ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 49–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-49-60

УДК 517.928

ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ О СИНХРОНИЗАЦИИ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ—ДУФФИНГА В СЛУЧАЕ ПРЯМОЙ СВЯЗИ И НАЛИЧИЯ СИММЕТРИИ

© 2023 г. **Д. А. КУЛИКОВ**

Аннотация. Рассматриваются два связанных осциллятора Ван дер Поля—Дуффинга в случае прямой симметричной связи. Показано, что для автоколебательной системы характерна синхронизация колебаний, т.е. наличие в системе устойчивых предельных циклов. Получены асимптотические формулы для соответствующих решений. Обнаружено, что на поведение решений не влияет наличие или отсутствие резонансов собственных частот у линеаризованной задачи.

Ключевые слова: осциллятор Ван дер Поля—Дуффинга, прямая связь, синхронизация, нормальная форма, резонанс собственных частот, устойчивость, автоколебания.

FEATURES OF THE PROBLEM ON SYNCHRONIZATION OF TWO VAN DER POL–DUFFING OSCILLATORS IN THE CASE OF A DIRECT CONNECTION AND THE PRESENCE OF SYMMETRY

© 2023 **D. A. KULIKOV**

Abstract. Two coupled van der Pol–Duffing oscillators are considered in the case of direct symmetric coupling. We show that synchronization of oscillations (i.e., the presence of stable limit cycles) is typical for self-oscillating systems. Asymptotic formulas for the corresponding solutions are obtained. It is found that the behavior of solutions is not affected by the presence or absence of resonances of eigenfrequencies in the linearized problem.

Keywords and phrases: van der Pol–Duffing oscillator, feedforward, synchronization, normal form, resonance of eigenfrequencies, stability, self-oscillations.

AMS Subject Classification: 34C15, 34C23, 34C25

1. Введение. В работе будет рассмотрена одна из возможных постановок задачи о синхронизации двух автоколебательных систем. При этом под синхронизацией понимается классический вариант такого явления. Соответствующие определения, концепции можно найти в монографиях [2,10], а также в статьях [5,11]. В данной работе будет рассмотрен сравнительно редкий вариант постановки задачи, когда связь «прямая» в смысле определений из [2, 5, 10, 11].

Обычно изучают задачи о синхронизации, если связь «диффузионная» («пассивная», «активная», «инерционная» [5]). Напомним, что это приводит, например, к анализу системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 = -\dot{x}_1x_1^2 + bx_1^3 + d_1(x_2 - x_1) + d_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1),$$
$$\ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + x_2 = -\dot{x}_2x_2^2 + bx_2^3 + d_1(x_1 - x_2) + d_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2),$$

где $b, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. В связи с большим числом приложений (см., например, [10, 11]) особым вниманием пользовался вариант, когда коэффициенты d_1, d_2 достаточно малы: $d_1 = \varepsilon d_3$, $d_2 = \varepsilon d_4$, где, в свою очередь, $d_3, d_4 \in \mathbb{R}$. Последний вариант был изучен достаточно подробно (см. [10, 11], а также работы [8, 13]).

В отмеченных работах было показано существование полностью синхронизированных колебаний, когда соответствующая система имеет устойчивый цикл, для которого характерно тождество $x_1(t) = x_2(t)$. Второй вариант представляет противофазный цикл, для которого характерно тождество $x_2(t) = -x_1(t)$. Более того, существует диапазон параметров задачи, когда изучаемая система имеет циклы, для которых $|x_1(t)| \neq |x_2(t)|$, т.е. наличие асимметрических циклов. Такие циклы описывают вариант обобщенной синхронизации. Следует подчеркнуть, что особую сложность при анализе задачи о синхронизации колебаний вызывают обычно вопросы, связанные с исследованием устойчивости соответствующих решений в смысле определений А. М. Ляпунова. Последний вопрос тесно связан с проблемой физической реализации найденных периодических решений.

В работах [8, 13, 14] для анализа задачи о синхронизации колебаний была использована одна из версий метода нормальных форм (нормальных форм Пуанкаре—Дюлака), а также использован подходящий вариант метода Крылова—Боголюбова. В данной работе при анализе соответствующих нелинейных уравнений системы дифференциальных уравнений будет использован подход работ [8, 13, 14], который позволяет отвечать на достаточно широкий спектр вопросов: о существовании, устойчивости и свойствах соответствующих синхронных колебаний.

Следует подчеркнуть, что задачи о синхронизации осцилляторов в случае «диффузионной» связи, как правило, приводят к более богатой, многообразной динамике решений, чем в случае прямой связи, но и случай прямой связи заслуживает внимания и соответствующего анализа. В частности, из-за наличия достаточно большого числа приложений в радиофизике [2] и других разделах теории нелинейных колебаний. Такая связь часто гарантирует синхронизацию автоколебательных систем, когда в обеих их частях устанавливаются устойчивые в смысле классического определения А. М. Ляпунова автоколебательные решения, например, устойчивые (орбитально асимптотически устойчивые) циклы.

2. Постановка задачи. В работе рассматривается задача о взаимодействии (синхронизации) двух одинаковых осцилляторов Ван дер Поля—Дуффинга в случае наличия прямой связи. Согласно работам [2, 5, 10, 11] это с математической точки зрения приводит к необходимости анализа следующей системы из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_1 + (1+\delta_1\varepsilon)x_1 + c(1+\delta_2\varepsilon)x_2 &= -x_1^2\dot{x}_1 + dx_1^2, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_2 + c(1+\delta_2\varepsilon)x_1 + (1+\delta_1\varepsilon)x_2 &= -x_2^2\dot{x}_2 + dx_2^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $c, d, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Наконец, $\gamma = \pm 1$ и нужный вариант будет выбран позже. Далее будем считать, что $c \in (0, 1)$. Вариант $\gamma = 0$ заслуживает отдельного внимания и соответствует критическому случаю в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия.

