



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 71–85
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-71-85

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. I

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Математическими моделями рассматриваемых задач являются системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Представлен строгий аналитический подход к изучению этой проблемы, который позволяет эффективно и корректно строить алгоритмы стабилизации. Метод основан на приводимости нестационарных систем, описывающих указанные задачи, к стационарным системам. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Работа публикуется с продолжением.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоритмы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. I

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

ABSTRACT. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Mathematical models of the problems considered are systems of differential equations with periodic coefficients. We present a rigorous analytical approach to this problem, which allows efficient and correct construction of stabilization algorithms. The method is based on the reducibility of nonstationary systems that describe these problems to stationary systems. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. The work is published with a continuation.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	72
Глава 1. Уравнения движения спутника при действии гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов	74
1.1. Уравнения движения трехосного спутника	74
1.2. Уравнения движения динамически симметричного спутника	78
Список литературы	82

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой работе рассматривается движение спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях. Предполагается, что центр масс движется по круговой орбите. Если орбиты — низкие (до 700 км), то следует учитывать и аэродинамические моменты, которые оказывают существенное влияние на движение. Среди возможных движений спутника вокруг центра масс особый интерес представляют стационарные движения (положения относительного равновесия и регулярные прецессии), которые являются одними из важных и распространенных рабочих режимов движения спутника.

Устойчивость этих стационарных движений в гравитационном поле подробно исследована в [3, 4, 6, 12, 18, 26, 28, 34, 56, 73]. Влияние гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов на устойчивость стационарных движений рассмотрено в [5, 15–17, 29, 32, 33, 46, 58, 68, 69]. При этом характер устойчивости в общем случае не является асимптотическим, и вопрос об их стабилизации тем или иным способом представляет практический интерес.

Как известно, одним из таких способов является стабилизация при помощи магнитных систем. Такие системы широко применяются в практике космических исследований. Методы создания управляющих моментов в магнитных системах основаны на различных типах электродинамического взаимодействия спутника с геомагнитным полем.

При одном методе используется эффект взаимодействия внутреннего магнитного момента спутника, создаваемого магнитными катушками, с геомагнитным полем. Другой метод управления основан на использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть поверхности спутника. Первому методу посвящено большое число публикаций [23, 29, 41, 52, 62, 64, 78], обзор которых содержится в [24, 30, 61, 71, 72].

Второй метод был предложен в работе А. А. Тихонова [31]. Он был развит и модифицирован в работах А. А. Тихонова и его соавторов [1, 35, 36, 38, 40]. В этих работах наряду с моментами сил Лоренца используются внутренние магнитные моменты. Использование момента лоренцевых сил для управления космическим аппаратом рассмотрено также в [47, 48, 51].

При использовании обоих методов управляющий момент является функцией геомагнитного поля, индукция которого изменяется во время движения спутника по орбите вокруг Земли. В большинстве работ предполагается, что это изменение носит периодический характер, если орбита спутника — круговая. Поэтому математические модели рассматриваемых задач представляют собой системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Это обстоятельство вносит существенные трудности как в изучение управляемости системы, так и в разработку эффективных алгоритмов управления.

При построении алгоритмов управления с обратной связью в литературе используются два подхода. Один основан на применении метода Ляпунова [36, 38], другой приводит к численному анализу линейной периодической системы на основании теории Флоке [23, 52, 62].

Выбор коэффициентов усиления в законе управления с обратной связью — центральный вопрос в этой задаче. Следует подчеркнуть, что при обоих указанных подходах выбор коэффициентов обратной связи не алгоритмизован, и способ их выбора не указан.

В работе представлен строгий аналитический подход к изучению этой проблемы, основанный на том, что линеаризованные модели рассматриваемых задач относятся к классу линейных нестационарных систем (ЛНС), допускающих конструктивное приведение к стационарным системам более высокой размерности, чем исходная система. Этот подход был развит для ЛНС определенного класса и ранее применялся для решения ряда прикладных задач [7–9, 53, 57], в том числе для задачи стабилизации стационарных движений спутника при использовании магнитных моментов различной природы [19–22].

Факт приводимости системы к стационарной эффективно используется как при анализе управляемости, так и при построении алгоритмов стабилизации. При наличии свойства управляемости в приведенной стационарной системе для нее строится оптимальный алгоритм стабилизации, основанный на LQR-методе на бесконечном интервале времени, который приводит к закону управления в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость стационарной системы. Построенное стабилизирующее управление вводится в исходную нестационарную систему при помощи дополнительных переменных и соответствующего ограниченного преобразования. При этом коэффициенты обратной связи для закона управления в исходной системе оказываются переменными. Исходная нестационарная система, замкнутая таким управлением, также асимптотически устойчива.

Следует подчеркнуть, что выбор коэффициентов обратной связи в законе управления, имеющий важное и принципиальное значение, при указанном подходе хорошо алгоритмизован. Он состоит из определения коэффициентов управления для расширенной стационарной системы в соответствие со стандартной процедурой LQR (при этом требуется задать лишь параметры функционалов) и построения конструктивного преобразования к исходным переменным путем введения дополнительных переменных.

В работе рассмотрены задачи стабилизации стационарных движений спутника (относительно равновесия и регулярных прецессий) при помощи магнитных моментов различной природы. Исследованы вопросы управляемости, построены алгоритмы стабилизации и представлены результаты моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики.

В главе 1 выписаны выражения для моментов гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов; уравнения движения спутника около центра масс при действии моментов различной природы, указаны стационарные решения (положения равновесия и регулярные прецессии) и выписаны линеаризованные уравнения, которые служат основой для последующих алгоритмов стабилизации.

Глава 2 посвящена анализу и синтезу ЛНС, допускающих приведение к стационарным системам большей размерности. Рассмотрены методические примеры, иллюстрирующие применение предлагаемой методики.

В главе 3 рассмотрены следующие задачи стабилизации стационарных движений спутника в геомагнитном поле: стабилизация положения равновесия при помощи магнитных моментов; стабилизация положения равновесия при помощи моментов сил Лоренца; стабилизация положения равновесия при совместном использовании магнитных и лоренцевых моментов; стабилизация регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов.

В разделе Приложение показано применение разработанной методики приведения нестационарной по управлению системы к стационарной системе большой размерности при использовании более сложной модели геомагнитного поля. Приведены нелинейные уравнения управляемого движения для случая движения спутника по экваториальной орбите.

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ПРИ ДЕЙСТВИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ, АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ

В этой главе приводятся выражения для моментов гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов; уравнения движения спутника около центра масс при действии моментов различной природы, указаны стационарные решения (положения равновесия и регулярные прецессии) и выписаны линеаризованные уравнения, которые служат основой для последующих алгоритмов стабилизации.

В разделе 1.1 приводятся уравнения движения трехосного спутника, а в разделе 1.2 — динамически симметричного спутника. Управляющими являются моменты сил, возникающие при электродинамическом взаимодействии спутника с геомагнитным полем.

1.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХОСНОГО СПУТНИКА

Рассматривается движение спутника около центра масс под действием моментов сил различной природы.

1.1.1. Динамические уравнения, моменты действующих сил и уравнения измерений.

При выводе уравнений движения спутника используются две системы координат (см. рис. 1.1): $OXYZ$ — орбитальная система координат с началом в центре масс спутника: ось OZ направлена по радиус-вектору центра масс; OY — по нормали к плоскости орбиты, OX дополняет систему до правой тройки; $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_n$ — единичные векторы осей OX , OZ , OY соответственно; $Oxyz$ — связанная система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника.

Ориентация системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы $OXYZ$ задается матрицей Θ (см. [4]).

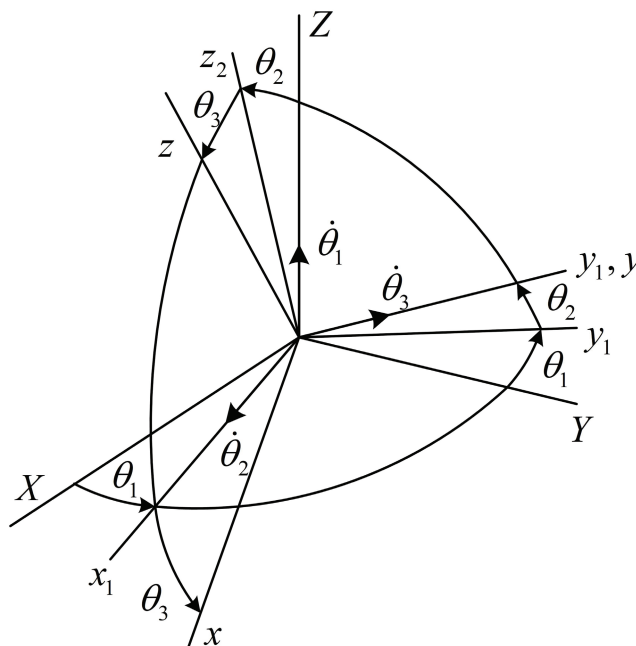


Рис. 1.1

В начальный момент система координат $Oxyz$ совпадает с $OXYZ$, ее положение обозначим $x_0y_0z_0$. Первый поворот осуществляется на угол θ_1 вокруг оси OZ . Матрица перехода к системе $x_1y_1z_1$ имеет вид

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Второй поворот осуществляется на угол θ_2 вокруг оси x_1 . Матрица перехода от системы $x_1y_1z_1$ к системе $x_2y_2z_2$ имеет вид

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Третий поворот на угол θ_3 вокруг оси Oy_2 , с матрицей перехода от системы $x_2y_2z_2$ к системе $x_3y_3z_3$:

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{bmatrix}.$$

Результирующая матрица перехода от системы координат $OXYZ$ к системе $Oxyz$ определяется матрицей

$$\mathbf{e}_\tau = (\Theta_{11}\Theta_{12}\Theta_{13}), \quad \mathbf{e}_n = (\Theta_{21}\Theta_{22}\Theta_{23}), \quad \mathbf{e}_r = (\Theta_{31}\Theta_{32}\Theta_{33}). \quad (1.1.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, & \Theta_{12} &= -\sin \theta_1 \cos \theta_2, & \Theta_{13} &= \cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \Theta_{21} &= \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, & \Theta_{22} &= \cos \theta_1 \cos \theta_2, & \Theta_{23} &= \sin \theta_1 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \Theta_{31} &= -\cos \theta_2 \sin \theta_3, & \Theta_{32} &= \sin \theta_2, & \Theta_{33} &= \cos \theta_2 \cos \theta_3. \end{aligned}$$

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника ω в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \frac{d\theta_2}{dt} \cos \theta_3 + \omega_0 \Theta_{21}, \\ \omega_2 &= \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_2 + \omega_0 \Theta_{22}, \\ \omega_3 &= \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \frac{d\theta_2}{dt} \sin \theta_3 + \omega_0 \Theta_{23}, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

где ω_0 — величина орбитальной угловой скорости.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс при его движении по круговой орбите имеют вид [4]

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times J\omega = \mathbf{M}. \quad (1.1.3)$$

Здесь J_j ($j = 1, 2, 3$) — главные центральные моменты инерции спутника; $\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_m$ совокупность гравитационного, аэродинамического и магнитного моментов сил, действующих на спутник.

Гравитационный момент представляется в известном виде [4]

$$\mathbf{M}_g = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times J\mathbf{e}_r) \quad (1.1.4)$$

Аэродинамические моменты оказывают существенное влияние на движение спутника около центра масс на низких орбитах (до 700 км). Выражения для этих моментов достаточно сложны и зависят от формы и геометрии спутника [29, 58, 64, 65, 68, 69, 74]. Для аналитических исследований в большинстве работ принято следующее представление для аэродинамического момента

$$\mathbf{M}_a = \frac{1}{2} \rho V_c^2 C_d S (\mathbf{e}_\tau \times \mathbf{r}_d), \quad (1.1.5)$$

где ρ — плотность атмосферы, V_c — скорость центра масс спутника, C_d — аэродинамический коэффициент, S — эффективная площадь, $\mathbf{e}_\tau$ — единичный вектор направления скорости центра масс, $\mathbf{r}_d$ — радиус-вектор от центра масс до центра давления.

Выражение (1.1.5) получено при следующих предположениях: атмосфера неподвижна в абсолютном пространстве и ее плотность вдоль орбиты спутника считается постоянной; действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника.

Несколько более сложные модели аэродинамического момента представлены в [58, 65].

Магнитные моменты, в отличие от аэродинамических, которые являются пассивными, часто используются и как управляющие.

Как уже указывалось во введении, методы создания управляющих моментов основаны на различных типах взаимодействия спутника с магнитным полем Земли. При одном методе используется эффект взаимодействия собственного магнитного момента спутника, создаваемого магнитными катушками, с геомагнитным полем с вектором индукции $\mathbf{b}_0$. В этом случае управляющий механический момент имеет вид [76]

$$\mathbf{M}_m^c = \mathbf{m} \times \mathbf{b}_0, \quad (1.1.6)$$

где $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ m_3]^\top$ — собственный магнитный момент спутника; $\mathbf{b}_0$ — вектор индукции магнитного поля Земли, который задан в орбитальной системе координат.

Другой метод управления основан на использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть поверхности спутника. Такой метод впервые был предложен А. А. Тихоновым [31]. В этой работе было показано, что путем изменения радиус-вектора центра заряда спутника относительно его центра масс можно создать момент лоренцевых сил и использовать его в качестве управляющего момента.

Момент этих сил относительно центра масс спутника определяется по формуле [1, 35, 36, 38, 40]

$$\mathbf{M}_m^q = q \mathbf{r}_q \times \Theta^\top (\mathbf{V}_c \times \mathbf{b}_0) \quad (1.1.7)$$

Здесь q — электростатический заряд, $\mathbf{r}_q = [x_q, y_q, z_q]^\top$ — радиус-вектор центра заряда спутника относительно его центра масс; $\mathbf{V}_c = R\omega_0 \mathbf{e}_\tau$ — скорость центра масс спутника, $\mathbf{e}_\tau$ — единичный вектор оси OX , R — радиус орбиты.

В формулах (1.1.6), (1.1.7), описывающих магнитные моменты различной природы, присутствует вектор $\mathbf{b}_0$, выражение для которого в общем случае имеет очень сложный вид. Существуют многочисленные аппроксимации геомагнитного поля различной степени сложности [5, 37, 39, 59, 60]. В большинстве аналитических исследований используется дипольная модель геомагнитного поля, (более сложная модель рассмотрена в Приложении 3.6.1) в которой вектор индукции меняется периодически с течением времени, если орбита спутника — круговая. В этом случае математическая модель вектора магнитной индукции в орбитальной системе координат имеет вид

$$\mathbf{b}_0(t) = \frac{\mu_E}{R^3} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \sin I \\ -\cos I \\ 2 \sin \omega_0 t \sin I \end{bmatrix} \quad (1.1.8)$$

(см. [76]). Здесь I — угол наклона плоскости орбиты спутника к плоскости экватора; μ_E — постоянная магнитного поля Земли. Компоненты векторов $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^\top$, $\mathbf{r}_q = [x_q, y_q, z_q]^\top$ далее считаются управляющими параметрами $\mathbf{u} = \mathbf{m}$, $\mathbf{v} = \mathbf{r}_q$.

Для работы систем ориентации требуется наличие информации об угловом движении спутника, которую доставляют бортовые датчики различного типа. При использовании активных магнитных систем требуется знание магнитного поля Земли в связанной со спутником системе координат, которое доставляет магнитометр.

Модель измерений магнитометра может быть записана в виде [76]

$$\sigma = \Theta^\top \mathbf{b}_0 + \Delta. \quad (1.1.9)$$

Здесь σ — вектор измерений магнитометра; Δ — вектор погрешностей магнитометра, которые могут быть вызваны различными факторами.

Уравнения движения (1.1.2), (1.1.3) при отсутствии управляющих моментов ($\mathbf{M}_m^c = 0$, $\mathbf{M}_m^q = 0$) допускают стационарные решения, отвечающие положениям относительного равновесия спутника, в которых оси связанной системы координат $Oxyz$ совпадают с осями орбитальной системы

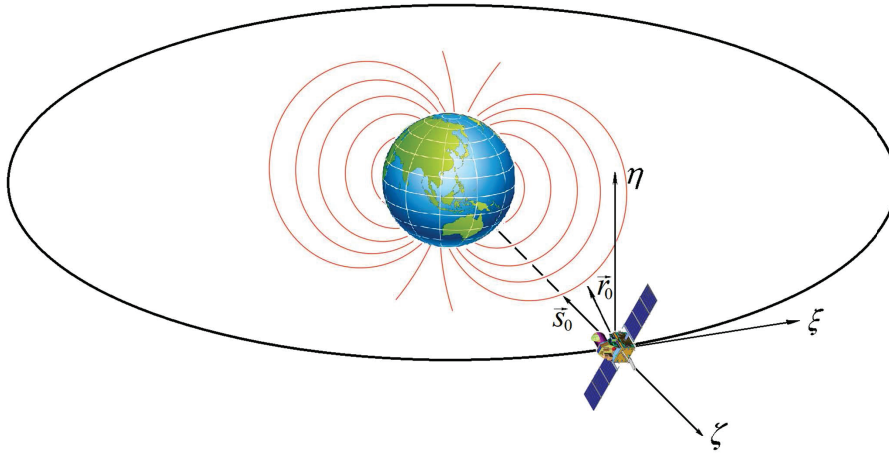


Рис. 1.2

координат $OXYZ$. Далее для определенности считаем, что углы поворота θ_i ($i = 1, 2, 3$) выбраны таким образом, что в положении относительного равновесия все углы и относительные угловые скорости равны нулю

$$\theta_i = 0, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1.10)$$

При этом главные центральные оси инерции спутника Ox, Oy, Oz соответственно совпадают с осями орбитальной системы координат OX, OY, OZ .

Как известно [3, 4, 26], достаточным условиями устойчивости положения равновесия (1.1.10) являются неравенства

$$J_2 > J_1 > J_3. \quad (1.1.11)$$

В этом положении равновесия наибольшая ось эллипсоида инерции спутника направлена по радиус-вектору, а наименьшая по нормали к плоскости орбиты (средняя ось — по касательной к орбите).

Необходимые условия устойчивости приведены в [3, 4].

1.1.2. Линеаризованные уравнения движения. Проведем линеаризацию уравнений движения спутника (1.1.2), (1.1.3), в окрестности относительного равновесия (1.1.10).

Выражения для проекций векторов орбитальной системы координат на оси, связанные со спутником $Oxyz$, линеаризованные в окрестности относительного равновесия (1.1.10), имеют вид $\mathbf{e}_\tau = (1 - \theta_1\theta_3)$, $\mathbf{e}_n = (\theta_11 - \theta_2)$, $\mathbf{e}_r = (-\theta_3\theta_21)$.

При линеаризации уравнений, очевидно, линеаризуются и выражения для моментов. Проекции гравитационного (1.1.4) и аэродинамического (1.1.5) моментов, линеаризованные в окрестности относительного равновесия (1.1.10), представляются в виде

$$M_{g1} = 3\omega_0^2(J_3 - J_2)\theta_2, \quad M_{g2} = 3\omega_0^2(J_3 - J_1)\theta_3, \quad M_{g3} = 0, \quad (1.1.12)$$

$$M_{a1} = 0, \quad M_{a2} = C_a\theta_3, \quad M_{a3} = C_a\theta_1. \quad (1.1.13)$$

Здесь предполагается, что $r_d = (l00)$, $C_a = \frac{1}{2}\rho V_c^2 C_d S l$.

Принимая во внимание, что управления $\mathbf{u} = \mathbf{m}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{r}_q$, требуемые для решения задачи стабилизации стационарных движений, формируются в виде обратной связи по компонентам вектора состояния θ_i , $\frac{d\theta_i}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$), будем полагать (как и в [19, 20]), что $\Theta = E_3$. Тогда выражения для управляющих моментов $\mathbf{M}_m^c$ (1.1.6) и $\mathbf{M}_m^q$ (1.1.7) примут вид

$$\begin{aligned} M_{m1}^c &= \mu_0(2\beta_1 u_2 \sin \omega_0 t + u_3 \beta_4), \\ M_{m2}^c &= \mu_0(-2\beta_2 u_1 \sin \omega_0 t + \beta_2 u_3 \cos \omega_0 t), \\ M_{m3}^c &= -\mu_0(\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 \cos \omega_0 t), \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

$$\begin{aligned}
M_{m1}^q &= \mu_0(-b_1 v_2 + b_2 v_3 \sin \omega_0 t), \\
M_{m2}^q &= \mu_0 \tilde{b}_1 v_1, \\
M_{m3}^q &= \mu_0 \tilde{b}_2 v_1 \sin \omega_0 t.
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Линеаризованные уравнения движения, управляемого собственным магнитным моментом $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$, и моментом лоренцевых сил $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^\top$ при введении безразмерного времени $\tau = \omega_0 t$, имеют вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_1 - \kappa_1 x_1 &= \mu_0[2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3 - b_1 v_2 + b_2 v_3 s\tau], \\
\ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3^* x_3 &= -\mu_0[\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 c\tau - \tilde{b}_2 v_1 s\tau], \\
\ddot{x}_2 - \kappa_2^* x_2 &= \mu_0[-2\beta_2 u_1 s\tau + \beta_2 u_3 c\tau + \tilde{b}_1 v_1].
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Здесь «точка» обозначает производную по времени τ ;

$$\begin{aligned}
x_1 &= \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \quad d_1 = \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\
\kappa_1 &= 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2^* = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2} + \frac{C_a}{J_2}, \quad \kappa_3^* = \frac{J_1 - J_2}{J_3} + \frac{C_a}{J_3}; \\
\beta_j &= \frac{sI}{J_j} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \beta_4 = \frac{cI}{J_1}, \quad \beta_5 = \frac{cI}{J_3}; \\
b_1 &= \frac{qR\omega_0 cI}{J_1}, \quad b_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_1}; \quad \tilde{b}_1 = \frac{qR\omega_0 cI}{J_2}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_3}.
\end{aligned}$$

Здесь и далее используются обозначения $c\tau = \cos \tau$, $s\tau = \sin \tau$, $sI = \sin I$, $cI = \cos I$. Для круговой орбиты

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{R^3}$$

μ — гравитационный параметр Земли. Тогда величина

$$\mu_0 = \frac{\mu E}{\mu}$$

не зависит от радиуса орбиты.

Выражения (1.1.14) и (1.1.15) на экваториальной ($I = 0$) и полярной ($I = \pi/2$) орбитах имеют вид соответственно

$$\begin{aligned}
M_{m1}^c &= \mu_0 \beta_4 u_3, \quad M_{m1}^q = -\mu_0 b_1 v_2, \\
M_{m2}^c &= 0, \quad M_{m2}^q = \mu_0 \tilde{b}_1 v_1, \\
M_{m3}^c &= -\mu_0 \beta_5 u_1, \quad M_{m3}^q = 0, \\
M_{m1}^c &= 2\mu_0 \beta_1 u_2 \sin \tau, \quad M_{m1}^q = \mu_0 b_2 v_3 \sin \tau, \\
M_{m2}^c &= \mu_0 \beta_2 u_3 \cos \tau, \quad M_{m2}^q = 0, \\
M_{m3}^c &= -\mu_0 \beta_3 u_2 \cos \tau, \quad M_{m3}^q = \mu_0 \tilde{b}_2 v_1 \sin \tau.
\end{aligned} \tag{I = 0}$$

$$\tag{I = \pi/2}$$

На экваториальной орбите, очевидно, система неуправляема в отсутствие лоренцевых сил. На полярной орбите система неуправляема в отсутствие собственных магнитных моментов. Итак, в зависимости от наклона орбиты целесообразно рассматривать использование тех или иных моментов. Следует отметить, что линеаризованные уравнения (1.1.16) представляют собой линейную систему, нестационарную по управлению как при действии собственного магнитного момента, так и при действии моментов лоренцевых сил. Основы теории таких систем изложены в главе 2. Линеаризованные уравнения измерений магнитометра (1.1.9) имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \mu_0(2x_2 sI s\tau + x_3 cI) + \Delta_1, \\
\sigma_2 &= \mu_0(-2x_1 sI s\tau + x_3 sI c\tau) + \Delta_2, \\
\sigma_3 &= -\mu_0(x_1 cI + x_2 sI c\tau) + \Delta_3.
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

1.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА

При исследовании движения осесимметричного спутника удобно ввести полусвязанную систему координат $Ox_py_pz_p$, не участвующую в собственном вращении. Ось Oz_p направлена по оси симметрии спутника (см. рис 1.3).

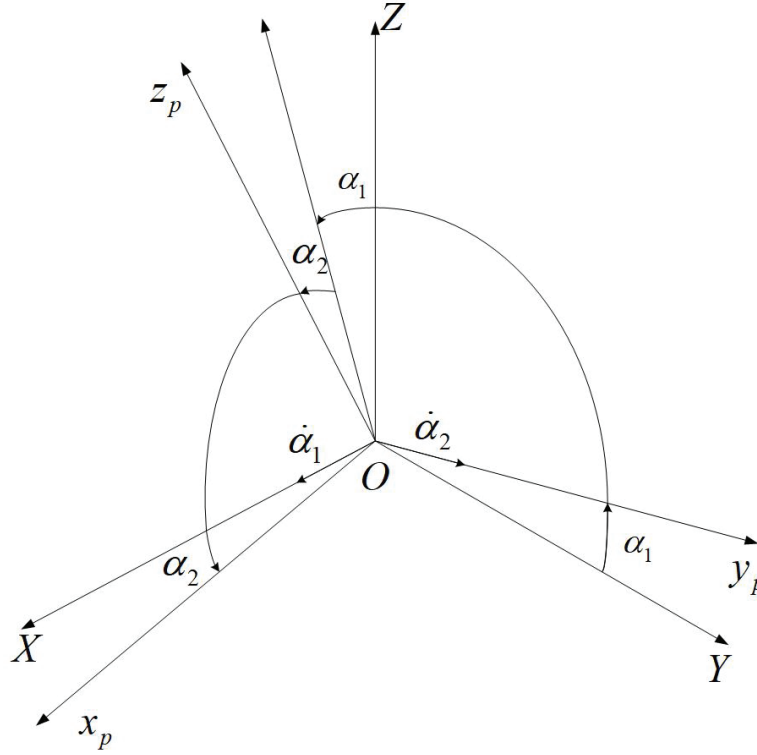


Рис. 1.3

Переход от орбитальной системы координат $OXYZ$ к системе $Ox_py_pz_p$ осуществляется двумя поворотами. Первый поворот на угол α_1 вокруг оси OX приводит к системе $Ox_{p1}y_{p1}z_{p1}$. Второй поворот на угол α_2 вокруг оси Oy_{p1} приводит к системе $Ox_py_pz_p$. Положение оси симметрии спутника задается двумя углами α_1, α_2 . Третий угол φ — угол собственного вращения. Ориентация системы $Ox_py_pz_p$ относительно орбитальной системы координат $OXYZ$ определяется матрицей [37]

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c + \dot{\varphi} \mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ — единичный вектор оси симметрии, $\boldsymbol{\omega}_c$ — угловая скорость системы координат $Ox_py_pz_p$) в проекциях на оси $Ox_py_pz_p$ имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\alpha_1}{dt} \cos \alpha_2 + \omega_o \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \\ \omega_y &= \frac{d\alpha_2}{dt} + \omega_o \cos \alpha_1, \\ \omega_z &= \frac{d\alpha_1}{dt} \sin \alpha_2 - \omega_o \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где ω_o — величина угловой скорости орбитального движения.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс имеют вид

$$J \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_c \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_u. \quad (1.2.2)$$

Здесь $J = \text{diag}(J_1, J_1, J_3)$ ($J_1 \neq J_3$), J_j — главные центральные моменты инерции спутника, $\mathbf{M}_g = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times J\mathbf{e}_r)$ — гравитационный момент, $\mathbf{M}_u$ — управляющий момент, который создается за счет взаимодействия собственного дипольного момента, формируемого магнитными катушками, с магнитным полем Земли: $\mathbf{M}_u = \mathbf{m} \times \mathbf{b}_0(t)$, $\mathbf{m} = (m_1 \ m_2 \ m_3)^\top$ — магнитный дипольный момент спутника, $\mathbf{b}_0(t)$ — вектор индукции геомагнитного поля.

Такой управляющий момент рассматривался в разделе 1.1, где вектор магнитной индукции определяется по формуле (1.1.8).

Компоненты гравитационного момента $\mathbf{M}_g$ в полусвязанной системе координат $Ox_py_pz_p$ имеют вид

$$\begin{aligned} M_{g1} &= 3\omega_0^2(J_3 - J_1)s\alpha_1c\alpha_1c\alpha_2, \\ M_{g2} &= 3\omega_0^2(J_3 - J_1)(c\alpha_1)^2s\alpha_2c\alpha_2, \\ M_{g3} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

где $s\alpha_1 = \sin \alpha_1$, $s\alpha_2 = \sin \alpha_2$, $c\alpha_1 = \cos \alpha_1$, $c\alpha_2 = \cos \alpha_2$.

В системе координат $Ox_py_pz_p$ вектор индукции магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{b}_0(t) = \frac{\mu_E}{R^3} [B_1 \ B_2 \ B_3]^\top,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= b_1c\alpha_2 + b_2s\alpha_1s\alpha_2 - b_3c\alpha_1s\alpha_2, \\ B_2 &= b_2c\alpha_1 + b_3s\alpha_1, \\ B_3 &= b_1s\alpha_2 - b_2s\alpha_1c\alpha_2 + b_3c\alpha_1c\alpha_2. \end{aligned}$$

Здесь $b_1 = sI \cos \omega_0 t$, $b_2 = -cI$, $b_3 = 2sI \sin \omega_0 t$.

Далее будем считать, что собственный магнитный момент направлен по оси симметрии спутника, т. е. $\mathbf{m} = (0 \ 0 \ m)^\top$.

Компоненты управляющего момента $\mathbf{M}_u$ в системе координат $Ox_py_pz_p$ имеют вид

$$\begin{aligned} M_{u1} &= -B_2m = \frac{\mu_E}{R^3}(cIc\alpha_1 - 2sIs\alpha_1 \sin \omega_0 t)m, \\ M_{u2} &= B_1m = \frac{\mu_E}{R^3}(sIc\alpha_2 \cos \omega_0 t - cIs\alpha_1s\alpha_2 - 2sIc\alpha_1s\alpha_2 \sin \omega_0 t)m, \\ M_{u3} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Уравнения движения (1.2.1), (1.2.2) представляются в виде

$$\begin{aligned} J_1 \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} c\alpha_2 - 2 \frac{d\alpha_1}{dt} \frac{d\alpha_2}{dt} s\alpha_2 \right) + (2J_1\omega_0s\alpha_1c\alpha_2 + J_3r_0) \frac{d\alpha_2}{dt} + \\ + J_3\omega_0r_0c\alpha_1 + (4J_1 - 3J_3)\omega_0^2s\alpha_1c\alpha_1c\alpha_2 = M_{u1}, \end{aligned} \quad (1.2.5a)$$

$$\begin{aligned} J_1 \left[\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \right)^2 s\alpha_2c\alpha_2 \right] - (2J_1\omega_0s\alpha_1c\alpha_2 + J_3r_0) \frac{d\alpha_1}{dt} c\alpha_2 - \\ - J_1\omega_0^2(s\alpha_1)^2s\alpha_2c\alpha_2 - J_3r_0\omega_0s\alpha_1s\alpha_2 - 3(J_3 - J_1)\omega_0^2(c\alpha_1)^2s\alpha_2c\alpha_2 = M_{u2}. \end{aligned} \quad (1.2.5b)$$

Здесь $r_0 = \dot{\alpha}_1s\alpha_2 + \dot{\varphi} - \omega_0s\alpha_1c\alpha_2 = \text{const}$. Переходя в уравнениях (1.2.5) к безразмерным переменным, вводя обозначения

$$\tau = \omega_0 t, \quad p = \frac{r_0}{\omega_0}, \quad J = \frac{J_3}{J_1}$$

и обозначая точкой дифференцирование по τ , получим

$$\ddot{\alpha}_1c\alpha_2 - 2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2s\alpha_2 + (2s\alpha_1c\alpha_2 + pJ)\dot{\alpha}_2 + pJc\alpha_1 + (4 - 3J)s\alpha_1c\alpha_1c\alpha_2 = M_{u1}, \quad (1.2.6a)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_1^2 s \alpha_2 c \alpha_2 - [2s \alpha_1 (c \alpha_2)^2 + pJ] \dot{\alpha}_1 c \alpha_2 - (s \alpha_1 c \alpha_2 + pJ) s \alpha_1 s \alpha_2 - \\ - 3(J-1)(c \alpha_1)^2 s \alpha_2 c \alpha_2 = M_{u2}. \quad (1.2.6b)$$

В отсутствие управляющих моментов ($M_u = 0$) уравнения (1.2.6) допускают стационарные решения (регулярные прецессии) $\alpha_1 = \alpha_{10}$, $\alpha_2 = \alpha_{20}$, $\dot{\alpha}_1 = 0$, $\dot{\alpha}_2 = 0$, $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$.

Уравнения стационарных движений

$$c \alpha_{10} [pJ + (4 - 3J) s \alpha_{10} c \alpha_{20}] = 0, \\ s \alpha_{20} [(s \alpha_{10})^2 c \alpha_{20} + pJ s \alpha_{10} + 3(J-1)(c \alpha_{10})^2 c \alpha_{20}] = 0$$

имеют известные решения, которые называют [4, 56] цилиндрической, гиперболоидальной и конической прецессиями:

(1) цилиндрическая прецессия:

$$c \alpha_{10} = 0, \quad s \alpha_{20} = 0, \quad (\alpha_{10} = \pi/2, \quad \alpha_{20} = 0); \quad (1.2.7)$$

ось симметрии перпендикулярна плоскости орбиты (см. рис. 1.4);

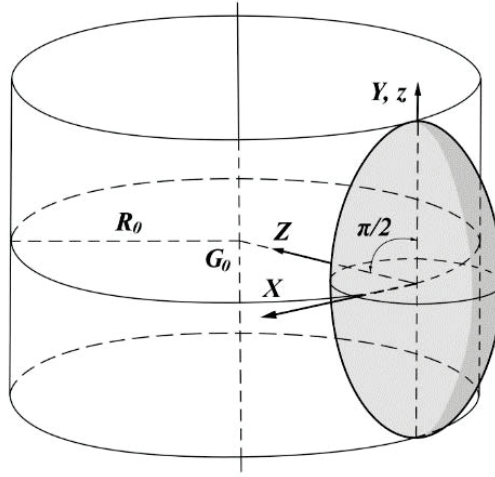


Рис. 1.4

(2) гиперболоидальная прецессия:

$$c \alpha_{10} = 0, \quad (\alpha_{10} = \pi/2), \quad c \alpha_{20} = -pJ; \quad (1.2.8)$$

ось симметрии перпендикулярна радиус-вектору (см. рис. 1.5);

(3) коническая прецессия:

$$s \alpha_{10} = \frac{pJ}{3J-4}, \quad s \alpha_{20} = 0, \quad (\alpha_{20} = 0); \quad (1.2.9)$$

ось симметрии перпендикулярна касательной к орбите (см. рис. 1.6).

Необходимые условия устойчивости этих стационарных движений рассмотрены в [3, 4, 6, 34, 56]. Достаточные условия приведены в [26, 34].

Линеаризованные уравнения управляемого движения (1.2.6), (1.2.4) в отклонениях от стационарного движения (цилиндрической прецессии) (1.2.7) имеют вид

$$\ddot{x}_1 + \kappa_1 \dot{x}_2 - \kappa_2 x_1 = -2usI\sigma\tau, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_1 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_2 = usI\sigma\tau, \quad (1.2.10)$$

где $\kappa_1 = 2 + pJ$; $\kappa_2 = 4 + pJ - 3J$, $\kappa_3 = 1 + pJ$; $p = r_0/\omega_0$, $J = J_3/J_1$; $u = \mu_0 m$, $\mu_0 = \mu_E/R^3$.

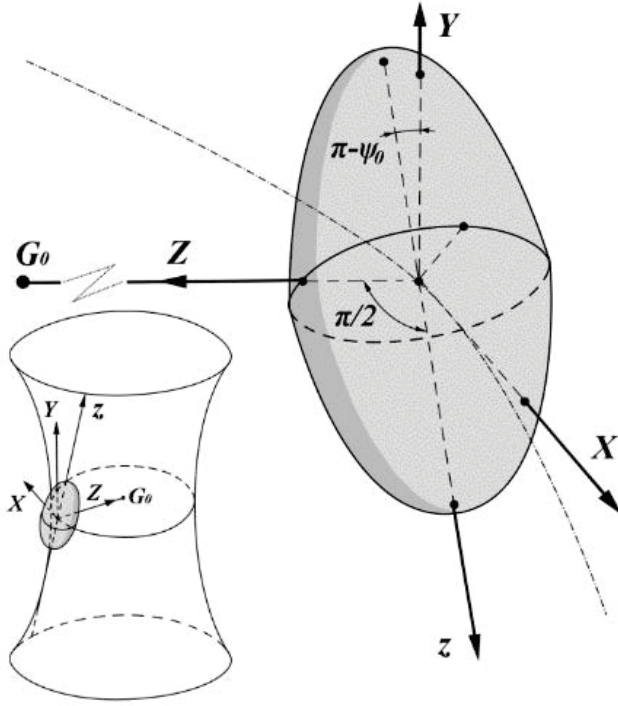


Рис. 1.5

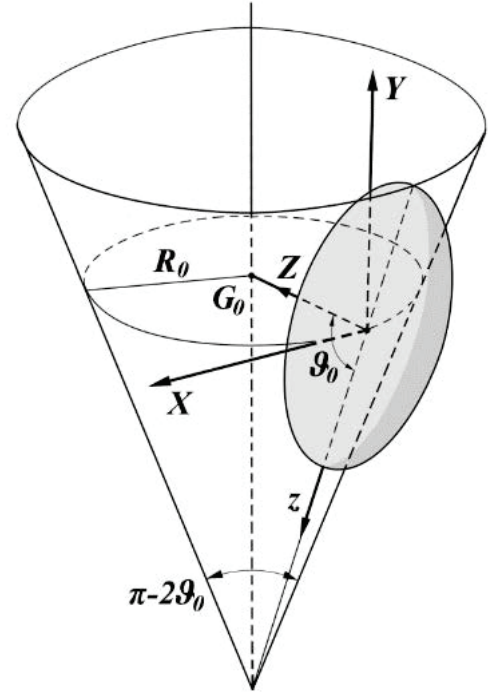


Рис. 1.6

Линеаризованные уравнения движения (1.2.6), (1.2.4) в окрестности гиперболоидальной прецессии (1.2.8) имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + \kappa_4 x_1 &= \beta_1^p u s \tau, \\ \ddot{x}_2 - c^2 \alpha_{20} \dot{x}_1 + s^2 \alpha_{20} x_2 &= (\beta_2^p c \tau - \beta_3^p) u.\end{aligned}\quad (1.2.11)$$

Здесь $\kappa_4 = 3(J - 1)$, $\beta_1^p = -2 \frac{sI}{c\alpha_{20}}$, $\beta_2^p = sI c \alpha_{20}$, $\beta_3^p = cI s \alpha_{20}$.

Линеаризованные уравнения движения (1.2.6), (1.2.4) в окрестности конической прецессии (1.2.9) имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \kappa_5 \dot{x}_2 + \kappa_6 x_1 &= (\beta_4^p - \beta_5^p s \tau) u, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_5 \dot{x}_1 + \kappa_7 x_2 &= \beta_6^p u s \tau.\end{aligned}\quad (1.2.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\kappa_5 &= (3b - 2)s\alpha_{10}, \quad \kappa_6 = (4 - 3b)(c\alpha_{10})^2, \quad \kappa_7 = 3(1 - b), \\ \beta_4^p &= cI c \alpha_{10}, \quad \beta_5^p = 2sI s \alpha_{10}, \quad \beta_6^p = sI.\end{aligned}$$

Системы уравнений (1.1.16), (1.2.10)–(1.2.12) служат основой для решений соответствующих задач о стабилизации стационарных движений, изложенных в главе 3. Характерная особенность этих систем состоит в их нестационарности по управлению, так как коэффициенты при управляющих воздействиях являются периодическими функциями времени. Методы исследования таких систем представлены в главе 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.

4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел// Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — 7, № 7. — С. 511–520.
7. Каленова В. И., Морозов В. М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. Каленова В. И., Морозов В. М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением// Прикл. мат. мех. — 2012. — 76, № 4. — С. 576–588.
9. Каленова В. И., Морозов В. М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления// в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. Кондурарь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара// Прикл. мех. техн. физ./ — 1960. — 36, № 5. — С. 890–901.
13. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
14. Лурье А. А. Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. Морозов В. М. Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. — 1967. — 5, № 5. — С. 727–732.
16. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. — 1969. — 7, № 3. — С. 395–401.
17. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. Морозов В. М. Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 1–83.
19. Морозов В. М., Каленова В. И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — 58, № 3. — С. 199–207.
20. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — 59, № 5. — С. 393–407.
21. Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — 85, № 4. — С. 436–453.
22. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — 60, № 3. — С. 246–253.
23. Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С. Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — 3, № 2 (28). — С. 73–86.
25. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — 38, № 3. — С. 296–306.
28. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 1978.
29. Сарычев В. А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 1985.
31. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — 41, № 1. — С. 69–79.
32. Хентов А. А. Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.

33. Хентов А. А. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — 6, № 5. — С. 793–795.
34. Черноуцко Ф. Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 1. — С. 155–157.
35. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// Adv. Space Res. — 2018. — 62. — P. 142–151.
36. Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A. Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// Nonlinear Dyn. — 2015. — 82. — P. 1493–1505.
37. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// Aerospace Sci. Techn. — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// IEEE Access. — 2021. — 9. — 132623–132630.
39. Antipov K. A., Tikhonov A. A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation// Geomagnetism and Aeronomy. — 2013. — 53, № 2. — P. 271–281.
40. Antipov K. A., Tikhonov A. A. On satellite electrodynamic attitude stabilization// Aerospace Sci. Techn. — 2014. — 33. — P. 92–99.
41. Bin Zhou Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// Automatica. — 2015. — 60. — P. 145–154.
42. Brewer J. W. Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// IEEE Trans. Circ. Syst. — 1978. — CAS-25, № 9. — P. 772–781.
43. Chang A. An algebraic characterization of controllability// IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — AC-10, № 1. — P. 112–113.
44. Cubas J., de Ruiter A. Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// Acta Astronaut. — 2020. — 169. — P. 108–123.
45. Cubas J., Farrahi A., Pindado S. Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// J. Guid. Control Dynam. — 2015. — 38. — P. 1947–1958.
46. Frik M. A. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// AIAA J. — 1970. — 8, № 10. — P. 1780–1785.
47. Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M. Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// Asian J. Control. — 2017. — 19, № 6. — P. 2028–2041.
48. Giri D. K. and Sinha M. Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// J. Guid. Control Dynam. — 2014. — 37, № 6. — P. 1946–1960.
49. Giri D. K., Sinha M. Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// J. Inst. Eng. India. Ser. C. — 2016. — 97. — P. 279–290.
50. Hautus M. L. J. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1969. — 72. — P. 443–448.
51. Huang X., Yan Y. Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2017. — 40, № 12. — P. 1–8.
52. Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// Acta Astronaut. — 2017. — 132. — P. 103–110.
53. Kalenova V. I., Morozov V. M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// Aerospace. Sci. Technol. — 2020. — 106. — 106105.
54. Kalman R. E. Lectures on Controllability and Observability. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. Laub A. J., Arnold W. F. Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// IEEE Trans. Automat. Control. — 1984. — 29, № 2. — P. 163–165.
56. Likins P. W. Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// J. Astronaut. Sci. — 1965. — 12, № 1. — P. 18–24.
57. Morozov V. M., Kalenova V. I. Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 020003.
58. Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E. Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2016. — 39. — P. 437–449.

59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// *Appl. Math. Model.* — 2017. — 46. — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// *Acta Astronaut.* — 2018. — 144. — P. 171–180.
61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// *Progr. Aerospace Sci.* — 2019. — 109. — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// *Acta Astronaut.* — 2015. — 110. — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// *Acta Astronaut.* — 2015. — 116. — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// *J. Guid. Control Dynam.* — 2001. — 24, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27. — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// *J. Guid. Control Dynam.* — 1990. — 13, № 3. — P. 506–514.
67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic fiend measurements// *J. Guid. Control Dynam.* — 2003. — 26, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2000. — 76, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2007. — 97, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// *J. Guid. Control Dynam.* — 2012. — 35, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// *Control Eng. Pract.* — 2005. — 13. — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// *Aerospace Sci. Technol.* — 2018. — 76. — P. 91–104.
73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — 1925. — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// *IEEE Trans. Control Syst. Techn.* — 2018. — 27, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.* — 2016. — 52, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// *Aerospace Sci. Techn.* — 2017. — 60. — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: mihailrak@mail.ru