ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 61–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-61-70

УДК 517.28, 519.101

О БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ЭЙЛЕРОВА ТИПА

© 2023 г. Е. В. ЛУКЬЯНОВА, М. П. БУРЛАКОВ

Аннотация. В статье рассматривается вывод рекуррентных и общих формул, выражающих количества представлений натурального числа n суммами других натуральных чисел через суммы делителей данного натурального числа.

Ключевые слова: бесконечное произведение, аддитивное разбиение чисел, рекуррентная формула, арифметическая функция.

ON INFINITE PRODUCTS OF EULER TYPE

© 2023 E. V. LUKYANOVA, M. P. BURLAKOV

Abstract. In this paper, we consider recurrent and general formulas expressing the number of representations of a natural number n by sums of other natural numbers in terms of sums of divisors of a given natural number.

Keywords and phrases: infinite product, additive partition of numbers, recurrent formula, arithmetic function.

AMS Subject Classification: 05A15, 11A25, 26A99

Один из основных разделов математического анализа, наряду с дифференциальным и интегральным исчислением, — это теория рядов, т.е. бесконечных сумм, слагаемыми которых являются члены числовых либо функциональных последовательностей. Исторически исследования по теории рядов развивались параллельно с созданием других разделов математического анализа. Примерами могут служить суммирование бесконечно убывающей прогрессии, ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

и некоторые другие бесконечные ряды. Этот ряд послужил образцом для представления других функций степенными рядами. Успех сопутствовал И. Ньютону, которого (наряду с Г. Лейбницем) считают создателем математического анализа. По этому поводу академик В. И. Арнольд сообщает нам следующее: «Интегрирование встречается уже у Архимеда, дифференцирование — у Паскаля и Ферма, связь между обеими операциями была известна Барроу. Что же сделал Ньютон в анализе? В чём его основное математическое открытие? Ньютон изобрёл ряды Тейлора — основное орудие анализа... Ньютон нашёл разложение всех элементарных функций — синуса, экспоненты, логарифма и т. д. — в ряды Тейлора и таким образом убедился, что все встречающиеся в анализе функции, разлагаются в степенные ряды. Эти ряды — один из них так и называется формулой бинома Ньютона (показатель в этой формуле, разумеется, не обязательно натуральное число) — он выписал и постоянно использовал. Ньютон справедливо считал, что все вычисления в анализе надо проводить не путём кратных дифференцирований, а с помощью разложений в степенные ряды... У него есть и сама формула Тейлора в общем виде» (см. [2]).

Помимо степенных рядов Тейлора и Маклорена исследовались ряды, составленные из разных функциональных последовательностей, например, ряды тригонометрических функций, известных нам как ряды Фурье.

Между тем, в математике существуют две основные арифметические операции — сложение и умножение. И потому естественно наряду с бесконечными суммами рассматривать бесконечные произведения.

Систематически бесконечные произведения первым рассматривал Л. Эйлер (1707—1783). В частности, ему принадлежат такие замечательные тождества:

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2x}{\pi(2n-1)}\right)\left(1 + \frac{2x}{\pi(2n-1)}\right),$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\pi n}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi n}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-x})^{-1},$$

где p_n — простые числа, занумерованные по возрастанию (см. [9]). В дальнейшем подобные произведения изучали такие выдающиеся математики, как К. Вейерштрасс, Б. Риман, Л. Дирихле и многие другие (см. [1, 8]).

Среди различных бесконечных произведений, которые рассматривал Эйлер, особое место занимают произведения биномов $(1 + x^n)$. Раскрывая скобки в таком произведении, получим ряд

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\ldots = \\ &= 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + \ldots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n. \end{aligned}$$

