ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 38–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-38-43

УДК 512.76

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

© 2023 г. **Н. П. ГУШЕЛЬ**

Аннотация. Изучаются элементарные преобразования, неприводимые дивизоры, сечения и степени стабильности проективных расслоений над алгебраическими кривыми.

Ключевые слова: векторное расслоение, алгебраическая кривая, проективное расслоение, дивизор, элементарное преобразование.

ON ESTIMATING THE NUMBER OF ELEMENTARY TRANSFORMATIONS

© 2023 **N. P. GUSHEL**

Abstract. Elementary transformations, irreducible divisors, sections, and degrees of stability of projective bundles over algebraic curves are studied.

Keywords and phrases: vector bundle, algebraic curve, projective bundle, divisor, elementary transformation.

AMS Subject Classification: 14E05

Любое неразложимое векторное расслоение ранга r над неособой алгебраической кривой рода g может быть получено из тривиального конечным числом $n(g,r)$ элементарных преобразований. Известно, что $n(g,2) \leqslant g+1$ (см. [6]). Доказано (см. [2, с. 50-52]), что $n(g,r) < \deg E + r(2g - \mu^-(E))$. В случае ранга $r \geqslant 3$ не известна точная нижняя грань $n(g,r)$ даже для эллиптических кривых, т.е. при $g = 1$. В данной работе получена точная оценка $n(1,3) \leqslant 5$.

Пусть X — проективное расслоение $\pi : X = P(E) \to C$, где E — векторное расслоение ранга r над неособой неприводимой кривой C рода g над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через $M = O_{P(E)}(1)$ тавтологический пучок Гротендика (по определению $\pi_* M \cong E$) и $L_P = \pi^* O_C(P)$, $P \in C$. Теми же буквами будем обозначать классы дивизоров, соответствующих этим пучкам.

1. Если E — векторное расслоение ранга r над неособой кривой C, $y \in C$ и V_y — одномерное векторное подпространство в слое E_y над точкой y, то однозначно определен эпиморфизм $\alpha : E \to O_y \to 0$ и имеет место точная последовательность пучков:

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} O_y \longrightarrow 0 \tag{1}$$

где $\ker\alpha = \mathrm{elm}_V(E) = E'$ — локально свободный пучок ранга r и

$$\det(E') = \det(E) - y.$$

Последовательность (1) продолжается до коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & O_y^{r-1} \arrow[r] \arrow[u] & E_y \arrow[r, "\alpha_y"] \arrow[u] & O_y \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[u] & E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u] & O_y \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
 & E(-y) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\alpha'"] & E(-y) \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Отметим, что $\ker\alpha' = E(-y) = \mathrm{elm}_{V'}(E')$, где $E(-y) = E \otimes O_C(-y)$, V'_y — $(r-1)$-мерное векторное подпространство в слое E'_y над точкой y.

2. Пусть $E' = \mathrm{elm}_V(E)$. Проективное расслоение $X' = P(E')$ называется элементарным преобразованием расслоения $X = P(E)$ с центром $Y = P(O_y)$; обозначим X' через $\mathrm{elm}_Y(X)$. Имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[rr, "\mathrm{elm}_Y"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X' \arrow[dl, "\pi'"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

где $f : \overline{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром $Y = P(O_y)$, $\Gamma = f^{-1}(Y)$ — исключительный дивизор преобразования f. Пусть $L_y = \pi^{-1}(y)$, где $y = \pi(Y)$, $g : \overline{X} \to X'$ — моноидальное преобразование с центром $Y' = P(O_y^{r-1})$, стягивающее $\overline{L}_y = f^*(L_y) - \Gamma$; тогда $\mathrm{elm}_Y = g \cdot f^{-1}$.

Элементарные преобразования проективных расслоений обобщают проекции линейчатых поверхностей из точки (см. [4]).

3. Если A — подрасслоение E, то имеем два случая в зависимости от того, принадлежит ли точка $Y = P(O_y)$ проективизации фактора $B = E/A$ или не принадлежит.

