ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 44–48
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-44-48

УДК 517.958:531.332

УСЛОВИЕ СЕКУЛЯРНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ MCKEAN

© 2023 г. **С. А. ДУХНОВСКИЙ**

Аннотация. В работе исследуется кинетическая система уравнений McKean двух групп частиц с периодическими начальными данными в весовом пространстве. Система сводится к интегро-дифференциальному оператору, содержащему неинтегрируемые члены. Найдено условие секулярности, которое позволяет устранить недиссипативную часть и тем самым свести к нелинейному уравнению в гильбертовом пространстве, что является основным шагом к доказательству стабилизации решения.

Ключевые слова: кинетическая система McKean, ряд Фурье, весовое пространство, задача Коши.

SECULAR CONDITION FOR THE MCKEAN SYSTEM

© 2023 **S. A. DUKHNOVSKII**

Abstract. In this paper, we study the McKean kinetic system for two groups of particles with periodic initial data in the weight space. The system is reduced to an integro-differential operator containing nonintegrable terms. We find a secularity condition that allows one to eliminate the nondissipative part and hence reduce the problem to a nonlinear equation in a Hilbert space; this is the main step towards proving the stabilization of the solution.

Keywords and phrases: McKean kinetic system, Fourier series, weight space, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 35L45, 35L60, 35Q20

1. Введение. Кинетические уравнения играют большую роль для описания динамики частиц [3], в частности, в физической химии. Доказана стабилизация решения систем уравнений к состоянию равновесия в статьях [7,8,12,13] для периодических начальных условий. Кинетические системы являются неинтегрируемыми [6,11], т.е. тест Пенлеве для них не выполнен. Решения системы McKean найдены с помощью различных техник (усеченного ряда Пенлеве, метода G'/G, автомодельное преобразование, бегущей волны) в работах [2,4,5,9,10]. В работе [1] найдено условие секулярности для кинетической модели Карлемана. В данном исследовании будет проведен анализ для нашей системы подобным образом.

Рассмотрим одномерную систему McKean (см. [4, 9–11]):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(w^2 - uw), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\partial_t w - \partial_x w = -\frac{1}{\varepsilon}(w^2 - uw), \tag{2}$$

$$u(x,0) = u^0, \quad w(x,0) = w^0, \tag{3}$$

где $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ — плотности групп частиц со скоростями $c = 1, -1$, ε — параметр Кнудсена из кинетической теории газов, $u^0(x)$, $w^0(x)$ – периодические начальный данные с периодом 2π. Данная система описывает одноатомный разреженный газ, состоящий их двух групп частиц. Система McKean является неинтегрируемой системой, т.е. для нее тест Пенлеве неприменим (см. [9]). Взаимодействие происходит следующим образом. Частица из первой группы, взаимодействуя с частицей второй группы, переходят в две частицы второй группы. Аналогично две частицы второй группы, взаимодействуя друг с другом, переходят в частицу первой группы и второй группы соответственно.

Мы ищем решение для малых возмущений состояния равновесия $w_e^2 = u_e w_e$, $u_e, w_e > 0$ системы (1)–(3)). Положим

$$u = u_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{u}, \quad w = w_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{w}. \tag{4}$$

В этом случае имеем

$$\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{w}^2 - \widehat{u}\widehat{w}), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5}$$

$$\partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} + w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = -\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{w}^2 - \widehat{u}\widehat{w}), \tag{6}$$

$$\widehat{u}\mid_{t=0} = \widehat{u}^0, \quad \widehat{w}\mid_{t=0} = \widehat{w}^0. \tag{7}$$

Для периодических решений с нулевыми средними

$$\widehat{u}(t,x) = u_0(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k(t)e^{ikx}, \quad \widehat{w}(t,x) = w_0(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} w_k(t)e^{ikx},$$

