end{aligned}$$

поэтому $P_m^k(\alpha_m) = \alpha_m^k P_m^k(\alpha_m)$ или $(1 - \alpha_m^k) P_m^k(\alpha_m)$, т.е. $P_m^k(\alpha_m) = 0$.

Таким образом, формула (3) доказана для любых m и $n = 2$. На любые значения n формула (3) распространяется по индукции. Поскольку

$$\mathbf{e}_{n+1} \cdot (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = \alpha_m (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_{n+1},$$

$$(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_{n+1} = \alpha_m^{m-1} \mathbf{e}_{n+1} \cdot (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n),$$

то по уже доказанному получаем

$$((x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) + x_{n+1}\mathbf{e}_{n+1})^m = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n)^m + x_{n+1}^m = \\ = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m + x_{n+1}^m,$$

и тождество (3) доказано полностью.

Очевидно, что $\mathbf{B}_n^2 = \mathbf{K}_n(\mathbb{C})$, т.е. алгебры $\mathbf{B}_n^m$ обобщают комплексные алгебры Клиффорда. В частности, алгебры $\mathbf{B}_2^m$ представляют собой обобщение комплексных кватернионов, так как $\mathbf{B}_2^2 = \mathbf{K}_2(\mathbb{C}) = \mathbf{H}(\mathbb{C})$. И многие свойства комплексных алгебр Клиффорда имеют свои аналоги в алгебрах $\mathbf{B}_n^m$.

1. Алгебры $\mathbf{K}_n(\mathbb{C})$ и $\mathbf{B}_n^m$ устроены одинаково: для алгебр Клиффорда

$$\mathbf{K}_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} \overbrace{\mathbf{H}(\mathbb{C}) \otimes \ldots \otimes \mathbf{H}(\mathbb{C})}^{k}, & \text{если } n = 2k, \\ \underbrace{\mathbf{H}(\mathbb{C}) \otimes \ldots \otimes \mathbf{H}(\mathbb{C})}_{k} \otimes \mathbb{C}_2(\mathbf{e}), & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{12\ldots n}$ и $\mathbb{C}_2(\mathbf{e})$ — циклическая алгебра второго порядка или алгебра двойных комплексных чисел, а для элементальных алгебр

$$\mathbf{B}_n^m = \begin{cases} \overbrace{\mathbf{B}_2^m \otimes \ldots \otimes \mathbf{B}_2^m}^{k}, & \text{если } n = 2k, \\ \underbrace{\mathbf{B}_2^m \otimes \ldots \otimes \mathbf{B}_2^m}_{k} \otimes \mathbb{C}_m(\mathbf{e}), & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}, \tag{5}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4^{m-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{e}_{2k-1} \cdot \mathbf{e}_{2k}^{m-1} \cdot \mathbf{e}_{2k+1}$ и $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ — циклическая алгебра порядка m, порождённая элементом $\mathbf{e}$.

Действительно, для $\mathbf{B}_1^m = \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_1)$ и $\mathbf{B}_2^m$ формула (5) очевидна. Далее,

$$\mathbf{B}_3^m = \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_3'),$$

где $\mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ — алгебра, порождённая $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, а $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3$. Далее,

$$\mathbf{B}_4^m = \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'),$$

где $\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_4$. Затем

$$\mathbf{B}_5^m = \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4') \otimes \mathbb{C}_2(\mathbf{e}_5'),$$

где $\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4^{m-1} \cdot \mathbf{e}_5$. Затем

$$\mathbf{B}_5^m = \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4') \otimes \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_5', \mathbf{e}_6'),$$

где $\mathbf{e}_6' = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4^{m-1} \cdot \mathbf{e}_6$. И так далее.

2. Обозначим через $\mathbf{S}(\mathbf{A})$ центр алгебры $\mathbf{A}$. Как известно,

$$\mathbf{S}(\mathbf{K}_n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } n = 2k, \\ \mathbb{C}_2(\mathbf{e}), & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{12\ldots n}$ и $\mathbb{C}_2(\mathbf{e})$ — комплексная циклическая алгебра второго порядка или алгебра двойных комплексных чисел. А для любой алгебры $\mathbf{B}_n^m$

$$S(\mathbf{B}_n^m) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } n = 2k, \\ \mathbb{C}_m(\mathbf{e}), & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4^{m-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{e}_{2k-1} \cdot \mathbf{e}_{2k}^{m-1} \cdot \mathbf{e}_{2k+1}$ и $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ — комплексная циклическая алгебра порядка m. Это сразу следует из (5).