Пусть $P(O_y) \in$P(E/A); тогда получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[u] & B \arrow[r] \arrow[u] & O_y \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[u] & E \arrow[r] \arrow[u] & O_y \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
 & A \arrow[r, equal] \arrow[u] & A \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

где $B' = \mathrm{elm}_V(B)$.

Пусть $P(O_y) \notin P(E/A)$; тогда получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & 0 & 0 & & \\ & B \arrow[u] \arrow[r, equal] & B \arrow[u] & & \\ 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[u] & E \arrow[r] \arrow[u] & O_y \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & O_y \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\ & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & \end{tikzcd} \tag{4}$$

где $A' = \mathrm{elm}_V(A)$.

4. Векторное расслоение Eназывается нормализованным, если $h^0(E) \neq 0$ и для всякого обратимого пучка L над C при $\deg L < 0$ выполняется $h^0(E \otimes L) = 0$. Если E нормализовано, то $s_1(P(E)) = c_1(E)$ — один из инвариантов $P(E)$.

4.1. Пусть $E = O_C \oplus O_C(D_1) \oplus O_C(D_2)$ нормализовано и $0 \geqslant \deg D_1 \geqslant \deg D_2$, $d_1 = \deg D_1$, $d_2 = \deg D_2$. Тогда $X = P(E)$ имеет минимальные сечения

$$M = Q_1 = P\big(O_C(D_1) \oplus O_C(D_2)\big), \quad Q_2 = P\big(O_C9(D_2)\big) \subset Q_1,$$

$\deg_E Q_2 = -d_1 \geqslant 0$, $Q_2 \equiv M^2 - d_1 \cdot M \cdot L = M \cdot (M - d_1 \cdot L)$, $s_1(X) = d_1 + d_2 \leqslant 0$,

$$\begin{aligned} s_2(X) &= s_1\big(P(E^*)\big) = s_1\Big(P\Big(\big(O_C \oplus O_C(D_1) \oplus O_C(D_2)\big)^*\Big)\Big) = \\ &= s_1\Big(P\Big(O_C \oplus \big(O_C(D_1) \oplus O_C(D_2)\big)^*\Big)\Big) = s_1\Big(P\Big(O_C \oplus O_C(-D_1) \oplus O_C(-D_2)\Big)\Big) = \\ &= s_1\Big(P\Big(O_C \oplus O_C(D_2 - D_1) \oplus O_C(D_2)\Big)\Big) = 2d_2 - d_1 \leqslant 0 \end{aligned}$$

(см. [3]). Заметим, что

$$Q_1 \cong P\Big(O_C \oplus O_C(D_2 - D_1)\Big),$$

$\deg(D_2 - D_1) \leqslant 0$ и $\deg(D_2 - D_1) = -e$, где e — классический инвариант линейчатой поверхности Q_1.

4.2. Пусть $E \cong O_C \oplus E_k \otimes O_C(D)$ — нормализованное векторное расслоение ранга 3, где $\deg D = d$, E_k — неразложимое нормализованное векторное расслоение ранга 2, $s_1(E_k) = k$, $k = 0$ или 1. Согласно [3] возможны следующие случаи: $d < 0$ или $d = 0$, D не эффективен.

Расслоение $X = P\big(O_C \oplus E_k \otimes O_C(D)\big)$ имеет инварианты $s_1(X) = \deg D + \deg E_k = d + k$ и

$$\begin{aligned} s_2(X) &= s_1\big(P(E^*)\big) = s_1\Big(P\Big(\big(O_C(D) \oplus E_k\big)^*\Big)\Big) = s_1\Big(P\big(O_C(-D) \oplus E_k^*\big)\Big) = \\ &= s_1\Big(P\Big(O_C(-D) \oplus \big(E_k \otimes \det E_k^*\big)\Big)\Big) = s_1\Big(P\Big(O_C\,(-D) \oplus \big(E_k \otimes \big(\det E_k\big)^*\big)\Big)\Big) = \\ &= s_1\Big(P\Big(O_C \oplus \Big(E_k \otimes (\det E_k)^* \otimes O_C(D)\Big)\Big)\Big) = \deg\big(E_k \otimes (\det E_k)^* \otimes O_C(D)\big) = 2d - k. \end{aligned}$$

5. Теорема. $n(1,3) \leqslant 5$.