Каков закон образования коэффициентов этого ряда? Чтобы понять это, запишем представления натуральных чисел в виде различных не равных между собой слагаемых:

$$\mathbf{1} = \underbrace{1}_{1}, \quad \mathbf{2} = \underbrace{2}_{1}, \quad \mathbf{3} = \underbrace{3}_{1} = \underbrace{1+2}_{2}, \quad \mathbf{4} = \underbrace{4}_{1} = \underbrace{1+3}_{2}, \quad \mathbf{5} = \underbrace{5}_{1} = \underbrace{1+4}_{2} = \underbrace{2+3}_{3}$$

$$\mathbf{6} = \underbrace{6}_{1} = \underbrace{1+5}_{2} = \underbrace{3+3}_{3} = \underbrace{1+2+3}_{4}, \quad \mathbf{7} = \underbrace{7}_{1} = \underbrace{1+6}_{2} = \underbrace{2+5}_{3} = \underbrace{3+4}_{4} = \underbrace{1+2+4}_{5},$$

$$\mathbf{8} = \underbrace{8}_{1} = \underbrace{1+7}_{2} = \underbrace{2+6}_{3} = \underbrace{3+5}_{4} = \underbrace{1+2+5}_{5} = \underbrace{1+3+4}_{6},$$

$$\mathbf{9} = \underbrace{9}_{1} = \underbrace{1+8}_{2} = \underbrace{2+7}_{3} = \underbrace{3+6}_{4} = \underbrace{4+5}_{5} = \underbrace{1+2+6}_{6} = \underbrace{1+3+5}_{7} = \underbrace{2+3+4}_{8},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{10} &= \underbrace{10}_{1} = \underbrace{1+9}_{2} = \underbrace{2+8}_{3} = \underbrace{3+7}_{4} = \underbrace{4+6}_{5} = \underbrace{1+2+7}_{6} = \underbrace{1+3+6}_{7} = \\ &= \underbrace{1+4+5}_{8} = \underbrace{2+3+5}_{9} = \underbrace{1+2+3+4}_{10}, \ldots \end{aligned}$$

Отсюда видно (впервые это заметил Эйлер), что коэффициентами взятого ряда будут числа $l(n)$, равные количеству представлений в виде неупорядоченной суммы неравных положительных слагаемых. Будем говорить, что этот ряд — (*обычная*) *производящая функция последовательности* $l(n)$. Тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n$$

даёт нам представление этой производящей функции в виде бесконечного произведения степенных биномов вида $(1 + x^n)$.

Производящей функцией, или обычной производящей функцией, последовательности чисел $a(n)$ называется формальный ряд $A(t) = a(0)+a(1)t+a(2)t^2+\ldots+a(k)t^k+\ldots$, где t — формальная переменная (см. [6]).

Эйлер нашёл и разложения в бесконечные произведения некоторых других производящих функций. Например, если обозначить $L(n)$ количество неупорядоченных представлений n в виде суммы равных или неравных положительных целых слагаемых, то для производящей функции последовательности $L(n)$ справедливо следующее тождество:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)x^n.$$

Это можно проверить, представив сомножители в произведении в виде сумм прогрессий. Иными словами, полагая

$$(1-x^n)^{-1} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots + x^{kn} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{kn},$$

получим тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{kn} \right) = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + \ldots$$

так что

$$\mathbf{2} = \underbrace{2}_{1}, \quad \mathbf{3} = \underbrace{3}_{1} = \underbrace{1+2}_{2} = \underbrace{1+1+1}_{3}, \quad \mathbf{4} = \underbrace{4}_{1} = \underbrace{3+1}_{2}, \underbrace{2+2}_{3} = \underbrace{2+1+1}_{3} = \underbrace{1+1+1+1}_{5},$$

$$\mathbf{5} = \underbrace{5}_{1} = \underbrace{4+1}_{2} = \underbrace{3+2}_{3} = \underbrace{3+1+1}_{4} = \underbrace{1+2+2}_{5} = \underbrace{1+1+1+2}_{6} = \underbrace{1+1+1+1+1}_{7},$$

$$\mathbf{6} = \underbrace{6}_{1} = \underbrace{5+1}_{2} = \underbrace{4+2}_{3} = \underbrace{3+3}_{4} = \underbrace{1+2+3}_{5} = \underbrace{4+1+1}_{6} = \underbrace{2+2+2}_{7} = \underbrace{2+2+1+1}_{8} = \\ = \underbrace{3+1+1+1}_{9} = \underbrace{2+1+1+1+1}_{10} = \underbrace{1+1+1+1+1+1}_{11},$$