где $\mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$, введем весовые пространства $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma), \mathcal{H}_\sigma$ с нормами

$$\|\widehat{u}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \int\limits_0^\infty e^{2\gamma t}|u_0(t)|^2\,dt + \int\limits_0^\infty e^{2\gamma t}\sum_{k\in\mathbb{Z}_0}|k|^{2\sigma}|u_k(t)|^2\,dt,$$

$$\left|\left|\left|\widehat{u}\mid_{t=0}\right|\right|\right|^2_{\mathcal{H}_\sigma} = |u_0^0|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0}|k|^{2\sigma}|u_k^0|^2;$$

здесь $\gamma > 0$, $\sigma = \mathrm{const}$. Предполагаем, что

$$u_0^0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\widehat{u}^0(x)dx = w_0^0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\widehat{w}^0(x)dx = 0.$$

Перепишем систему (5)–(7) через коэффициенты Фурье для $k \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}u_k + iku_k = -\left(\frac{d}{dt}w_k - ikw_k\right), \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}w_k - ikw_k + \frac{1}{\varepsilon}w_e(w_k - u_k) = -\varepsilon w_e^{1/2}\sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k_1,k_2\in\mathbb{Z}}}(w_{k_1}w_{k_2} - u_{k_1}w_{k_1}), \tag{9}$$

$$u_k\Big|_{t=0} = u_k^0, \quad w_k\Big|_{t=0} = w_k^0 \tag{10}$$

и для $k = 0$

$$\frac{d}{dt}u_0 = -\frac{d}{dt}w_0, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}w_0 + \frac{1}{\varepsilon}w_e(w_0 - u_0) = -\varepsilon w_e^{1/2}\sum_{\substack{k_1+k_2=0,\\ k_1,k_2\in\mathbb{Z}}}(w_{k_1}w_{k_2} - u_{k_1}w_{k_1}), \tag{12}$$

$$u_0\Big|_{t=0} = 0, \quad w_0\Big|_{t=0} = 0. \tag{13}$$

Решая уравнение (8), находим решение

$$u_k = -w_k + (u_k^0 + w_k^0)e^{-ikt} + 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds. \tag{14}$$

Для $k=0$ имеем $u_0=-w_0$.

В результате для w_k получаем имеем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}w_k - ikw_k + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}w_k - 2ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds = \\ = w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}d_k e^{-ikt} + \varepsilon w_e^{1/2}\Big(l_k(w) - 2B_k(w,w)\Big) - \varepsilon w_e^{1/2}T_k^{\mathrm{add}}(w), \qquad (15)$$
$$w_k\big|_{t=0} = w_k^0, \quad k\in\mathbb{Z}_0 = \{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0\}.$$

Здесь $T_k^{\mathrm{add}}(w)$ является оператором возмущения базовой системы

$$\frac{d}{dt}w_k - ikw_k + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}\ w_k - 2ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds = \\ = w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}d_k e^{-ikt} + \varepsilon w_e^{1/2}\Big(l_k(w) - 2B_k(w,w)\Big), \qquad (16)$$
$$w_k\big|_{t=0} = w_k^0, \quad k\in\mathbb{Z}_0 = \{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0\},$$

где

$$d_k = w_e^{1/2}(u_k^0+w_k^0), \quad T_k^{\mathrm{add}}(w) = w_0 l\left(4w_k - (u_k^0+w_k^0)e^{-ikt} - 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds\right),$$
$$l_k(w) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}} (u_{k_1}^0+w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}w_{k_2}, \quad B_k(w,w) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}} w_{k_2}\left(w_{k_1} - ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}w_{k_1}ds\right).$$

Сделаем замену для перехода к однородным начальным данным:

$$w_k = w_k^0\exp\left[l\left(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}\right)t\right] + y_k, \quad y_k\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R};\mathcal{H}_\sigma). \qquad (17)$$