Сразу подчеркнем, что при $c = 0$ получаем два несвязанных осциллятора Ван дер Поля—Дуффинга, каждый из которых в окрестности нулевого состояния равновесия имеет орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл, если $\gamma = 1$ [9].

Действительно, рассмотрим осциллятор Ван дер Поля—Дуффинга

$$\ddot{x} - 2\varepsilon\dot{x} + (1+\delta_1\varepsilon)x = -\dot{x}x^2 + bx^3.$$

Из изложенного в монографии [9] (см. § 9 из нее) у последнего дифференциального уравнения имеется устойчивый предельный цикл, для которого справедлива асимптотическая формула

$$x = 2\sqrt{2}\varepsilon^{1/2}\cos(t+\varphi_0) + o(\varepsilon),$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Подчеркнем, что последняя асимптотическая формула может быть выписана с большей точностью. Из последнего замечания вытекает, что при $c = 0$ получаем соответствующие периодические решения системы дифференциальных уравнений (1), которые имеют следующий вид:

$$x_1(t,\varepsilon) = 2\sqrt{2}\varepsilon^{1/2}\cos(t+\varphi_1) + o(\varepsilon), \quad x_2(t,\varepsilon) = 2\sqrt{2}\varepsilon^{1/2}\cos(t+\varphi_2) + o(\varepsilon),$$

где φ_1, φ_2 — произвольны и каждый осциллятор совершает колебания, фазы которых не связаны.

Наличие связи, т.е. присутствие коэффициента $c \neq 0$, естественно, меняет динамику осцилляторов (1). Далее в работе будет рассмотрена окрестность нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (1). Подчеркнем, что у системы дифференциальных уравнений (1) при всех значениях параметров существует нулевое состояние равновесия. Далее в работе будет изучаться окрестность нулевого состояния равновесия. Под такой окрестностью, как обычно, будем понимать шар радиуса $\delta > 0$ с центром в нуле фазового пространства (пространства начальных условий), т.е. множество, выделяемое условием $x_1^2+\dot{x}_1^2+x_2^2+\dot{x}_2^2 \leqslant \delta^2$. Для такого анализа будет использован метод нормальных форм (метод нормальных форм Пуанкаре—Дюлака).

Прежде чем перейти к непосредственному использованию метода нормальных форм Пуанкаре—Дюлака, рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия в линейном приближении и изучим устойчивость решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_1 + (1+\delta_1\varepsilon)x_1 + c(1+\delta_2\varepsilon)x_2 = 0,\\ &\ddot{x}_2 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_2 + c(1+\delta_2\varepsilon)x_1 + (1+\delta_1\varepsilon)x_2 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В свою очередь, это приводит к анализу расположения точек спектра операторного пучка, который получаем из системы (2) путем подстановки

$$x_1 = \exp(\lambda t)p_1, \quad x_2 = \exp(\lambda t)p_2,$$

$p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тем самым сводим задачу к анализу вопроса о существовании нетривиальных решений у системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)p_1 + c(1+\delta_2\varepsilon)p_2 = 0,\\ &c(1+\delta_2\varepsilon)p_1 + (\lambda - 2\varepsilon\gamma\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)p_2 = 0. \end{aligned}$$

В итоге, как обычно, вопрос об устойчивости сводится к анализу характеристического уравнения, которое в данном случае имеет следующий вид

$$(\lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)^2 - c^2(1+\delta_2\varepsilon)^2 = 0.$$

Для определения λ получаем два квадратных уравнения

$$\lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + (1+\delta_1\varepsilon) + c(1+\delta_2\varepsilon) = 0, \quad \lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + (1 - c + (\delta_1 - \delta_2)\varepsilon) = 0.$$

Напомним, что $c \in (0,1)$, а $\varepsilon \ll 1$. При $\gamma = -1$ все корни обоих квадратных уравнений лежат в левой полуплоскости и, следовательно, все решения системы дифференциальных уравнений (2) асимптотически устойчивы, напротив, при $\gamma = 1$ решения линейной системы дифференциальных уравнений (2) неустойчивы. Далее будем считать, что вариант с $\gamma = 1$ основной, т.е. нулевое решение системы дифференциальных уравнений (1) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ неустойчиво.

В этом разделе отметим, что при $\varepsilon = 0$ система дифференциальных уравнений (2) приобретает следующий вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 + cx_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + x_2 + cx_1 = 0.$$

Если ее записать в векторной форме, то получаем систему

$$\ddot{x} + Ax = 0, \quad x = \mathrm{colon}(x_1, x_2), \tag{3}$$

где

$$A = A(c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

При $c \in (0,1)$ у матрицы $A(c)$ есть два положительных собственных числа $\lambda_1 = 1 + c$, $\lambda_2 = 1 - c$, которым отвечают собственные элементы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Более того, система (3) имеет следующие периодические решения

$$E_1(t) = \exp(i\sigma_1 t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \overline{E}_1(t) = \exp(-i\sigma_1 t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$
$$E_2(t) = \exp(i\sigma_2 t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \overline{E}_2(t) = \exp(-i\sigma_2 t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

где $\sigma_1 = \sqrt{1+c}$, $\sigma_2 = \sqrt{1-c}$.

Отметим, что σ_1/σ_2, т.е. отношение собственных частот, принимает любое значение, принадлежащее $[1,\infty)$. При $c = 0$, естественно, $\sigma_1/\sigma_2 = 1$ и этот случай соответствует варианту несвязанных осцилляторов, при $c = c_2 = 3/5$ получаем, что $\sigma_1 : \sigma_2 = 2$, а при $c = c_3 = 4/5$ отношение частот равно 3. При $c = c_2$, $c = c_3$ реализуются младшие внутренние резонансы собственных частот. Подчеркнем, что в большинстве задач теории нелинейных колебаний [1, 3] наличие внутренних резонансов существенно влияет на поведение решений с начальными условиями из достаточно малой окрестности состояния равновесия.

Как будет показано далее, в данной задаче ситуация иная и наличие или отсутствие внутренних резонансов, и в том числе «младших» не играет при анализе системы дифференциальных уравнений (1) существенной роли.

Методика анализа системы дифференциальных уравнений (1) следует работам [8, 13, 14], где также изучались задачи синхронизации автоколебаний, но в случае «диффузионной» связи [2, 5, 10, 11]. Такая задача изучена значительно подробнее, ей посвящено большое число публикаций (кроме уже отмеченных, см. например, [5, 10, 11]).

3. Нормальная форма. Решения системы дифференциальных уравнений (1) будем искать (см., например, [8, 13]) в следующем виде:

$$x(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = \varepsilon^{1/2}u(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + \varepsilon v(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + \varepsilon^{3/2}w(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (4)$$

где $z_j = z_j(s)$, $s = \varepsilon t$, $j = 1, 2$, s — «медленное» время, а

$$u(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = \begin{pmatrix}u_1(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)\\u_2(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)\end{pmatrix}, \quad v(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = \begin{pmatrix}v_1(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)\\v_2(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)\end{pmatrix},$$
$$w(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = \begin{pmatrix}w_1(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)\\w_2(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)\end{pmatrix}.$$

Вспомогательные комплекснозначные функции $z_j(s)$ будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z_1' = \varphi_1(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \varepsilon), \quad z_2' = \varphi_2(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \varepsilon), \quad (5)$$

которую принято называть нормальной формой (нормальной формой Пуанкаре—Дюлака). Отметим, что основную роль при анализе структуры окрестности нулевого решения системы дифференциальных уравнений (1) играет не система дифференциальных уравнений (5), а ее «главная» часть

$$z_1' = \psi_1(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2), \quad z_2' = \psi_2(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2), \quad (6)$$

а $\psi_j(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = \varphi_j(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, 0)$, $j = 1, 2$. В системах (5), (6) и далее штрихом обозначена производная по s, т.е.

$$\frac{d}{dt}(G(t, s)) = \frac{\partial G}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial G}{\partial s} = \dot{G} + \varepsilon G'.$$

Положим в равенстве (4)

$$u(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = z_1(s)\exp(i\sigma_1 t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \overline{z}_1(s)\exp(-i\sigma_1 t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} +$$
$$+ z_2(s)\exp(i\sigma_2 t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \overline{z}_2(s)\exp(-i\sigma_2 t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

а также будем считать, что вектор-функции $v, w \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$.

Функция $g(t_1,t_2)=g(t_1,t_2,z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2)\in\Phi(\sigma_1,\sigma_2)$, где $t_1=\sigma_1 t$, $t_2=\sigma_2 t$, если для нее выполнены следующие три свойства.

1. Она достаточно гладко зависит от своих аргументов при всех t_1, t_2 и $|z_j|<\sigma_0$ — некоторой положительной постоянной, $j=1,2$.
2. По переменным t_1, t_2 она имеет период 2π, т.е. справедливы тождества
$$g(t_1+2\pi,t_2,z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2)=g(t_1,t_2+2\pi,z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2)=g(t_1,t_2,z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2).$$
3. Наконец, справедливы равенства
$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(g(t_1,t_2),E_1(t_1))dt_1dt_2=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(g(t_1,t_2),\overline{E}_1(t_1))dt_1dt_2=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(g(t_1,t_2),E_2(t_2))dt_1dt_2=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(g(t_1,t_2),\overline{E}_2(t_2))dt_1dt_2=0, \quad (7)$$
где использована укороченная запись $g(t_1,t_2,z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2)=g(t_1,t_2)$. В последних равенствах
$$E_1(t_1)=\exp(it_1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad E_2(t_2)=\exp(it_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$
а через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$: пусть
$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix},$$
тогда $(\alpha,\beta)=\alpha_1\overline{\beta}_1+\alpha_2\overline{\beta}_2$.

Замечание 1 (об условиях разрешимости)**.** Рассмотрим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений
$$\ddot{y}+Ay=F(t_1,t_2), \quad (8)$$
где
$$A=\begin{pmatrix}1&c\\c&1\end{pmatrix},\quad F(t_1,t_2)=\begin{pmatrix}F_1(t_1,t_2)\\F_2(t_1,t_2)\end{pmatrix},\quad t_j=\sigma_j t,\quad j=1,2.$$
Если $F(t_1,t_2)\in\Phi(\sigma_1,\sigma_2)$, то последняя система дифференциальных уравнений имеет единственное решение $y(t)=y(t_1,t_2)\in\Phi(\sigma_1,\sigma_2)$ (см., например, [4, § 23]). Подчеркнем, что центральную роль в последнем замечании играют условия (равенства) (7), которые принято называть условиями разрешимости системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений (8) (см. [4]).

Приступим теперь к определению членов суммы (4), а также правых частей нормальной формы («укороченной» нормальной формы) (6). Для этого подставим сумму (4) в систему дифференциальных уравнений (1) и выделим слагаемые, пропорциональные $\varepsilon^{1/2}$, ε, $\varepsilon^{3/2}$.