$$\mathbf{7} = \underbrace{7}_{1} = \underbrace{6+1}_{2} = \underbrace{5+2}_{3} = \underbrace{4+3}_{4} = \underbrace{5+1+1}_{5} = \underbrace{4+2+1}_{6} = \underbrace{3+3+1}_{7} = \\ = \underbrace{4+1+1+1}_{8} = \underbrace{3+2+2}_{9} = \underbrace{3+2+1+1}_{10} = \underbrace{3+1+1+1+1}_{11} = \underbrace{2+2+1+1+1}_{12} = \\ = \underbrace{2+2+2+1}_{13} = \underbrace{2+1+1+1+1+1}_{14} = \underbrace{1+1+1+1+1+1+1}_{15}, \ldots$$

Итак, для произведений такого вида

$$P_1(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1} \quad \text{и} \quad P_2(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) \tag{1}$$

получим следующие тождества:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)x^n \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n, \tag{2}$$

где $L(x)$ даёт количество представлений натурального числа n суммами других натуральных чисел, а $l(x)$ даёт количество представлений натурального числа n такими суммами натуральных чисел, в которых нет одинаковых слагаемых (см. [9]). Подобные произведения будем называть *бесконечными произведениями эйлерова типа*.

В теории рядов важную роль играет вопрос сходимости ряда, т.е. существования предела такой последовательности

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \quad \ldots,$$

которая называется *последовательностью частичных сумм ряда*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Аналогично можно поставить вопрос и о сходимости бесконечного произведения

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n, \tag{3}$$

т.е. о существовании предела последовательности

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 \cdot p_2, \quad P_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \quad \ldots, \quad P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n, \quad \ldots,$$

которая называется последовательностью *частичных произведений бесконечного произведения P*. В том случае, когда последовательность P_n имеет конечный предел, говорят, что произведение P сходится, и предел P_n при $n \to \infty$ называют *значением* бесконечного произведения P.

Вопрос сходимости бесконечного произведения можно свести к вопросу сходимости некоторого ряда. Точнее, имеет место следующее простое утверждение (см. [7]).

Теорема (о сходимости бесконечных произведений)**.** *Для того, чтобы бесконечное произведение* (3) *при* $p_n > 0$ *сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \ln p_1 + \ln p_2 + \ln p_3 + \ldots + \ln p_n + \ldots \tag{4}$$

При выполнении этого условия, если L сумма ряда (4)*, то* $P = e^L$.

Заметим ещё, что при исследовании сходимости бесконечного произведения P часто представляется удобным, полагая $p_n = 1 + a_n$, записывать произведение P и ряд (4) в следующем виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n). \tag{5}$$

Тогда из приведённой выше теоремы получается следующее утверждение (см. [7]).

Следствие (из теоремы о сходимости произведений)**.** *Если для достаточно больших n будет* $a_n > 0$ (*или* $a_n < 0$)*, то для сходимости произведения* (5) *необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Приведённые здесь утверждения полностью решают вопрос сходимости бесконечных произведений.

Итак, произведения (2) сходятся в интервале $(-1; 1)$, так как согласно теореме о сходимости бесконечных произведений для сходимости произведений (1) необходимо и достаточно, чтобы сходился такой ряд:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Таким образом, чтобы вычислить значения арифметических функций $L(n)$ или $l(n)$, надо будет последовательно раскрывать скобки в произведениях (1).

Вычислим несколько значений $L(n)$ из тождества

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n) x^n :$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + \ldots)\times$$

$$\times(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^4+x^8+\ldots)\times$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x^6+\ldots)(1+x^7+\ldots)(1+x^8+\ldots)(1+x^9+\ldots)(1+x^{10}+\ldots)=$$
$$=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+42x^{10}+\ldots$$

т.е. $L(1)=1$, $L(2)=2$, $L(3)=3$, $L(4)=5$, $L(5)=7$, $L(6)=11$, $L(7)=15$, $L(8)=22$, $L(9)=30$, $L(10)=42,\ldots$

Вычислим теперь несколько значений $l(n)$ из тождества

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}l(n)x^n:$$
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8)(1+x^9)(1+x^{10})\ldots=$$
$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+\ldots$$

т.е. $l(1)=1$, $l(2)=1$, $l(3)=2$, $l(4)=2$, $l(5)=3$, $l(6)=4$, $l(7)=5$, $l(8)=6$, $l(9)=8$, $l(10)=10,\ldots$

Такой вычислительный алгоритм арифметических функций $L(n)$ и $l(n)$ неудобен тем, что требует умножения большого числа полиномов или степенных рядов. К тому же он никак не связан с канонической структурой натуральных чисел, т.е. с представлением натурального числа n произведением степеней его простых сомножителей, и потому не даёт ни рекуррентных, ни общих формул для вычисления значений $L(n)$ и $l(n)$. Поэтому актуальной представляется задача получения рекуррентных или конечных формул для вычисления значений арифметических функций $L(n)$ и $l(n)$ исходя из канонического разложения натурального числа n на простые сомножители.

Такие формулы были получены одним из авторов этой статьи ещё в середине семидесятых годов прошлого века, хотя впервые опубликованы лишь в 2019 г. в монографии [3], ставшей уже библиографической редкостью. Вывести их можно различными способами, один из которых излагается ниже.

Прологарифмируем, а затем продифференцируем первое из произведений (1). В результате получим, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_1(x)}\left(\frac{dP_1(x)}{dx}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}=\\&=\sum_{m=0}^{\infty}x^m+2\sum_{m=0}^{\infty}x^{2m+1}+3\sum_{m=0}^{\infty}x^{3m+2}+\ldots+k\sum_{m=0}^{\infty}x^{k(m+1)-1}+\ldots=\\&=S(1)+S(2)x+S(3)x^2+S(4)x^3+\ldots+S(n)x^{n-1},\end{aligned}\tag{6}$$

где $S(n)$ получаются суммированием коэффициентов при степенях x в двойной сумме (6).

Чтобы выяснить теоретико-числовой смысл коэффициентов $S(n)$, введём в рассмотрение *мигающие функции* $\beta_m(n)$ (см. [3]), определённые формулой

$$\beta_m(n)=(1+\alpha_m^n+\alpha_m^{2n}+\ldots+\alpha_m^{(m-1)n})/m,$$

где $\alpha_m=\cos(2\pi/m)+i\sin(2\pi/m)$, так что

$$\beta_m(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n=mk,\\ 0, & \text{если } n\neq mk.\end{cases}$$

Выпишем (ради иллюстрации) несколько значений мигающих функций второго порядка

$$\beta_2(n)=\frac{1+(-1)^n}{2}:$$

$\beta_2(0)=1$, $\beta_2(1)=0$, $\beta_2(2)=1$, $\beta_2(3)=0$, $\beta_2(4)=1$, $\beta_2(5)=0$, $\beta_2(6)=1$, $\beta_2(7)=0$, $\beta_2(8)=1$, $\beta_2(9)=0$, $\beta_2(10)=1$, $\beta_2(11)=0$, $\beta_2(12)=1$, $\ldots$; и третьего порядка

$$\beta_3(n)=\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n\right):$$

$$\beta_3(0)=\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^0+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^0\right)=\frac{1+1+1}{3}=1,$$

$$\beta_3(1)=\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^1+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^1\right)=0,$$

$$\beta_3(2)=\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0,$$

так как

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\quad\text{и}\quad\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

Далее всё продолжается периодически, поскольку

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1.$$

С помощью мигающих функций тождество (6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{P_1(x)}\left(\frac{dP_1(x)}{dx}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}= \\
=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots+x^m+\ldots+ \\
+2(x+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11}+\ldots+x^{2m+1}+\ldots)+ \\
+3(x^2+x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+x^{17}+\ldots+x^{3m+2}+\ldots)+\ldots+ \\
+n(x^{n-1}+x^{2n-1}+x^{3n-1}+x^{4n-1}+\ldots+x^{(m+1)n-1}+\ldots)+\ldots+= \\
=\beta_1(1)+\beta_1(2)x+\beta_1(3)x^2+\beta_1(4)x^3+\beta_1(5)x^4+\ldots+\beta_1(n)x^{n-1}+\ldots+ \\
+2(\beta_2(1)+\beta_2(2)x+\beta_2(3)x^2+\beta_2(4)x^3+\beta_2(5)x^4+\ldots+\beta_2(n)x^{n-1}+\ldots)+ \\
+3(\beta_3(1)+\beta_3(2)x+\beta_3(3)x^2+\beta_3(4)x^3+\beta_3(5)x^4+\ldots+\beta_3(n)x^{n-1}+\ldots)+\ldots+ \\
+k(\beta_k(1)+\beta_k(2)x+\beta_k(3)x^2+\beta_k(4)x^3+\beta_k(5)x^4+\ldots+\beta_k(n)x^{n-1}+\ldots)+\ldots= \\
=\sum_{k=1}^{\infty}k\beta_k(1)+x\sum_{k=1}^{\infty}k\beta_k(2)+x^2\sum_{k=1}^{\infty}k\beta_k(3)+\ldots+x^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}k\beta_k(n)= \\
=S(1)+S(2)x+S(3)x^2+S(4)x^3+\ldots+S(n)x^{n-1}+\ldots,
\end{gathered}\tag{7}$$

то есть

$$S(n)=\sum_{k=1}^{\infty}k\beta_k(n)=\beta_1(n)+2\beta_2(n)+3\beta_3(n)+4\beta_4(n)+\ldots+n\beta_n(n).$$

И отсюда видно, что $S(n)$ есть сумма делителей натурального числа n.

С другой стороны, вычислив $P_1'(x)$ из формулы (1) и разделив на $P_1(x)$, равенство (6) можно переписать так:

$$\frac{L(1)+2L(2)x+3L(3)x^2+\ldots+nL(n)x^{n-1}+\ldots}{1+L(1)x+L(2)x^2+L(3)x^3+\ldots+L(n)x^n+\ldots}=\sum_{n=1}^{\infty}S(n)x^{n-1},$$

или, полагая для единообразия $L(0)=1$,

$$\begin{gathered}
L(1)+2L(2)x+3L(3)x^2+\ldots+nL(n)x^{n-1}+\ldots= \\
=(L(0)+L(1)x+L(2)x^2+\ldots+L(n)x^n+\ldots)(S(1)+S(2)x+S(3)x^2+\ldots+S(n)x^{n-1}+\ldots),
\end{gathered}$$

откуда и получается рекуррентная формула для арифметической функции $L(n)$

$$L(n+1)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}L(n-k)S(k+1), \tag{8}$$

полученная М. П. Бурлаковым в 1971 г.

Из этой рекуррентной формулы проистекает и формула общего члена для арифметической функции $L(n)$. Чтобы её найти, запишем такую систему линейных уравнений

$$\begin{gathered}
L(1)=1,\\
2L(2)=L(1)S(1)+S(2),\\
3L(3)=L(2)S(1)+L(1)S(2)+S(3),\\
4L(4)=L(3)S(1)+L(2)S(2)+L(1)S(3)+S(4)\ldots,\\
nL(n)=L(n-1)S(1)+L(n-2)S(2)+L(n-3)S(3)+\ldots+L(1)S(n-1)+S(n)\ldots,
\end{gathered}$$

которая сразу следует из рекуррентной формул (3) и (5), и перепишем её так:

$$\begin{gathered}
L(1)=1,\\
S(1)L(1)-2L(2)=-S(2),\\
S(2)L(1)+S(1)L(2)-3L(3)=-S(3),\\
S(3)L(1)+S(2)L(2)+S(1)L(3)-4L(4)=-S(4)\ldots,\\
S(n-1)L(1)+S(n-2)L(2)+S(n-3)L(3)+\ldots+S(1)L(n-1)-nL(n)=-S(n)\ldots,
\end{gathered}$$

откуда видно, что эта бесконечная система линейных уравнений с неизвестными $L(n)$ *треугольная*, а потому из неё значения арифметической функции $L(n)$ можно последовательно находить по формулам Крамера:

$$\begin{aligned}
&L(1)=1,\\
&L(2)=\begin{vmatrix}1&1\\S(1)&-S(2)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&0\\S(1)&-2\end{vmatrix},\\
&L(3)=\begin{vmatrix}1&0&1\\S(1)&-2&-S(2)\\S(2)&S(1)&-S(3)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&0&0\\S(1)&-2&0\\S(2)&S(1)&-3\end{vmatrix},
\end{aligned}$$

и так далее, и в общем случае получается, что

$$L(n)=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\begin{vmatrix}1&0&0&\ldots&1\\S(1)&-2&0&\ldots&-S(2)\\S(2)&S(1)&-3&\ldots&-S(3)\\\vdots&\vdots&\vdots&\ldots&\vdots\\S(n-1)&S(n-2)&S(n-3)&\ldots&-S(n)\end{vmatrix}. \tag{9}$$

Это и есть формула общего члена для арифметической функции $L(n)$, выражающая $L(n)$ через $S(1),S(2),S(3),\ldots,S(n)$.

Вычислим по этой формуле несколько значений $L(n)$.

$$\begin{aligned}
&L(2)=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1\\S(1)&-S(2)\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1\\1&-3\end{vmatrix}=2,\\
&L(3)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&0&1\\S(1)&-2&-S(2)\\S(2)&S(1)&-S(3)\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-2&-3\\3&1&-4\end{vmatrix}=\frac{18}{6}=3,\\
&L(4)=-\frac{1}{24}\begin{vmatrix}1&0&0&1\\S(1)&-2&0&-S(2)\\S(2)&S(1)&-3&-S(3)\\S(3)&S(2)&S(1)&-S(4)\end{vmatrix}=-\frac{1}{24}\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&-2&0&-3\\3&1&-3&-4\\4&3&1&-7\end{vmatrix}=
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{24}\begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & -11 \end{vmatrix} = \frac{66+4+36+14}{24} = 5,$$

$$L(5) = \frac{1}{120}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ S(1) & -2 & 0 & 0 & -S(2) \\ S(2) & S(1) & -3 & 0 & -S(3) \\ S(3) & S(2) & S(1) & -4 & -S(4) \\ S(4) & S(3) & S(2) & S(1) & -S(5) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{120}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & -4 \\ 4 & 3 & 1 & -4 & -7 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{120}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & -7 \\ 3 & 1 & -6 & -11 \\ 4 & 3 & 1 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{60}\begin{vmatrix} -3 & 0 & -9 \\ 1 & -4 & -17 \\ 3 & 1 & -21 \end{vmatrix} = \frac{420}{60} = 7,$$

т.е.

$$L(1) = 1, L(2) = 2, L(3) = 3, L(4) = 5, L(5) = 7, \ldots$$

Можно показать, что формулы, аналогичные (8) и (9), справедливы и для арифметической функции $l(n)$, а именно имеет место рекуррентная формула

$$l(n+1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} l(n-k)S_1(k+1) \tag{10}$$

и формула общего члена

$$l(n) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ S_1(1) & -2 & 0 & \ldots & -S_1(2) \\ S_1(2) & S_1(1) & -3 & \ldots & -S_1(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ S_1(n-1) & S_1(n-2) & S_1(n-3) & \ldots & -S_1(n) \end{vmatrix}, \tag{11}$$

где $S_1(n)$ — это сумма нечётных делителей натурального числа n.

Вычислим по этой формуле несколько значений $l(n)$:

$$l(2) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_1(1) & -S_1(2) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$l(3) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ S_1(1) & -2 & -S_1(2) \\ S_1(2) & S_1(1) & -S_1(3) \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{12}{6} = 2,$$

$$l(4) = -\frac{1}{24}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ S_1(1) & -2 & 0 & -S_1(2) \\ S_1(2) & S_1(1) & -3 & -S_1(3) \\ S_1(3) & S_1(2) & S_1(1) & -S_1(4) \end{vmatrix} = -\frac{1}{24}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{24}\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \frac{-30-2-6-10}{24} = 2,$$

$$l(5) = \frac{1}{120}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ S_1(1) & -2 & 0 & 0 & -S_1(2) \\ S_1(2) & S_1(1) & -3 & 0 & -S_1(3) \\ S_1(3) & S_1(2) & S_1(1) & -4 & -S_1(4) \\ S_1(4) & S_1(3) & S_1(2) & S_1(1) & -S_1(5) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{120}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{120}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -4 & -5 \\ 4 & 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{60}\begin{vmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & -11 \end{vmatrix} = \frac{44+2+8+6}{20} = 3,$$

$$l(1)=1, \quad l(2)=1, \quad l(3)=2, \quad l(4)=2, \quad l(5)=3.$$

Доказательство формул (10) и (11) базируется на одном тождестве принадлежащем Эйлеру (см. [7]):

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})^{-1}.$$

Доказательство этого тождества использует формулу разности квадратов: с одной стороны,

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots(1-x^{2n})\ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^n)\ldots} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n),$$

а с другой стороны, сокращая в левой части этого тождества все множители с чётными показателями, будем иметь тождество

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots(1-x^{2n})\ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^n)\ldots} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})^{-1}.$$

Таким образом, можем записать, что

$$P_2(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n.$$

Далее, как и прежде прологарифмируем и продифференцируем это тождество, и в результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_2(x)}\left(\frac{dP_2(x)}{dx}\right) &= \frac{1}{1-x} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{5x^4}{1-x^5} + \ldots + \frac{(2n-1)x^{2(n-1)}}{1-x^{2n-1}} + \ldots = \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots + \\
&\quad + 3(x^2 + x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + \ldots + x^{3n-1} + \ldots) + \\
&\quad + 5(x^4 + x^9 + x^{14} + x^{19} + x^{24} + \ldots + x^{5n-1} + \ldots) + \ldots = \\
&= \beta_1(1) + \beta_1(2)x + \beta_1(3)x^2 + \beta_1(4)x^3 + \cdots + \beta_1(n)x^{n-1} + \ldots + \\
&\quad + 3(\beta_3(1) + \beta_3(2)x + \beta_3(3)x^2 + \beta_3(4)x^3 + \cdots + \beta_3(n)x^{n-1} + \ldots) + \\
&\quad + 5(\beta_5(1) + \beta_5(2)x + \beta_5(3)x^2 + \beta_5(4)x^3 + \cdots + \beta_5(n)x^{n-1} + \ldots) + \cdots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\beta_{2n-1}(1) + x\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\beta_{2n-1}(2) + x^2\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\beta_{2n-1}(3) + \ldots + \\
&\quad + x^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\beta_{2n-1}(n) + \ldots = \\
&= S_1(1) + S_1(2)x + S_1(3)x^2 + S_1(4)x^3 + \ldots + S_1(n)x^{n-1} + \ldots,
\end{aligned}$$

так как

$$S_1(n) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\beta_{2n-1}(n) =$$
$$= \beta_1(n) + 3\beta_3(n) + 5\beta_5(n) + 7\beta_7(n) + \ldots + (2k-1)\beta_{2k-1}(n),$$

где суммирование ведётся до k, для которого $n \leqslant 2k-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987.
2. *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. — М.: Наука, 1989.
3. *Бурлаков В. М., Бурлаков М. П.* Мемуар о бесконечных произведениях. — М.: Изд-во «Ким», 2019.
4. *Бурлаков М. П.* Дополнительные главы алгебры. Методические указания. — Грозный–ЧИГУ, 1987.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел». — М.: Наука, 1972.
6. *Рыбников К. А.* Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. — М.: Наука, 1982.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. — М.: Наука, 1987.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1985.
9. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. Т. 1. — М: ГИФМЛ, 1961.

Лукьянова Елена Викторовна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: `lukyanovalv@list.ru`

Бурлаков Михаил Петрович
Московский педагогический государственный университет
E-mail: `burlakovmihail@mail.ru`