Алгебры $\mathbf{B}_2^m$ являются обобщением алгебры комплексных кватернионов, и их свойства схожи со свойствами алгебры $\mathbf{H}(\mathbb{C}) = B_2^2$. И так же, как среди алгебр гиперкомплексных чисел Клиффорда над полем комплексных чисел, алгебра $\mathbf{K}(\mathbb{C})_2$ имеет отдельное название алгебры комплексных кватернионов, так и для алгебр $\mathbf{B}_2^m$ используется отдельное название алгебр *бионов m-го порядка.*

3. Любой элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_2^m$ можно записать так:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{e}_2^2 + \ldots + \mathbf{x}_{m-1}\mathbf{e}_2^{m-1},$$

где $\mathbf{x}_k = x_{k0} + x_{k1}\mathbf{e}_1 + x_{k2}\mathbf{e}_1^2 + \ldots + x_{km-1}\mathbf{e}_1^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_1)$, подобно тому, как для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1\mathbf{e}_2, \quad \text{где} \quad \mathbf{x}_0 = x_{00} + x_{01}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x}_1 = x_{10} + x_{11}\mathbf{e}_1,$$

т.е. алгебры бионов получаются *удвоением* алгебр циклических чисел $\mathbb{C}_m(\mathbf{e}_1)$, так же, как алгебра комплексных кватернионов получается удвоением алгебры двойных чисел $\mathbb{C}_2(\mathbf{e}_1)$.

4. Чтобы сформулировать следующее свойство бионов, имеющее аналог в алгебре комплексных кватернионов, надо обобщить на алгебру $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ операцию *сопряжения* двойных чисел.

Для любого $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e} + x_2\mathbf{e}^2 + \ldots + x_{m-1}\mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, циклическое число

$$\mathbf{x}(\alpha_m) = x_0 + \alpha_m x_1\mathbf{e} + \alpha_m^2 x_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \alpha_m^{m-1} x_{m-1}\mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$$

называется *резольвентой* $\mathbf{x}$, а оператор $\hat{\alpha}_m \colon \mathbb{C}_m(\mathbf{e}) \to \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, такой, что $\hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\alpha_m)$ называется *резольвентным оператором.* При этом $\hat{\alpha}_2(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{x}}$ для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{C}_2(\mathbf{e})$, т.е. резольвентный оператор представляет собой обобщение оператора сопряжения в алгебре двойных комплексных чисел на алгебры циклических чисел любых порядков. И так же, как сопряжение, оператор $\hat{\alpha}_m$ является m-инволютивным автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, т.е.

$$\hat{\alpha}_m(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) + \hat{\alpha}_m(\mathbf{y}), \hat{\alpha}_m(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) \cdot \hat{\alpha}_m(\mathbf{y}), \quad \hat{\alpha}_m^m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$.

5. Для любого $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e} + x_2\mathbf{e}^2 + \ldots + x_{m-1}\mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e}) \subset \mathbf{B}_2^m$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} = \hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{e}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \hat{\alpha}_m^{m-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}),$$

так же, как для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{C}_2(\mathbf{e}_1) \subset \mathbf{B}_2^2 \equiv \mathbf{H}(\mathbb{C})$ имеем такое тождество: $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_2$.

6. В алгебре $\mathbf{B}_2^m$ линейное уравнение $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}$ эквивалентно системе линейных уравнений в алгебре $\mathbf{B}_2^m \equiv \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_1)$ с определителем

$$\Delta(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_{m-1}(\alpha_m) & \ldots & \mathbf{b}_1(\alpha_m^{m-1}) \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0(\alpha_m) & \ldots & \mathbf{b}_2(\alpha_m^{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mathbf{b}_{m-1} & \mathbf{b}_{m-2}(\alpha_m) & \ldots & \mathbf{b}_0(\alpha_m^{m-1}) \end{vmatrix},$$