При $\varepsilon^{1/2}$ получим систему дифференциальных уравнений
$$\ddot{u}+A(c)u=0.$$
Последнее равенство выполнено за счет выбора вектор-функции $u=u(t)=u(t_1,t_2,z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2)$.

Для определения v получим аналогичную систему дифференциальных уравнений
$$\ddot{v}+A(c)v=0,$$
у которой есть единственное решение, принадлежащее $\Phi(\sigma_1,\sigma_2)$ (см. замечание 1 об условиях разрешимости). Это решение с необходимостью нулевое ($v=0$).

Содержательная задача получается на третьем шаге, если выделить слагаемые, пропорциональные $\varepsilon^{3/2}$. В результате получаем уравнение
$$\ddot{w}+A(c)w=\Phi_3(t_1,t_2,z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2), \quad (9)$$

где
$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} \Phi_{31}(t_1, t_2, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) \\ \Phi_{32}(t_1, t_2, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) \end{pmatrix}, \quad t_1 = \sigma_1 t, \quad t_2 = \sigma_2 t,$$

$$\begin{aligned}\Phi_{31} = &-2\Big((i\sigma_1 z_1' q_1 - i\sigma_1 \overline{z}_1' \overline{q}_1) + (i\sigma_2 z_2' q_2 - i\sigma_2 \overline{z}_2' \overline{q}_2)\Big) + \\ &+ 2\gamma\Big((i\sigma_1 z_1 q_1 - i\sigma_1 \overline{z}_1 \overline{q}_1) + (i\sigma_2 z_2 q_2 - i\sigma_2 \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big) - \delta_1\Big((z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1) + (z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big) + \\ &- c\delta_2\Big((z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1) - (z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big) + F_{31},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{32} = &-2\Big((i\sigma_1 z_1' q_1 - i\sigma_1 \overline{z}_1' \overline{q}_1) - (i\sigma_2 z_2' q_2 - i\sigma_2 \overline{z}_2' \overline{q}_2)\Big) + \\ &+ 2\gamma\Big((i\sigma_1 z_1 q_1 - i\sigma_1 \overline{z}_1 \overline{q}_1) - (i\sigma_2 z_2 q_2 - i\sigma_2 \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big) - c\delta_2\Big((z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1) + (z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big) - \\ &- \delta_1\Big((z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1) - (z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big) + F_{32},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{31} &= -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\Big((z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1) + (z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big)^3 + d\Big((z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1) + (z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big)^3, \\ F_{32} &= -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\Big((z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1) - (z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big)^3 + d\Big((z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1) - (z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2)\Big)^3.\end{aligned}$$

В последних формулах использованы краткие обозначения: $q_1 = \exp(i\sigma_1 t)$, $q_2 = \exp(i\sigma_2 t)$. Условия разрешимости (7) (см. замечание 1 об условиях разрешимости), примененные к системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений (9), приводят к равенствам, которые после элементарных алгебраических преобразований приводят к системе дифференциальных уравнений (6) для комплекснозначных функций $z_1(s)$, $z_2(s)$.

Эта система приобретает следующий вид
$$\begin{aligned}z_1' &= \left(\gamma - \frac{d_1}{2i\sigma_1}\right) z_1 - \left(\frac{1}{2} z_1 |z_1|^2 + z_1 |z_2|^2\right) + \frac{d}{i\sigma_1}\left(\frac{3}{2} z_1 |z_1|^2 + 3 z_1 |z_2|^2\right), \\ z_2' &= \left(\gamma - \frac{d_2}{2i\sigma_2}\right) z_2 - \left(z_2 |z_1|^2 + \frac{1}{2} z_2 |z_2|^2\right) + \frac{d}{i\sigma_2}\left(3 z_2 |z_1|^2 + \frac{3}{2} z_2 |z_2|^2\right),\end{aligned} \tag{10}$$
где $d_1 = \delta_1 + c\delta_2$, $d_2 = \delta_1 - c\delta_2$. Напомним, что $\gamma = \pm 1$ или 0. Подчеркнем, что в силу специфики системы (1) и, следовательно, системы (6) для вспомогательных комплексных переменных $z_1 = z_1(s)$, $z_2 = z_2(s)$ получаем систему дифференциальных уравнений (10), где структура правых частей не зависит от наличия или отсутствия резонансов, но, естественно, коэффициенты зависят от величин σ_1, σ_2. В итоге получаем нормальную форму, которую в теории нелинейных колебаний принято называть «нерезонансной» [1,3].

Замечание 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений более общего вида
$$\ddot{x} - 2\varepsilon\dot{x} + Ax + \varepsilon Bx = F(x, \dot{x}, \varepsilon),$$
где A, B — матрицы второго порядка, $F(x, \dot{x}, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция от x, $\dot{x}$, $x = \mathrm{colon}(x_1, x_2)$, $\dot{x} = \mathrm{colon}(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, а также $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. При этом вектор-функция $F(x, \dot{x}, \varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет в нуле по переменным x, $\dot{x}$ порядок малости выше первого.

Пусть матрица A имеет собственные числа σ_1^2, σ_2^2 и $\sigma_1 : \sigma_2 = 3$. У последней системы укороченная нормальная форма в ситуации общего положения имеет следующий вид (см., например, [1, гл. 6] или [3, гл. 3, 7])
$$\begin{aligned}z_1' &= (1 + i\beta_1) z_1 + l_{11} z_1 |z_1|^2 + l_{12} z_1 |z_2|^2 + l_{13} z_2^3, \\ z_2' &= (1 + i\beta_2) z_2 + l_{21} z_2 |z_1|^2 + l_{22} z_2 |z_2|^2 + l_{23} z_2 \overline{z_1}^2,\end{aligned}$$
где $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{21}, l_{22}, l_{23} \in \mathbb{C}$. При этом, естественно, $|l_{13}|^2 + |l_{23}|^2 \neq 0$.

Напротив, если $\sigma_1 : \sigma_2 \neq 3$, то в нормальной форме с необходимостью $l_{13} = l_{23} = 0$, т.е. «укороченная» нормальная форма будет «нерезонансной».

Специфика рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (1) проявилась в том, что в изучаемом диапазоне изменения параметров всегда $l_{13} = l_{23} = 0$.

4. Анализ нормальной формы. Для анализа нормальной формы (10) можно и удобно перейти к тригонометрической форме записи комплексных переменных $z_1(s)$, $z_2(s)$. Положим

$$z_1(s) = \rho_1(s)\exp(i\varphi_1(s)), \quad z_2(s) = \rho_2(s)\exp(i\varphi_2(s)). \tag{11}$$

После замены (11) система дифференциальных уравнений (10) перепишется в виде четырех уравнений для амплитудных и фазовых переменных:

$$\rho_1' = \gamma\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 - \rho_1\rho_2^2, \qquad \rho_2' = \gamma\rho_2 - \rho_1^2\rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3, \tag{12}$$

$$\varphi_1' = \frac{d_1}{2\sigma_1} - 3\frac{d\rho_1^2}{2\sigma_1} - 3\frac{d\rho_2^2}{\sigma_1}, \quad \varphi_2' = \frac{d_2}{2\sigma_2} - 3\frac{d\rho_1^2}{\sigma_2} - 3\frac{d\rho_2^2}{2\sigma_2}. \tag{13}$$

Из результатов, изложенных в [8, 13, 14], вытекает, что определяющую роль играет система дифференциальных уравнений для амплитудных переменных ρ_1, ρ_2. В нашем случае это система дифференциальных уравнений (12).

Следует различать два случая. Первый из них выделяется условием $\gamma = -1$ и 0. Второй случай возникает, если $\gamma = 1$.

Лемма 1. *При $\gamma = -1$ или 0 все решения системы дифференциальных уравнений* (12) *стремятся к нулевому состоянию равновесия, если $t \to \infty$.*

Доказательство. При так выбранных γ ($\gamma = -1$ или 0) для системы дифференциальных уравнений (12) можно указать функцию Ляпунова $V(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1^2 + \rho_2^2)/2$. Ее производная в силу системы дифференциальных уравнений

$$D_t V = \gamma(\rho_1^2 + \rho_2^2) - \frac{1}{2}(\rho_1^4 + 4\rho_1^2\rho_2^2 + \rho_2^4) \leqslant -\frac{1}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2 < 0$$

при всех ρ_1, ρ_2 таких, что $\rho_1^2 + \rho_2^2 \neq 0$. Следовательно, (см., например, гл. 4 из монографии [4]),

$$\lim_{t\to\infty}(\rho_1^2 + \rho_2^2) = 0. \qquad \square$$

Из леммы 1 вытекает, в частности, что система дифференциальных уравнений (12) может иметь ненулевые состояния равновесия только при $\gamma = 1$. Отметим, что при $\gamma = 1$ система дифференциальных уравнений (12) диссипативна, т.е. все ее решения с течением времени входят в шар радиуса R с центром в нуле. В нашем случае $R = 2 + \mu$, где μ любая положительная постоянная (см., главу 4 из [4]).

Лемма 2. *Пусть теперь $\gamma = 1$. Тогда система дифференциальных уравнений* (12) *имеет три нетривиальных состояния равновесия*:

$$\rho_1 = \sqrt{2}, \quad \rho_2 = 0; \tag{S_1}$$

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \sqrt{2}; \tag{S_2}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2/3}. \tag{S_3}$$

При этом состояния равновесия (S_1), (S_2) системы дифференциальных уравнений (12) *асимптотически устойчивы, а (S_3) — неустойчивое (седловое) состояние равновесия.*

Доказательство существования состояний равновесия (S_1), (S_2), (S_3) основывается на анализе систем алгебраических уравнений

$$\rho_1\left(1 - \frac{1}{2}\rho_1^2 - \rho_2^2\right) = 0, \quad \rho_2\left(1 - \rho_1^2 - \frac{1}{2}\rho_2^2\right) = 0,$$

у которой есть следующие решения:

$$\rho_1 = \rho_2 = 0; \qquad \rho_1 = \sqrt{2},\ \rho_2 = 0; \qquad \rho_1 = 0,\ \rho_2 = \sqrt{2}; \qquad \rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2/3}.$$

Решение $\rho_1 = \rho_2 = 0$ соответствует нулевому состоянию равновесия S_0, которое неустойчиво.

Анализ устойчивости указанных состояний равновесия использует теорему об устойчивости по первому (линейному) приближению. Это приводит к необходимости анализа матрицы Якоби в точках (S_1), (S_2), (S_3). В нашем случае матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}\rho_1^2 - \rho_2^2 & -2\rho_1\rho_2 \\ -2\rho_1\rho_2 & 1 - \rho_1^2 - \frac{3}{2}\rho_2^2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$J_1 = J|_{S_1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = J|_{S_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = J|_{S_3} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что собственные значения матриц J_1, J_2 лежат в левой полуплоскости, а J_3 имеет собственные числа $\lambda_1 = 2/3$, $\lambda_2 = -2$. Фазовые переменные $\varphi_1 = \varphi_1(s)$, $\varphi_2 = \varphi_2(s)$ находим после интегрирования уравнений (13), где правые части не зависят от φ_1, φ_2. В результате получим, что нормальная форма (10) имеет периодические решения (предельные циклы)

$$z_1 = \sqrt{2}\exp(i\omega_1 s + i\psi_1), \quad z_2 = 0, \qquad \omega_1 = \frac{d_1 - 6d}{2\sigma_1}, \quad \psi_1 \in \mathbb{R}, \tag{C_1}$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{2}\exp(i\omega_2 s + i\psi_2), \qquad \omega_2 = \frac{d_2 - 6d}{2\sigma_2}, \quad \psi_2 \in \mathbb{R}, \tag{C_2}$$

а также инвариантный двумерный тор T_2, заполненный решениями вида

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\exp(i\omega_3 s + i\psi_3), \qquad \omega_3 = \frac{d_1 - 6d}{2\sigma_1}, \\ z_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\exp(i\omega_4 s + i\psi_4), \qquad \omega_4 = \frac{d_2 - 6d}{2\sigma_2}. \end{aligned} \qquad \psi_3, \psi_4 \in \mathbb{R}, \tag{T_2}$$

Подчеркнем, что $\omega_3 = \omega_1$, $\omega_4 = \omega_2$.

В ситуации общего положения тор (T_2) нерезонансный (см. [12, гл. 4]) и заполнен почти периодическими решениями с двумя базисными частотами.

Из результатов работ [8, 13, 14] вытекает справедливость утверждения.

Теорема. *Пусть $\gamma = 1$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система дифференциальных уравнений* (1) *имеет два устойчивых* (*орбитально асимптотически устойчивых*) *цикла $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$, соответствующих* (C_1), (C_2) — *циклам нормальной формы* (10). *Для решений, формирующих цикл $C_1(\varepsilon)$, справедливо асимптотическое равенство*

$$x(t,\varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon^{1/2}\Big(\exp(i\sigma_1(\varepsilon)t + i\psi_1) + \exp(-i\sigma_1(\varepsilon)t - i\psi_1)\Big)a + o(\varepsilon),$$

где $\sigma_1(\varepsilon) = \sigma_1 + \varepsilon\omega_1 + o(\varepsilon)$, $\psi_1 \in \mathbb{R}$.

Для решений, формирующих цикл $C_2(\varepsilon)$, справедлива аналогичная формула:

$$x(t,\varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon^{1/2}\Big(\exp(i\sigma_2(\varepsilon)t + i\psi_2) + \exp(-i\sigma_2(\varepsilon)t - i\psi_2)\Big)b + o(\varepsilon),$$

где $\sigma_2(\varepsilon) = \sigma_2 + \varepsilon\omega_2 + o(\varepsilon)$, $\psi_2 \in \mathbb{R}$.

Наконец, тору (T_2) *соответствует двумерный инвариантный тор $T_2(\varepsilon)$ уже системы дифференциальных уравнений* (1), *сформированный решениями вида*

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon^{1/2}\Big(\Big(&\exp(i\sigma_3(\varepsilon)t + i\psi_3) + \exp(-i\sigma_3(\varepsilon)t - i\psi_3)\Big)a + \\ &+ \Big(\exp(i\sigma_4(\varepsilon)t + i\psi_4) + \exp(-i\sigma_4(\varepsilon)t - i\psi_4)\Big)b\Big) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\psi_3, \psi_4 \in \mathbb{R}$, $\sigma_3(\varepsilon) = \sigma_1 + \varepsilon\omega_3 + o(\varepsilon)$, $\sigma_4(\varepsilon) = \sigma_2 + \varepsilon\omega_4 + o(\varepsilon)$. В ситуации общего положения тор $T_2(\varepsilon)$ нерезонансный (*см.* [12, гл. 4]), *т. к., как правило, отношение $\sigma_3(\varepsilon)/\sigma_4(\varepsilon)$ не является рациональным числом.*

Подчеркнем, что
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$\omega_3 = \omega_1$, $\omega_4 = \omega_2$. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что в автоколебательной системе (1) с физической точки зрения реализуются циклы $C_1(\varepsilon)$ или $C_2(\varepsilon)$. Физически реализуется, конечно, один из них, и этот выбор зависит от начальных условий системы дифференциальных уравнений (1). В приложениях в такой ситуации говорят о бистабильности.

Уместно напомнить, что при $\gamma = -1$ и $\gamma = 0$ все решения системы дифференциальных уравнений (1) с достаточно малыми условиями при $t \to \infty$ приближаются к нулевому состоянию равновесия. Это вытекает из леммы 1 и формы представления решений в виде суммы (4).

5. Некоторые замечания о резонансе $1:2$**.** Напомним, что к младшим резонансам следует отнести резонанс $2:1$ $(1:2)$. В нашем случае это означает, что $\sigma_1 : \sigma_2 = 2$. Такой резонанс реализуется, если $c = 3/5$, а случай, близкий к нему, если $c \approx 3/5$. Изучение системы дифференциальных уравнений (1) в случае реализации резонанса $2:1$ или близкого к нему варианта не приводит к изменению динамики решений изучаемой системы, но уже по иной причине. Она не связана, как в предыдущем случае, с наличием симметрии у системы (1). В данном случае все проще. У системы дифференциальных уравнений (1) отсутствуют квадратичные слагаемые. На втором этапе реализации алгоритма для определения вектор-функции $v(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)$ получаем систему однородных дифференциальных уравнений и в результате находим, что $v = 0$, и условия разрешимости выполнялись вне зависимости от наличия или отсутствия резонанса.

Иная ситуация возникает, если систему дифференциальных уравнений заменить на аналогичную, но содержащую квадратичные слагаемые:
$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_1 + (1 + \delta_1\varepsilon)x_1 + c(1 + \delta_2\varepsilon)x_2 = p_1x_1^2 + p_2x_1\dot{x}_1 + p_3\dot{x}_1^2 - x_1^2\dot{x}_1 + dx_1^3, \\ &\ddot{x}_2 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_2 + (1 + \delta_2\varepsilon)x_2 + c(1 + \delta_1\varepsilon)x_1 = p_1x_2^2 + p_2x_2\dot{x}_2 + p_3\dot{x}_2^2 - x_2^2\dot{x}_2 + dx_2^3, \end{aligned} \tag{14}$$
где в добавленных слагаемых коэффициенты $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$.

Как и в предыдущей части работы (см. п. 3) решения будем искать в виде суммы
$$x(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = \varepsilon u(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + \varepsilon^2 v(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + \ldots \tag{15}$$

Здесь
$$u(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = (z_1q_1 + \overline{z}_1\overline{q}_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z_2q_2 + \overline{z}_2\overline{q}_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z_j = z_j(s), \quad s = \varepsilon t.$$

При этом считаем, что комплекснозначные функции $z_1(s)$, $z_2(s)$ удовлетворяют нормальной форме (6). В целом реализуется близкий к изложенному ранее алгоритм с небольшим, но принципиальным отличием, что сумма (15) содержит разложение по степеням ε. Это характерно для вариантов, при которых реализуется внутренний резонанс $2:1$ (см. более детально в работах [6,7]). После подстановки суммы (15) в систему дифференциальных уравнений (14) и выделения слагаемых при одинаковых степенях ε получаем последовательность систем линейных уравнений. Так, при ε^2 получаем систему для определения $v = v(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)$ следующего вида
$$v_t + A(c_2)v = \Phi_2(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2), \tag{16}$$
где $\Phi_2 = \mathrm{colon}(\Phi_{21}, \Phi_{22})$, $c_2 = 3/5$, $\Phi_{21} = p_1(u_1)^2 + p_2u_1\dot{u}_1 + p_3(\dot{u}_1)^2$, $\Phi_{22} = p_1(u_2)^2 + p_2u_2\dot{u}_2 + p_3(\dot{u}_2)^2$. Из условий ее разрешимости в классе функций $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ с учетом того обстоятельства, что $\sigma_1 = 2\sigma_2$, получаем систему
$$\dot{z}_1 = \left(\gamma - \frac{d_1}{2i\sigma_1}\right)z_1 + l_1z_2^2, \quad \dot{z}_2 = \left(\gamma - \frac{d_2}{2i\sigma_2}\right)z_2 + l_2z_1\overline{z}_2, \tag{17}$$
где, как показали вычисления соответствующих интегралов, что
$$l_1 = \frac{p_2}{2} + i\left(\frac{\sigma p_3}{4} - \frac{p_1}{4\sigma}\right), \quad l_2 = p_2 + i\left(2p_3\sigma - \frac{p_1}{4\sigma}\right), \quad \sigma = \sigma_2 = \sqrt{3/5}.$$

Следовательно, $|l_1|^2 + |l_2|^2 \neq 0$, если, конечно, $p_1^2 + p_2^2 + p_2^3 \neq 0$. Итак, если систему дифференциальных уравнений (1) заменить на систему дифференциальных уравнений (14), в которой присутствуют квадратичные члены, то при реализации в ней резонанса собственных частот 2 : 1 (или близкого к резонансу выбора собственных частот) получаем традиционный вариант нормальной формы (см. систему (17)).

Отметим, что в ситуации общего положения кубические слагаемые не влияют на результат. Подчеркнем, что в работах [6,7] задача о резонансе 2 : 1 (1 : 2) была изучена достаточно подробно. Как было отмечено в этих работах, нормальная форма (17) и, следовательно, система (14) могут иметь периодические решения и в том числе устойчивые. Тем не менее варианты, когда они устойчивы, встречаются «редко» , в очень узком диапазоне параметров (см. [7]). Как правило, такие периодические решения неустойчивы, и, следовательно, физически не реализуемы. Это, в частности, означает, что в постановке задачи для системы дифференциальных уравнений (14) при реализации резонанса 2 : 1 синхронизация колебаний отсутствует.

В данном разделе приведен пример системы дифференциальных уравнений (17), в которой анализ достаточно элементарен. Этот пример имеет скорее иллюстративный характер, поясняющий некоторые предшествующие замечания.

Пусть $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (т.е. $d_1 = d_2 = 0$) и $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 = 1$. В таком случае получим частный случай системы (17)

$$z_1' = \gamma z_1 + z_2^2, \quad z_2' = \gamma z_2 + 2z_1\overline{z}_2. \tag{18}$$

Пусть $z_1 = \rho_1 \cos\varphi$, $z_2 = \rho_2 \sin\varphi$. В полярных координатах она перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\rho_1' = \gamma\rho_1 + \rho_2^2\cos\psi, \qquad &&\rho_2' = \gamma\rho_2 + 2\rho_1\rho_2\cos\psi, \\ &\varphi_1' = \frac{\rho_2^2}{\rho_1}\sin\psi, &&\varphi_2' = -2\rho_1\rho_2\sin\psi, \psi = 2\varphi_2 - \varphi_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Вычитая из удвоенного четвертого уравнения системы (19) третье уравнение, для медленных переменных ρ_1, ρ_2, ψ получаем вспомогательную систему дифференциальных уравнений:

$$\rho_1' = \gamma\rho_1 + \rho_2^2\cos\psi, \quad \rho_2' = \gamma\rho_2 + 2\rho_1\rho_2\cos\psi, \quad \psi' = -\left(4\rho_1 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1}\right)\sin\psi. \tag{20}$$

Система дифференциальных уравнений (20) может иметь одно из двух ненулевых состояний равновесия. Первое из них $S_1 : \rho_1 = -\gamma/\sqrt{2},\ \rho_2 = -\gamma/\sqrt{2},\ \psi = 0$, которое существует, если $\gamma < 0$. Второе из них $S_2 : \rho_1 = \gamma/2,\ \rho_2 = \gamma/\sqrt{2},\ \psi = \pi$. Оно существует, если $\gamma > 0$. Оба этих состояния равновесия неустойчивы.

Нетрудно убедиться, что состояниям равновесия S_1 и S_2 системы дифференциальных уравнений (20) соответствуют состояния равновесия системы (17) — нормальной формы. В свою очередь, им соответствуют периодические решения системы (14), период которых близок к $2\pi/\sigma$. При этом эти периодические решения неустойчивы. Детальное доказательство можно, например, найти в работах [6, 7].

6. Заключение. Как уже отмечалось, для решений системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия характерны два автоколебательных решения: предельные циклы $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$. При этом реализуется один из них. Но в любом случае при наличии прямой связи в данной системе происходит синхронизация, когда обе ее части (осцилляторы) совершают автоколебания, близкие к гармоническим.

Особенностью данной системы, т.е. системы дифференциальных уравнений (1), является то обстоятельство, что динамика не зависит от наличия или отсутствия резонансов собственных частот σ_1 и σ_2. В большинстве задач синхронизации это не так. Наличие младших резонансов (например, $\sigma_1 : \sigma_2 = 3$) приводит к динамической системе, у которой поведение решений принципиально отличается от поведения решений системы, в которой младшие резонансы отсутствуют (например, $\sigma_1 : \sigma_2 \neq 3$).

Уместно отметить, что полученный результат базировался на использовании методов теории динамических систем: метода нормальных форм Пуанкаре—Дюлака, интегральных многообразий. Во всяком случае, этот результат получен не с помощью каких-либо «физических» соображений, а на базе использования строгих математических методов.

Как показало применение метода нормальных форм, полученный результат во многом обязан наличию симметрии в системе (1). В обоих уравнениях оба члена, отвечающие за взаимодействие: $c(1+\delta_2\varepsilon)x_2$ в первом уравнении и $c(1+\delta_2\varepsilon)x_1$ — во-втором, аналогичны. Нарушение такой симметрии, т.е. замены c на c_1 в первом из них, c на c_2 во-втором уравнении, где $c_1 \neq c_2$, но сохраняется резонансность собственных частот, приводит при $\sigma_1 : \sigma_2 \approx 3$ к «резонансной» нормальной форме. Это достаточно радикально меняет динамику решений по сравнению с тем вариантом, когда $\sigma_1 : \sigma_2 \neq 3$.

При $|c| > 1$ с необходимостью нулевое состояние равновесия неустойчиво. Так, при любом $c > 1$ спектр устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (1) имеет при $\varepsilon = 0$ два чисто мнимых собственных значения $\pm i\sqrt{1+c}$ и два действительных $\sqrt{c-1}$, $-\sqrt{c-1}$, знаки которых различны. С физической точки зрения наличие такой «сильной» связи приводит к дестабилизации системы дифференциальных уравнений.

Добавим еще одно замечание. Был рассмотрен вариант, когда $c \in (0,1)$. Аналогичная задача, приводящая к похожим выводам, возникает при $c \in (-1,0)$. Для обоснования последнего замечания следует при $c \in (-1,0)$ повторить все построения с небольшими модификациями.

Подчеркнем, что вариант, когда возможен резонанс $1:1$, а также близкий к нему, в работе не рассматривался ввиду не содержательности такого случая в нашей задаче. Напомним (см. введение), что резонанс $1:1$ (конечно, тоже младший резонанс) в системе дифференциальных уравнений (1) реализуется, если $c = 0$, т.е. когда осцилляторы не связаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных диффренциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. — М.: Мир, 1969.
3. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. *Кузнецов А. П., Паксютов В. И.* О динамике двух связанных осцилляторов Ван дер Поля—Дуффинга с диссипативной связью// Изв. вузов. Прикл. нелин. динамика. — 2003 *v 11. — № 6. — С. 48–63.
6. *Куликов А. Н.* Бифуркация малых периодических решений в случае, близком к резонансу 1:2 для одного класса нелинейных эволюционных уравнений// Динам. сист. — 2012. — *2 (30)*, № 3-4. — С. 241–258.
7. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Локальные бифуркации в уравнениях Кана—Хиллиарда, Курамото—Сивашинского и их обобщениях// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 4. — С. 670–683.
8. *Куликов Д. А.* Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов// Изв. вузов. Прикл. нелин. динамика. — 2006. — *14*, № 5. — С. 120–132.
9. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
10. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю.* Синхронизация. Фундаментальное явление. — М.: Техносфера, 2003.
11. *Aranson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillations// Phys. D. — 1990. — *41*, № 3. — P. 403–449.
12. *Broer H. W., Dumortier F., van Strien S. J., Takens F.* Structures in Dynamics: Dimensional Deterministic Studies. — Amsterdam: North-Holland, 1991.
13. *Kulikov D. A.* Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators// J. Appl. Math. Mech. — 2010. — *74*, № 4. — P. 389–400.

14. *Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes's business cycle model// Nonlin. Dynam. Psychol. Life Sci. — 2021. — *25*, № 1. — P. 93–111.

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: `kulikov_d_a@mail.ru`