Доказательство. Предъявим последовательность элементарных преобразований, с помощью которых можно получить из $P(E) = P(O_C \oplus O_C \oplus O_C)$ любой из трех видов (см., например, [1]) неразложимых проективных расслоений над эллиптической кривой.

Шаг 1. Пусть в (3) имеем $E = O_C \oplus O_C$, $A = O_C$, $B = O_C$, $y = y_1$; тогда

$$P(O_{y_1}) \in P(O_C), \quad P(O_{y_1}) \in P(O_C), \quad B' = O_C(-y_1).$$

В этом случае из (3) следует, что

$$E' = O_C \oplus O_C(-y_1)$$

(см. также [5]). Пусть теперь в (3) имеем $E = O_C \oplus O_C \oplus O_C$, $A = O_C$, $B = O_C \oplus O_C$, $y = y_1$,

$$P(O_{y_1}) \in P(O_C \oplus O_C), \quad P(O_{y_1}) \in P(O_C);$$

тогда

$$B' = O_C \oplus O_C(-y_1), \quad E' = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1).$$

Шаг 2. Если $E = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1)$, то получим три частных случая.

(i) $P(O_{y_2}) \in P(O_C \oplus O_C(-y_1))$, $P(O_{y_2}) \in P(O_C(-y_1))$. Пусть в (3) имеем $E = O_C \oplus O_C(-y_1)$, и $A = O_C$, $B = O_C(-y_1)$, $y = y_2$; тогда

$$P(O_{y_2}) \in P(O_C), \quad P(O_{y_2}) \in P(O_C(-y_1)), \quad B' = O_C(-y_1 - y_2).$$

В этом случае из (3) следует, что

$$E' = O_C \oplus O_C(-y_1 - y_2)$$

(см. также [5]). Пусть теперь в (3) имеем $E = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1)$, $A = O_C$, $B = O_C \oplus O_C(-y_1)$, $y = y_2$,

$$P(O_{y2}) \in P(O_C \oplus O_C(-y_1)), \quad P(O_{y2}) \in P(O_C);$$

тогда

$$B' = O_C \oplus O_C(-y_1 - y_2), \quad E' = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1 - y_2)O_C.$$

(ii) $P(O_{y_2}) \in P(O_C \oplus O_C(-y_1))$, $P(O_{y_2}) \notin P(O_C(-y_1))$ и $P(O_{y_2}) = R$, где R — базисная точка в линейной системе $|C_0 + f|$; тогда из (4) и [5] следует

$$E' = O_C \oplus O_C(-y_1) \oplus O_C(-y_2).$$

(iii) $E = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1)$, $P(O_{y_2}) \in P(O_C \oplus O_C(-y_1))$, $P(O_{y_2}) \notin P(O_C(-y_1))$, $P(O_{y_2}) \neq R$, где R — базисная точка в линейной системе $|C_0 + f|$; тогда из (4) и [5] следует, что

$$E' = O_C \oplus E_0 \otimes O_C(-y_2),$$

где E_0 — нормализованное неразложимое двумерное векторное расслоение с первым классом Черна, равным 0, и $h^0(E_0) = h^1(E_0) = 0$.

Шаг 3. $E = O_C \oplus E_0 \otimes O_C(-y_2)$, $P(O_{y_3}) \notin P(E_0 \otimes O_C(-y_2))$, $P(O_{y_3}) \in P(O_C)$; тогда из (4) имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & E_0 \otimes O_C(-y_2) \arrow[u] \arrow[r, equal] & E_0 \otimes O_C(-y_2) \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[u] \arrow[r] & O_C \oplus E_0 \otimes O_C(-y_2) \arrow[u] \arrow[r] & O_{y_3} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_C(-y_3) \arrow[u] \arrow[r] & O_C \arrow[u] \arrow[r] & O_{y_3} \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

где E' неразложимо, $c_1(E') = c_1(O_C(-y_3-2y_2)) = -3$, $h^0(E') = 0$, $h^1(E') = 3$. Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow O_C \longrightarrow E' \otimes O_C(y_3) \longrightarrow E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2) \longrightarrow 0.$$

Можно так подобрать $L = O_C(y_3 - y_2)$, что

$$h^0(E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2)) = h^1(E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2)) = 0,$$

например, $y_3 - y_2 \sim 0$. В этом случае $E' \otimes O_C(y_3)$ нормализовано неразложимо и

$$s_1\Big(P\big(E' \otimes O_C(y_3)\big)\Big) = c_1(E' \otimes O_C(y_3)) = 0.$$

Шаг 4. Пусть в (4) вместо E взято E' из (5) и $P(O_{y_4}) \notin P(E_0 \otimes O_C(-y_2))$. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & E_0 \otimes O_C(-y_2) \arrow[u] \arrow[r, equal] & E_0 \otimes O_C(-y_2) \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & E'' \arrow[u] \arrow[r] & E' \arrow[u] \arrow[r] & O_{y_4} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_C(-y_3 - y_4) \arrow[u] \arrow[r] & O_C(-y_3) \arrow[u] \arrow[r] & O_{y_4} \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow O_C \longrightarrow E'' \otimes O_C(y_3 + y_4) \longrightarrow E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2 + y_4) \longrightarrow 0.$$

В этом случае $E'' \otimes O_C(y_3 + y_4)$ нормализовано неразложимо и

$$s_1\Big(P\big(E'' \otimes O_C(y_3 + y_4)\big)\Big) = c_1\big(E'' \otimes O_C(y_3 + y_4)\big) = 2.$$

Шаг 5. Пусть в (3) вместо E взято E'' из (6) и $P(O_{y_5}) \in P(E_0 \otimes O_C(-y_2))$. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & E_0 \otimes O_C(-y_2 - y_5) \arrow[u] \arrow[r] & E_0 \otimes O_C(-y_2) \arrow[u] \arrow[r] & O_{y_5} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E''' \arrow[u] \arrow[r] & E'' \arrow[u] \arrow[r] & O_{y_5} \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \\
 & O_C(-y_3 - y_4) \arrow[u] \arrow[r, equal] & O_C(-y_3 - y_4) \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow O_C \longrightarrow E''' \otimes O_C(y_3 + y_4) \longrightarrow E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2 + y_4 + y_5) \longrightarrow 0.$$

В этом случае $E'' \otimes O_C(y_3 + y_4)$ нормализовано неразложимо и

$$s_1\Big(P\big(E''' \otimes O_C(y_3 + y_4)\big)\Big) = c_1\big(E''' \otimes O_C(y_3 + y_4)\big) = 1.$$

Получены все неразложимые трехмерные проективные расслоения над эллиптической кривой. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гушель Н. П.* Очень обильные дивизоры на проективных расслоениях над эллиптической кривой// Мат. заметки. — 1990. — *47*, № 6. — С. 15–22.
2. *Гушель Н. П.* Об элементарных преобразованиях проективных расслоений над кривыми// Тр. X Междунар. конф. «Колмогоровские чтения». — Ярославль, 2012. — С. 50–52.
3. *Гушель Н. П.* О неприводимых дивизорах, сечениях и степенях стабильности проективных расслоений над кривыми// Мат. IX Всеросс. конф. — Ярославль, 2020. — С. 196–201.
4. *Тюрин А. Н.* Геометрия модулей векторных расслоений// Усп. мат. наук. — 1974. — *29*, № 6. — С. 59–88.
5. *Homma Y.* Projective normality and the defining equations of ample invertible sheaves on elliptic ruled surfaces with negative invariant// Natural Sci. Rept. Ochanomizu Univ. — 1982. — *33*, № 1-2. — P. 17–26.
6. *Nagata M., Maruyama M.* Note on the structure of a ruled surface// J. Reine Angew. Math. — 1970. — *239/240*. — P. 68–73.

Гушель Николай Петрович
Петербургский государственный университет путей сообщения,
Ярославский филиал
E-mail: gushel_n@mail.ru