Далее рассматриваем задачу без оператора возмущения. Доказывается, что y_k имеет место бесконечная система дифференциальных уравнений

$$T_k(y_k) \equiv \frac{d}{dt}y_k - iky_k + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}\ y_k - 2ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k ds = \\ = w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k e^{-ikt} + f_k(t)e^{-2w_et/\varepsilon} + \varepsilon w_e^{1/2}\big(L_k(y) - 2B_k(y,y)\big), \quad (18)$$
$$y_k\big|_{t=0} = 0, \quad k\in\mathbb{Z}_0 = \{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0\},$$

где

$$D_k = w_e^{1/2}(u_k^0+w_k^0) - \frac{ikw_e^{1/2}}{ik - w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0, \quad B_k(y,y) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}} y_{k_2}\left(y_{k_1} - ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds\right),$$

$$f_k(t) = \frac{ikw_e}{ik - w_e\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}w_k^0e^{ikt} + \varepsilon w_e^{1/2}\big(f_k^L(t) - 2f_k^B(t)\big), \quad f_k^L(t) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}} (u_{k_1}^0+w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}w_{k_2}^0e^{ik_2t},$$

$$f_k^B(t) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}} w_{k_2}^0e^{ik_2t}\left(w_{k_1}^0e^{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - \frac{ik_1w_{k_1}^0}{2(ik_1 - w_e\frac{1}{\varepsilon})}\Big(e^{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}\Big)\right),$$

$$L_k(y) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}} (u_{k_1}^0+w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}y_{k_2} +$$

$$+\sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}}\left(w^0_{k_2}e^{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\left(y_{k_1}-ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds\right)+\right.$$
$$\left.+y_{k_2}\left(w^0_{k_1}e^{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})t}-\frac{ik_1w^0_{k_1}}{2(ik_1-w_e\frac{1}{\varepsilon})}\left(e^{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})t}-e^{-ik_1t}\right)\right)\right).$$

2. Уравнение для нулевой моды. Из системы (12) для $k=0$ получаем

$$\frac{d}{dt}w_0+2\frac{1}{\varepsilon}w_ew_0=-\varepsilon w_e^{1/2}\left(2w_0w_0+\sum_{\substack{k_1+k_2=0,\\ k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}}\left(w_{k_1}w_{k_2}-u_{k_1}w_{k_2}\right)\right),\quad w_0\big|_{t=0}=0. \tag{19}$$

Перепишем (19) следующим образом:

$$\frac{d}{dt}w_0+2\frac{1}{\varepsilon}w_ew_0=-\varepsilon w_e^{1/2}\big(2w_0w_0-l_0(w)+2B_0(w,w)\big),\quad w_0\big|_{t=0}=0. \tag{20}$$

Здесь $l_0(w)$, $B_0(w,w)$ определены аналогичным образом как и выше для $k\neq 0$. Совершим замену

$$w_k=w_k^0\exp\left[\left(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon}\right)t\right]+y_k,\quad y_k\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}),\quad \|y\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}=\int\limits_0^\infty e^{2\gamma t}|y|^2\,dt.$$

Имеем

$$\frac{d}{dt}y_0+2\frac{1}{\varepsilon}w_ey_0=-\varepsilon w_e^{1/2}\Big(2y_0y_0-f_0(t)e^{-2w_e\frac{1}{\varepsilon}t}-l_0(y)+2B_0(y,y)\Big),\quad y_0\big|_{t=0}=0.$$

3. Конечная аппроксимация. Чтобы построить аппроксимационное решение задачи Коши (5)–(7), введем конечную аппроксимацию бесконечной системы (18) для $m\in\mathbb{N}$:

$$T_k(y_k^{(m)})\equiv\frac{d}{dt}y_k^{(m)}-iky_k^{(m)}+2w_e\frac{1}{\varepsilon}\,y_k^{(m)}-2ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(m)}ds=$$
$$=w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)}e^{-ikt}+f_k^{(m)}(t)e^{-2w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(L_k^{(m)}(y^{(m)})-2B_k^{(m)}(y^{(m)},y^{(m)})\Big), \tag{21}$$
$$y_k^{(m)}\mid_{t=0}=0,\quad k\in\mathbb{Z}_0,\quad |k|\leqslant m.$$