так как

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{e}_2^2 \ldots \mathbf{x}_{m-1}\mathbf{e}_2^{m-1}) \cdot (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{b}_2\mathbf{e}_2^2 \ldots \mathbf{b}_{m-1}\mathbf{e}_2^{m-1}) \\
&\qquad = (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{b}_0 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{b}_{m-1}(\alpha_m) + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{b}_{m-2}(\alpha_m^2) + \ldots + \mathbf{x}_{m-1} \cdot \mathbf{b}_1(\alpha_m^{m-1}))+ \\
&\qquad + (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{b}_0(\alpha_m) + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{b}_{m-1}(\alpha_m^2) + \ldots + \mathbf{x}_{m-1} \cdot \mathbf{b}_2(\alpha_m^{m-1})) \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + \\
&\qquad + (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{b}_{m-1} + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{b}_{m-2}(\alpha_m) + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{b}_{m-3}(\alpha_m^2) + \ldots + \mathbf{x}_{m-1} \cdot \mathbf{b}_0(\alpha_m^{m-1})) \cdot \mathbf{e}_2^{m-1}.
\end{aligned}$$

Величина $\Delta(\mathbf{b})$ называется *детерминантом* элемента $\mathbf{b} \in \mathbf{B}_2^m$. При этом, если

$$\mathbf{b} = b_0 + b_1\mathbf{e}_2 + b_2\mathbf{e}_2^2 + \ldots + b_{m-1}\mathbf{e}_2^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_2) \subset \mathbf{B}_2^m,$$

где $b_k \in \mathbb{C}$, то

$$\Delta(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} b_0 & b_{m-1} & \ldots & b_1 \\ b_1 & b_0 & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 \end{vmatrix},$$

и $\Delta(\mathbf{b})$ будет называться *детерминантом циклического числа* $\mathbf{b}$.

Детерминант элемента $\mathbf{b} \in \mathbf{B}_2^m$ обладает такими свойствами: во-первых, $\Delta(\mathbf{b}) \in \mathbb{C}$, во-вторых, $\Delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \Delta(\mathbf{c})\Delta(\mathbf{b})$ для любых $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{B}_2^m$, т.е. детерминант является *мультипликативной функцией*, $\Delta \colon \mathbf{B}_2^m \to \mathbb{C}$. Последнее означает, что алгебры $\mathbf{B}_2^m$ являются *композиционными алгебрами* с формой m-й степени, подобно тому, как $\mathbf{B}_2^m \equiv \mathbf{H}(\mathbb{C})$ — композиционная алгебра с квадратичной формой [5]. И тождества $\Delta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = \Delta(\mathbf{c})\Delta(\mathbf{b})$ — это аналог *тождества четырёх квадратов.*

7. Заметим ещё, что для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}(\alpha_m)\cdot\mathbf{x}(\alpha_m^2)\cdot\ldots\cdot\mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}).$$

Это тождество позволяет для элементов любых циклических алгебр $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ ввести в рассмотрение операцию *сопряжения*, полагая

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\alpha_m)\cdot\mathbf{x}(\alpha_m^2)\cdot\ldots\cdot\mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}).$$

Определённое так сопряжение для любых алгебр $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ обладает такими свойствами:

$$\mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{x}} = \Delta(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}$$

для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$. И если $\Delta(\mathbf{x}) \neq 0$, то $\mathbf{x}^{-1} = \overline{\mathbf{x}}/\Delta(\mathbf{x})$.

Мультипликативность детерминанта элементов алгебр $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, $\mathbf{B}_2^m$ лежит в основе приложений этих алгебр. В частности, если детерминант текущего элемента принять за фундаментальную форму на линейном пространстве алгебры $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, то на $2m$-мерном пространстве получим *почти евклидову* геометрию, расстояния в которой даются модулем детерминанта, а движения задаются линейными алгебраическими функциями, у которых детерминант коэффициента равен единице. Такие геометрические структуры называются комплексными циклическими геометриями [4]. Аналогично и на линейном пространстве алгебры $\mathbf{B}_2^m$ возникают геометрические структуры, фундаментальной формой для которых служит детерминант текущего элемента данной алгебры [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова Н. В.* Из истории векторного исчисления. — М.: Изд. МАИ, 1992.
2. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Геометрические структуры линейных алгебр. — LAMBERT, 2019.
3. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф Пресс, 2006.
4. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Изд-во «Ким», 2020.
5. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
6. *Микеш Й., Бурлаков М. П., Юкл М., Бурлаков И. М.* Гиперкомплексные структуры высших порядков. — М.–Оломоуц: Изд-во «Ким», 2020.
7. *Delanghe R., Bracks F., Sommen F.* Clifford Analysis. — Boston–London–Melbourne: Pitnam Publ., 1982.

Бурлаков Игорь Михайлович
Тверской государственный университет
E-mail: don.burlakoff@yandex.ru