В правой части появился сингулярный член $w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)}e^{-ikt}$, который не принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$. Для его устранения будем искать решение системы (21) в форме

$$y_k^{(m)}=Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)}),\quad z_k^{(m)}\big|_{t=0}=0,\quad Q^{(m)}\in\mathcal{H}_\sigma^{(m)},\quad z^{(m)}\in L_{2,\gamma}(R_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)}),$$

где $z^{(m)}=(z_k^{(m)},\,|k|\leqslant m,\,k\neq 0)$. Тогда

$$z_k^{(m)}=\Big(w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)}-Q_k^{(m)}\Big)e^{-ikt}+f_k^{(m)}(t)e^{-2w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+$$
$$+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(L_k^{(m)}\Big(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)})\Big)-$$
$$-2B_k^{(m)}\Big(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)}),\ Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)})\Big)\Big). \tag{22}$$

В переменных $(z_k^{(m)},Q_k^{(m)})$ система (22) при выполнении условия секулярности

$$w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)}-Q_k^{(m)}=0,\quad |k|=1,\dots,m, \tag{23}$$

запишется в виде

$$z_k^{(m)} = f_k^{(m)}(t)e^{-2w_e \frac{1}{\varepsilon}t} + \varepsilon w_e^{1/2}\Big(L_k^{(m)}\Big(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)})\Big) - \\ - 2B_k^{(m)}\Big(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)})\Big)\Big).$$

Мы получили систему в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$. Положим $y_0 = z_0$. В этом случае для нулевой моды имеем

$$z_0 = -\varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{2w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2z_0z_0 - f_0(t)e^{-2w_e\frac{1}{\varepsilon}t} - l_0(y) + 2B_0(y,y)\Big)ds. \tag{24}$$

Заметим, что здесь для нулевой моды условие секулярности отсутствует.

4. Заключение. Рассмотрена одномерная дискретная система McKean. Найдено нелинейное уравнение для k-й и нулевой моды. Нахождение условия секулярности в дальнейшем позволит установить экспоненциальную стабилизацию решения к положительному состоянию равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева О. А., Духновский С. А.* Условие секулярности кинетической системы Карлемана// Вестн. МГСУ. — 2015. — № 3. — С. 33–40.
2. *Веденяпин В. В., Мингалев И. В., Мингалев О. В.* О дискретных моделях квантового уравнения Больцмана// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 11. — С. 21–38.
3. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 3. — С. 3–51.
4. *Духновский С. А.* Тест Пенлеве и автомодельное решение кинетической модели// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — С. 91–94.
5. *Ильин О. В.* Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла// Теор. мат. физ. — 2012. — *170*, № 3. — С. 481–488.
6. *Линдблом О., Эйлер Н.* Решение уравнений Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати// Теор. мат. физ. — 2002. — *131*, № 2. — С. 522–526.
7. *Радкевич Е. В.* О дискретных кинетических уравнениях// Докл. РАН. — 2012. — *447*, № 4. — С. 369–373.
8. *Радкевич Е. В.* О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения// Совр. мат. Фундам. напр. — 2013. — *47*. — С. 108–139.
9. *Dukhnovsky S. A.* On solutions of the kinetic McKean system// Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2020. — *94*, № 3. — P. 3–11.
10. *Dukhnovsky S. A.* The tanh-function method and the (G'/G)-expansion method for the kinetic McKean system// Differ. Equations Control Processes. — 2021. — № 2. — P. 87–100.
11. *Euler N., Steeb W.-H.* Painlevé test and discrete Boltzmann equations// Austr. J. Phys. — 1989. — *42*. — P. 1–10.
12. *Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A.* Local equilibrium of the Carleman equation// J. Math. Sci. — 2015. — *207*, № 2. — P. 296–323.
13. *Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A., Radkevich E. V.* On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations// J. Math. Sci. — 2018. — *235*, № 4. — P. 393–453.

Духновский Сергей Анатольевич
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru