ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 113–124
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-113-124

УДК 514.764

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ИХ ПОГРУЖЕНИЯ

© 2023 г. **А. А. РЫЛОВ**

Аннотация. Важным примером структур информационной геометрии является статистическая структура. Это заданная на гладком многообразии M риманова метрика g с вполне симметрическим тензорным полем K типа $(2,1)$. На многообразии, снабженном статистической структурой (g,K), инвариантно определяется однопараметрическое семейство α-связностей $\nabla^\alpha = D + \alpha \cdot K$, где D — связность Леви-Чивиты метрики g, α — параметр. В работе охарактеризованы сопряженно симметрические статистические структуры и их частный случай — структуры постоянной α-кривизны. В качестве примера приведено описание структуры с α-связностью постоянной кривизны на двумерной статистической модели Парето. Показано, что двумерная логистическая модель имеет 2-связность постоянной отрицательной кривизны, а двумерная модель Вейбулла—Гнеденко — 1-связность постоянной положительной кривизны. При этом обе модели несут сопряженно симметрические статистические структуры. Для случая многообразия $\widehat{M}$ линейной связности $\widehat{\nabla}$ без кручения, погруженного в риманово многообразие со статистической структурой (g,K), получен критерий того, что на прообразе индуцируется статистическая структура с подходящей $\widehat{\alpha}$-связностью $\widehat{\nabla}$.

Ключевые слова: риманова метрика, статистическая структура, α-связность, сопряженно симметрическое статистическое многообразие, статистическая модель, вторая фундаментальная форма, относительно аффинное отображение.

STATISTICAL STRUCTURES ON MANIFOLDS AND THEIR IMMERSIONS

© 2023 **A. A. RYLOV**

Abstract. An important example of structures of information geometry is a statistical structure. This is a Riemannian metric g on a smooth manifold M with a completely symmetric tensor field K of type $(2,1)$. On a manifold endowed with the statistical structure (g,K), a one-parameter family of α-connections $\nabla^\alpha = D+\alpha\cdot K$ is defined invariantly, where D is the Levi-Civita connection of the metric g and α is a parameter. In this paper, we characterize conjugate symmetric statistical structures and their particular case—structures of constant α-curvature. As an example, a description of a structure with α-connection of constant curvature on a two-dimensional statistical Pareto model is given. We prove that the two-dimensional logistic model has a 2-connection of constant negative curvature and the two-dimensional Weibull—Gnedenko model has a 1-connection of constant positive curvature. Both these models possess conjugate symmetric statistical structures. For the case of a manifold $\widehat{M}$ with a torsion-free linear connection $\widehat{\nabla}$ immersed in a Riemannian manifold with statistical structure (g,K), a criterion is obtained that a statistical structure with an appropriate $\widehat{\alpha}$-connection $\widehat{\nabla}$ is induced on the preimage.

Keywords and phrases: Riemannian metric, statistical structure, α-connection, conjugate symmetric statistical manifold, statistical model, second fundamental form, relatively affine mapping.

AMS Subject Classification: 53B12, 53C42

1. Введение. В последнее десятилетие широко используются методы информационной геометрии в исследовании различных видов массивов информации (семейств вероятностных распределений, пространств квантовых состояний, нейронных сетей, сложных систем и т. д.) с помощью естественно определяемых на них геометрических структур. В этой области фундаментальная задача состоит в инвариантном описании предлагаемой структуры, а прикладная — в интерпретации по такой структуре получаемой информации. Основы информационно-геометрического подхода неоднократно изложены Амари (см., например. [6]); целый ряд интересных прикладных аспектов этого подхода был освещен еще Арвини и Додсоном в [7], из многочисленных недавних работ выделим обзор Нильсена [15]. Настоящая работа посвящена важному примеру информационно-геометрических структур — статистическим структурам на гладком многообразии. От краткой характеристики свойств структур постоянной α-кривизны и более общих — сопряженно симметрических структур, переходим к описанию двумерных статистических моделей, функции распределений вероятностей которых принадлежат известным семействам: степенным, логистическим и обобщающим экспоненциальные, каждое из них характеризуется параметрами масштаба и формы.

В настоящий момент изучение геометрических свойств статистических многообразий активно развивается в направлении обогащения их геометрии дополнительными структурами и гладкими отображениями. В этом аспекте отметим недавние статьи по статистическим многообразиям, связанные с гиперповерхностями [8], с погружениями в многообразия постоянной кривизны [14], с подмногообразиями в пространствах квазипостоянной кривизны [19], со статистическими субмерсиями [20]. Введение дополнительной структуры на статистическом многообразии приводится в публикациях по аффинным погружениям в комплексные многообразия [13], по голоморфным многообразиям и их CR-подмногообразиям [9], по статистическим многообразиям с почти контактными структурами и их субмерсиям [21]. В заключительном разделе настоящей работы рассмотрен общий случай погружения многообразия линейной связности в статистическое многообразие и выявлен критерий относительно аффинного погружения.

2. Статистическая структура на гладком многообразии. Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = n$. Все многообразия, тензорные поля и другие объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Статистической структурой на многообразии M называется пара (g, K), в которой $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, K — тензорное поле типа $(2,1)$, удовлетворяющее двум условиям:

$$K_X Y = K_Y X, \quad \langle K_X Y, Z\rangle = \langle Y, K_X Z\rangle, \tag{1}$$

где X, Y, Z — векторные поля на многообразии M и оператор K_X, для которого $K_X Y = K(X,Y)$, является дифференцированием тензорной алгебры многообразия (см. также [17]). Многообразие, снабженное статистической структурой, называется *статистическим многообразием* (M, g, K) [12].

Пусть D — связность Леви-Чивиты метрики g. Тогда на многообразии (M, g, K) определяется 1-параметрическое ($\alpha \in \mathbb{R}$ — параметр) семейство линейных связностей без кручения, называемых *α-связностями*

$$\nabla^\alpha = D + \alpha \cdot K. \tag{2}$$

Как было показано в [2], на статистическом многообразии всякая α-связность совместима с метрикой g и сопряжена относительно нее с $(-\alpha)$-связностью. Очевидно, 0-связность ∇^0 совпадает со связностью Леви-Чивиты D.

Введем следующие обозначения: $R^\alpha_{XY} = R^\alpha(X,Y)$ — оператор кривизны связности ∇^α, Ric^α — ее тензор Риччи, $r^{(\alpha)}$ — ассоциированный с ним оператор Риччи, w_g — элемент объема, ассоциированный с метрикой g.

Статистическая структура (g, K) на многообразии M называется *сопряженно симметрической* [11], если оператор кривизны любой α-связности удовлетворяет условию $R^\alpha_{XY} g = 0$. Ранее [3] было показано, что одним из критериев такого многообразия служит совпадение $R^\alpha = R^{-\alpha}$ тензоров кривизны двойственных связностей ∇^α и $\nabla^{-\alpha}$.

Поскольку оператор R^{α}_{XY} является дифференцированием, то получаем

$$(R^{\alpha}_{XY}g)(U,V) = -\langle R^{\alpha}_{XY}U,V\rangle - \langle U,R^{\alpha}_{XY}V\rangle = -\langle R^{\alpha}_{XY}U,V\rangle + \langle R^{-\alpha}_{XY}U,V\rangle,$$

откуда

$$(R^{\alpha}_{XY}g)(U,V) = \langle R^{-\alpha}_{XY}U - R^{\alpha}_{XY}U,V\rangle. \tag{3}$$

Статистическая структура (g,K) на многообразии M с α-связностью постоянной кривизны $k^{(\alpha)}$ называется *статистической структурой постоянной α-кривизны*. Это означает, что тензор кривизны такой связности удовлетворяет соотношению

$$R^{\alpha}(X,Y)Z = k^{(\alpha)}\cdot(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y). \tag{4}$$

При $k^{(\alpha)}=0$ статистическая структура α — плоская, а при $\alpha=0$ многообразие (M,g,K) постоянной 0-кривизны является пространством постоянной кривизны $k^{(0)}$.

Теорема 1 (см. [4])**.** *Статистическая структура постоянной α-кривизны является сопряженно симметрической. В частности, α-плоская статистическая структура сопряженно симметрическая.*

Доказательство. Если для произвольно фиксированного значения $\alpha\neq 0$ связность ∇^{α} статистической структуры имеет постоянную кривизну $k^{(\alpha)}$, то в силу соотношений (3) и (4) находим

$$\begin{aligned}\langle R^{-\alpha}_{XY}U,V\rangle &= -\langle U,R^{\alpha}_{XY}V\rangle = \langle U,k^{(\alpha)}\cdot(\langle X,V\rangle Y - \langle Y,V\rangle X)\rangle = \\ &= k^{(\alpha)}\cdot(\langle Y,U\rangle\langle X,V\rangle - \langle X,U\rangle\langle Y,V\rangle) = \\ &= \langle k^{(\alpha)}\cdot(\langle Y,U\rangle X - \langle X,U\rangle Y),V\rangle = \langle R^{\alpha}_{XY}U,V\rangle.\end{aligned}$$

Значит, тензоры кривизны связностей ∇^{α} и $\nabla^{-\alpha}$ совпадают: $R^{\alpha}=R^{-\alpha}$. Следовательно, статистическая структура (g,K) является сопряженно симметрической. В частности, это верно для $k^{(\alpha)}=0$. □

Обратное утверждение к доказанному в общем случае неверно, следовательно, для получения обращения теоремы 1 необходимы дополнительные требования.

Теорема 2 (см. [5])**.** *Если сопряженно симметрическая статистическая структура на n-мерном гладком многообразии ($n\geqslant 3$) имеет α-связность, удовлетворяющую условиям эквипроективности:*

$$R^{\alpha}(X,Y)Z = \frac{1}{n-1}(\mathrm{Ric}^{\alpha}(X,Z)Y - \mathrm{Ric}^{\alpha}(Y,Z)X),$$

и сильной совместимости с метрикой g

$$(\nabla^{\alpha}_X g)(Y,Z) = (\nabla^{\alpha}_Y g)(X,Z), \nabla^{\alpha}w_g = 0,$$

то статистическая структура имеет постоянную α-кривизну

$$k^{(\alpha)} = -\frac{1}{n(n+1)}\operatorname{trace} r^{(\alpha)}.$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы для связности ∇^{α} ($\alpha\neq 0$) сопряженно симметрической структуры справедливо равенство $R^{\alpha}=R^{-\alpha}$, т.е.

$$\langle R^{\alpha}_{XY}U,V\rangle = \langle U,R^{\alpha}_{XY}V\rangle,$$

причем

$$R^{\alpha}_{XY}U = \frac{1}{n-1}(\mathrm{Ric}^{\alpha}(X,U)Y - \mathrm{Ric}^{\alpha}(Y,U)X).$$

Последовательными преобразованиями и сверткой по аргументам X и U находим

$$\langle\langle r^{(\alpha)}X,U\rangle Y - \langle r^{(\alpha)}Y,U\rangle X,V\rangle = \langle U,\langle r^{(\alpha)}Y,V\rangle X - \langle r^{(\alpha)}X,V\rangle Y\rangle,$$

$$\langle r^{(\alpha)}X,U\rangle\langle Y,V\rangle - \langle r^{(\alpha)}Y,U\rangle\langle X,V\rangle = \langle r^{(\alpha)}Y,V\rangle\langle U,X\rangle - \langle r^{(\alpha)}X,V\rangle\langle U,Y\rangle,$$

$$\langle r^{(\alpha)}Y,V\rangle = \frac{1}{n}\operatorname{trace} r^{(\alpha)}\cdot\langle Y,V\rangle.$$

Поскольку функции $\lambda^{(\alpha)} = \frac{1}{n}\operatorname{trace} r^{(\alpha)}$ являются постоянными на многообразии, то значит,

$$\langle r^{(\alpha)}Y, V\rangle = \lambda^{(\alpha)}\langle Y, V\rangle.$$

Тогда тензор кривизны связности ∇^α примет вид (4):

$$R^{(\alpha)}(X,Y)U = -\frac{\lambda^{(\alpha)}}{n+1}\cdot(\langle Y,U\rangle X - \langle X,U\rangle Y).$$

Таким образом, структура (g,K) на многообразии M является статистической структурой постоянной α-кривизны $k^{(\alpha)} = -\lambda^{(\alpha)}/(n+1)$. □

3. Двумерная статистическая модель постоянной α-кривизны. *Статистической моделью* называется семейство $S = \{P_{\theta^i} \mid i = 1,\dots,n\}$ распределений вероятностей случайной величины, гладко параметризованное n действительными параметрами [6]. Всякое распределение вероятностей P_{θ^i} характеризуется своей плотностью $p = p(x|\theta^i)$ относительно некоторой общей доминирующей меры P на выборочном пространстве X ($x \in X$) или другой функцией от плотности p из 1-параметрического семейства функций

$$l_\alpha(p) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-\alpha}\cdot p^{\frac{1-\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1, \\ \ln p, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что $\alpha \in \mathbb{R}$; и из вида (5) при $\alpha = -1$ получаем плотность вероятности $p(x|\theta^i)$, а при $\alpha = 1$ — функцию правдоподобия $\ln p(x|\theta^i)$.

Предполагается, что при фиксированном наборе $\{\theta^i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ система функций

$$\partial_i \ln p = \frac{\partial}{\partial\theta^i}\ln p$$

линейно независима, моменты случайных величин $\partial_i \ln p$ существуют достаточно высокого порядка, и для всякой функции $f(x|\theta^i)$ частное дифференцирование по параметрам коммутирует с интегрированием по мере P.

Хорошо известно [6], что статистическая модель S несет структуру гладкого n-мерного риманова многообразия, в котором точка P_{θ^i} имеет локальные координаты $\{\theta^i \mid i = 1,2,\dots,n\}$, а метрика определяется информационной матрицей Фишера с локальными координатами

$$I_{ij}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i l_\alpha(p)\cdot\partial_j l_{-\alpha}(p)\cdot dP, \quad (i,j = 1,\dots,n). \tag{6}$$

Более того, для всякого значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ набор функций

$$\Gamma^\alpha_{ijk}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i\partial_j l_\alpha(p)\cdot\partial_k l_{-\alpha}(p)\cdot dP, \quad (i,j,k = 1,\dots,n) \tag{7}$$

определяет локальные компоненты оператора ковариантного дифференцирования так называемой *α-связности Амари—Ченцова* (см., например, [1]). Все такие связности оказываются совместимыми с фишеровской метрикой статистической модели. Используя соотношения (6) и (7), нетрудно показать, что на статистической модели S внутренним образом определяется статистическая структура (I,K), локальные компоненты которой вполне симметричны и имеют вид

$$I_{ij}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i \ln p\cdot\partial_j \ln p\cdot p\cdot dP, \tag{8}$$

$$K_{ijk}(\theta) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_i \ln p\cdot\partial_j \ln p\cdot\partial_k \ln p\cdot p\cdot dP. \tag{9}$$

Классическим примером служит семейство одномерных нормальных распределений с плотностью

$$p(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где x — действительная случайная величина, а математическое ожидание $\mu = \theta^1$ и стандартное отклонение $\sigma = \theta^2 > 0$ играют роль локальных координат. Такое семейство называется *двумерной нормальной моделью*. В натуральном базисе $(\partial_\mu, \partial_\sigma)$ матрица Фишера метрики нормальной модели имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2/\sigma^2 \end{pmatrix},$$

а ненулевые компоненты тензора кривизны α-связности Амари—Ченцова

$${}^{(\alpha)}R_{1212} = -{}^{(\alpha)}R_{1221} = {}^{(\alpha)}\ R_{2121} = -{}^{(\alpha)}R_{2112} = \frac{1-\alpha^2}{2\sigma^4}.$$

Таким образом, кривизна этих связностей постоянна и равна $k^{(\alpha)} = (\alpha^2-1)/2$. Следовательно, статистическая структура нормальной модели имеет постоянную $(\alpha^2-1)/2$-кривизну и является ± 1-плоской. Сама нормальная модель — это пространство постоянной отрицательной кривизны $k^{(0)} = -1/2$.

4. Двумерная модель Парето. *Двумерной статистической моделью Парето* назовем гладко параметризованное семейство S распределений действительной случайной величины x, заданной на луче: $x \in [a; +\infty)$, имеющей степенную функцию распределения вида

$$F(x|a,\rho) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\rho,$$

где $a = \theta^1 > 0$ — параметр масштаба, $\rho = \theta^2 > 0$ — параметр формы. Находим функцию плотности распределения Парето, функцию правдоподобия и ее частные производные:

$$p(x|a,\rho) = \rho \cdot a^\rho x^{-\rho-1}, \quad \ln p = \ln\rho + \rho\cdot\ln a - (\rho+1)\ln x,$$
$$\partial_a \ln p = \frac{\rho}{a}, \quad \partial_\rho \ln p = \frac{1}{\rho} + \ln a - \ln x.$$

Для вычисления локальных компонент статистической структуры модели Парето по формулам (8) и (9) воспользуемся четырьмя вспомогательными интегралами:

$$\int\limits_a^{+\infty} x^{-\rho-1}dx = \frac{1}{\rho a^\rho}; \quad \int\limits_a^{+\infty} \ln\ x\cdot x^{-\rho-1}dx = \frac{1+\rho\ln a}{\rho^2 a^\rho}; \quad \int\limits_a^{+\infty} \ln^2 x\cdot x^{-\rho-1}dx = \frac{(1+\rho\ln a)^2+1}{\rho^3 a^\rho};$$
$$\int\limits_a^{+\infty} \ln^3 x\cdot x^{-\rho-1}dx = \frac{(1+\rho\ln a)^3 + 3(1+\rho\ln a)+2}{\rho^4 a^\rho}.$$

Тогда матрица Фишера метрики модели Парето примет вид

$$I = \begin{pmatrix} (\rho/a)^2 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Восемь видов ковариантных компонент структурного тензора запишутся следующим образом:

$$K_{111} = -\frac{1}{2}\int\limits_a^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \cdot \rho\cdot a^\rho x^{-\rho-1}dx = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\rho}{a}\right)^3,$$

$$K_{112} = K_{121} = K_{211} = -\frac{1}{2}\int\limits_a^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho} + \ln a - \ln x\right)\cdot\rho\cdot a^\rho x^{-\rho-1}dx = 0,$$

$$K_{122} = K_{212} = K_{221} = -\frac{1}{2}\int\limits_a^{+\infty} \frac{\rho}{a}\left(\frac{1}{\rho} + \ln a - \ln x\right)^2 \cdot \rho \cdot a^\rho x^{-\rho-1} dx = -\frac{1}{2a\rho},$$

$$K_{222} = -\frac{1}{2}\int\limits_a^{+\infty} \left(\frac{1}{\rho} + \ln a - \ln x\right)^3 \cdot \rho \cdot a^\rho x^{-\rho-1} dx = \frac{1}{\rho^3}.$$

Теперь по символам Кристоффеля ${}^{(0)}\Gamma^i_{jk}$ связности Леви-Чивиты метрики и компонентам тензора K^i_{jk} структуры $(i, j, k = 1, 2)$ последовательно вычисляем локальные компоненты семейства α-связностей Амари—Ченцова модели Парето:

$$\begin{aligned}
{}^{(\alpha)}\Gamma^1_{11} &= {}^{(0)}\Gamma^1_{11} + \alpha \cdot K^1_{11} = -\frac{1}{a} + \alpha \cdot \left(-\frac{\rho}{2a}\right) = -\frac{2 + \alpha \cdot \rho}{2a},\\
{}^{(\alpha)}\Gamma^2_{11} &= {}^{(0)}\Gamma^2_{11} + \alpha \cdot K^2_{11} = -\frac{\rho^3}{a^2} + \alpha \cdot 0 = -\frac{\rho^3}{a^2},\\
{}^{(\alpha)}\Gamma^1_{12} &= {}^{(\alpha)}\Gamma^1_{21} = {}^{(0)}\Gamma^1_{12} + \alpha \cdot K^1_{12} = \frac{1}{\rho} + \alpha \cdot 0 = \frac{1}{\rho},\\
{}^{(\alpha)}\Gamma^2_{12} &= {}^{(\alpha)}\Gamma^2_{21} = {}^{(0)}\Gamma^2_{12} + \alpha \cdot K^2_{12} = 0 + \alpha \cdot \left(-\frac{\rho}{2a}\right) = -\frac{\alpha \cdot \rho}{2a},\\
{}^{(\alpha)}\Gamma^1_{22} &= {}^{(0)}\Gamma^1_{22} + \alpha \cdot K^1_{22} = 0 + \alpha \cdot \left(-\frac{a}{2\rho^3}\right) = -\frac{\alpha \cdot a}{2\rho^3},\\
{}^{(\alpha)}\Gamma^2_{22} &= {}^{(0)}\Gamma^2_{22} + \alpha \cdot K^2_{22} = -\frac{1}{\rho} + \alpha \cdot \frac{1}{\rho} = -\frac{1-\alpha}{\rho}.
\end{aligned}$$

Теорема 3 (см. [5]). *Двумерная модель Парето S несет статистическую структуру (I, K) постоянной α-кривизны, равной $(-2\alpha - 2)$. При этом риманово многообразие (S, I) является пространством постоянной отрицательной кривизны -2.*

Доказательство. Покажем, что всякая α-связность Амари—Ченцова модели Парето имеет постоянную кривизну. С помощью смешанных компонент тензора кривизны α-связности вычисляем его ненулевые ковариантные компоненты:

$$\begin{aligned}
&{}^{(\alpha)}R_{1212} = -{}^{(\alpha)}R_{1221} = {}^{(\alpha)}R_{2121} = -{}^{(\alpha)}R_{2112} =\\
&\qquad = {}^{(\alpha)}R^1_{121} \cdot I_{12} + {}^{(\alpha)}R^2_{121} \cdot I_{22} = (\alpha+1)\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{\rho^2} = \frac{\alpha+1}{a^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, кривизна произвольной α-связности модели Парето имеет постоянное значение

$$k^\alpha = -2 \cdot \det I^{-1} \cdot {}^{(\alpha)} R_{1212} = -2 \cdot a^2 \cdot \frac{\alpha+1}{a^2} = -2\alpha - 2.$$

В частности, при $\alpha = 0$ получаем скалярную кривизну связности Леви-Чивиты, равную -2. □

5. Сопряженно симметрическая структура логистической модели. *Двумерной логистической моделью* называют гладко параметризованное семейство S распределений действительной случайной величины x, имеющей логистическую функцию распределения

$$F(x|a, b) = \frac{1}{1 + \exp(-ax - b)},$$

где $a = \theta^1 > 0$ — параметр масштаба, $b = \theta^2$ — параметр сдвига. В работе [10] это семейство названо логистическим параметрическим пространством. Находим функцию плотности логистического распределения, функцию правдоподобия и ее частные производные:

$$p(x|a, b) = \frac{a \cdot \exp(-ax - b)}{(1 + \exp(-ax - b))^2}, \quad \ln p = \ln a - ax - b - 2\ln(1 + \exp(-ax - b)),$$

$$\partial_a \ln p = \frac{1}{a} - x + \frac{2x \cdot \exp(-ax - b)}{1 + \exp(-ax - b)}, \quad \partial_b \ln p = \frac{-1 + \exp(-ax - b)}{1 + \exp(-ax - b)}.$$

Следуя [4], для вычисления локальных компонент (8) и (9) структуры преобразуем интегралы с помощью подстановки $t = \exp(-ax - b)$ и дальнейшего приведения подобных. Тогда матрица Фишера метрики логистической модели примет вид

$$I = \frac{1}{3a^2}\begin{pmatrix} b^2 + \pi^2/3 + 1 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix};$$

а компоненты структурного тензора запишутся следующим образом:

$$K_{111} = \frac{1}{6a^3}(\pi^2 + 3b^2), \qquad K_{122} = K_{212} = K_{221} = \frac{1}{6a},$$
$$K_{211} = K_{112} = K_{121} = \frac{-b}{3a^2}, \quad K_{222} = 0,$$

Локальные компоненты семейства α-связностей Амари—Ченцова, вычисленные по формуле (2), имеют сложные аналитические выражения, см. [4], однако при $\alpha = 2$ этот вид упрощается. Приведем ненулевые компоненты 2-связности:

$${}^{(2)}\Gamma^1_{11} = \frac{2\pi^2 - 3}{(\pi^2 + 3)a}, \quad {}^{(2)}\Gamma^2_{11} = -\frac{9b}{(\pi^2 + 3)a^2}, \quad {}^{(2)}\Gamma^2_{12} = {}^{(2)}\Gamma^2_{21} = \frac{1}{a},$$

откуда следует, что ненулевые ковариантные компоненты тензора 2-кривизны примут вид

$${}^{(2)}R_{1212} = -{}^{(2)}R_{1221} = {}^{(2)}R_{2121} = -{}^{(2)}R_{2112} = \frac{3}{(\pi^2 + 3)a^2}.$$

Следовательно, кривизна 2-связности имеет постоянное отрицательное значение

$$k^{(2)} = -2 \cdot \frac{27a^2}{\pi^2 + 3} \cdot \frac{3}{a^2(\pi^2 + 3)} = -\frac{162}{(\pi^2 + 3)^2} \approx -0{,}98.$$

Таким образом, согласно теореме 1 статистическая структура логистической модели является сопряженно симметрической.

6. Статистическая модель Вейбулла—Гнеденко. *Двумерной статистической моделью Вейбулла—Гнеденко* назовем гладко параметризованное семейство S распределений действительной случайной величины x, заданной на полупрямой: $x \in (0; +\infty)$, имеющей функцию распределения обобщенного экспоненциального вида

$$F(x|\lambda, k) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\},$$

где $\lambda = \theta^1 > 0$ — параметр масштаба, $k = \theta^2 > 0$ — параметр формы. Такие распределения в определенном смысле обобщают нормальные, экспоненциальные и логистические распределения [10]. Находим функцию плотности распределения Вейбулла—Гнеденко, функцию правдоподобия и ее частные производные:

$$p(x|\lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\}, \quad \ln p = \ln\left(\frac{k}{\lambda}\right) + (k-1) \cdot \ln\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k,$$
$$\partial_\lambda \ln p = -\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}}x^k, \quad \partial_k \ln p = \frac{1}{k} + \left(1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) \cdot \ln\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Для вычисления локальных компонент статистической структуры модели по формулам (8) и (9) приведем четыре полезных интеграла ($n \in N, k > 0$):

$$\int_0^{+\infty} x^{nk-1} \cdot \exp(-x^k) \cdot dx = \frac{(n-1)!}{k}; \quad \int_0^{+\infty} \ln x \cdot x^{k-1} \cdot \exp(-x^k) \cdot dx = -\frac{\gamma}{k^2};$$
$$\int_0^{+\infty} \ln^2 x \cdot x^{k-1} \cdot \exp(-x^k) \cdot dx = \frac{\pi^2 + 6\gamma^2}{6k^3};$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \ln^3 x \cdot x^{k-1} \cdot \exp(-x^k) \cdot dx = -\frac{4\zeta(3) + \gamma\pi^2 + 2\gamma^3}{2k^4};$$

где

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \ln n\right) \approx 0{,}5777\ldots, \quad \zeta(3) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \approx 1{,}202\ldots$$

— константы Эйлера—Маскерони и Апери соответственно.

Тогда матрица Фишера модели и ее детерминант согласно (8) примут вид

$$I = \begin{pmatrix} (k/\lambda)^2 & (\gamma-1)/\lambda \\ (\gamma-1)/\lambda & (n^2 + 6\gamma^2 - 12\gamma + 6)/(6k^2) \end{pmatrix}; \quad \det I = \frac{\pi^2}{6\lambda^2}.$$

Далее по формулам (9) находим восемь видов ковариантных компонент структурного тензора:

$$K_{111} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \left(-\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}}x^k\right)^3 \cdot \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\} dx = -\left(\frac{k}{\lambda}\right)^3,$$

$$K_{112} = K_{121} = K_{211} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \left(-\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}}x^k\right)^2 \left(\frac{1}{k} + \left(1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)\ln\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\} dx = \frac{(2-\gamma)k}{\lambda^2},$$

$$K_{122} = K_{212} = K_{221} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \left(-\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}}x^k\right) \left(\frac{1}{k} + \left(1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)\ln\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)^2 \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\} dx =$$

$$= -\frac{\pi^2 + 6\gamma^2 - 24\gamma + 12}{6\lambda k},$$

$$K_{222} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \left(1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)\ln\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)^3 \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\} dx =$$

$$= \frac{\pi^2(2-\gamma) - 4\zeta(3) - 2\gamma^3 + 12\gamma^2 - 12\gamma + 2}{2k^3}.$$

Аналогично случаю логистической модели, компоненты α-связностей Амари—Ченцова модели Вейбулла—Гнеденко имеют сложные аналитические выражения. Выделим случай $\alpha = 1$.

Теорема 4 (см. [18]). *Двумерная статистическая модель Вейбулла—Гнеденко S несет сопряженно симметрическую структуру (I, K). При этом ее 1-связность имеет постоянную кривизну*

$$k^{(1)} = \frac{12\pi^2\gamma - 144\gamma + 72}{\pi^4} \approx 0{,}59.$$

Доказательство. Покажем, что всякая 1-связность Амари—Ченцова модели Вейбулла—Гнеденко имеет постоянную кривизну. По формуле (2) вычислим компоненты 1-связности:

$${}^{(1)}\Gamma^1_{11} = {}^{(0)}\Gamma^1_{11} + 1 \cdot K^1_{11} = -\frac{\pi^2 - 6(\gamma-1)k}{\pi^2\lambda} - k \cdot \frac{\pi^2 + 6(\gamma-1)}{\pi^2\lambda} = -\frac{k+1}{\lambda},$$

$${}^{(1)}\Gamma^2_{11} = {}^{(0)}\Gamma^2_{11} + 1 \cdot K^2_{11} = -\frac{6k^3}{\pi^2\lambda^2} + \frac{6k^3}{\pi^2\lambda^2} = 0,$$

$${}^{(1)}\Gamma^1_{12} = {}^{(1)}\Gamma^1_{21} = {}^{(0)}\Gamma^1_{12} + 1 \cdot K^1_{12} = \frac{\pi^2 + 6(\gamma-1)^2}{\pi^2 k} + \frac{\pi^2 - 6\gamma(\gamma-1)}{\pi^2 k} = \frac{2\pi^2 - 6\gamma + 6}{\pi^2 k},$$

$${}^{(1)}\Gamma^2_{12} = {}^{(1)}\Gamma^2_{21} = {}^{(0)}\Gamma^2_{12} + 1 \cdot K^2_{12} = -\frac{6(\gamma-1)k}{\pi^2\lambda} - k \cdot \frac{\pi^2 - 6\gamma}{\pi^2\lambda} = -\frac{(\pi^2 - 6)k}{\pi^2\lambda},$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma^1_{22} &= {}^{(0)}\Gamma^1_{22} + 1\cdot K^1_{22} = \lambda\cdot\frac{(\pi^2+6(\gamma-1)^2)(\gamma-1)}{\pi^2k^3} - \\
&\quad -\lambda\cdot\frac{\pi^2(\pi^2+12\gamma-18)-6(\gamma-1)(\pi^2\gamma+12\zeta(3)-6(\gamma^2-1))}{6\pi^2k^3} = \\
&= -\lambda\cdot\frac{\pi^4-12\pi^2+6\pi^2\gamma(2-\gamma)+72(\gamma-1)^2+72\zeta(3)(\gamma-1)}{6\pi^2k^3}, \\
{}^{(1)}\Gamma^2_{22} &= {}^{(0)}\Gamma^2_{22} + 1\cdot K^2_{22} = -\frac{\pi^2+6(\gamma-1)^2}{\pi^2k} + \frac{\pi^2(5-2\gamma)+6(\gamma^2-1)-12\zeta(3)}{\pi^2k} = \\
&= \frac{2\pi^2(2-\gamma)+12(\gamma-1)-12\zeta(3)}{\pi^2k}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, ковариантные компоненты тензора 1-кривизны примут вид

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}R_{1212} &= -{}^{(1)}R_{1221} = {}^{(1)}R_{2121} = -{}^{(1)}R_{2112} = {}^{(1)}R^1_{121}\cdot I_{12} + {}^{(1)}R^2_{121}\cdot I_{22} = \\
&= \frac{-\pi^4+6\pi^2(\gamma+1)-36(\gamma-1)}{\pi^4\lambda}\cdot\frac{\gamma-1}{\lambda} + \frac{6k^2(6-\pi^2)}{\pi^4\lambda^2}\cdot\frac{\pi^2+6(\gamma-1)^2}{6k^2} \\
&= \frac{-\pi^2\gamma+12\gamma-6}{\pi^2\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, кривизна 1-связности имеет постоянное значение

$$
k^{(1)} = -2\cdot\det I^{-1}\cdot{}^{(1)}R_{1212} = -2\cdot\frac{6\lambda^2}{\pi^2}\cdot\frac{-\pi^2\gamma+12\gamma-6}{\pi^2\lambda^2} = \frac{12\pi^2\gamma-144\gamma+72}{\pi^4}.
$$

Значит, согласно теореме 1 статистическая структура модели Вейбулла—Гнеденко является сопряженно симметрической. □

7. Погружение статистической структуры. Пусть M — гладкое многообразие со статистической структурой (g,K), $\widehat{M}$ — гладкое многообразие с линейной связностью $\widehat{\nabla}$ без кручения, причем $\dim M = n$, $\dim\widehat{M} = m \leqslant n$.

Рассмотрим $f\colon(\Omega\subset\widehat{M})\to M$ — гладкое отображение на некоторой области Ω. Обозначим f^*TM — обратный образ касательного расслоения TM, $f_*\colon\mathfrak{X}(\Omega)\to\Gamma(f^*TM)$ — отображение в пространство сечений расслоения f^*TM, $\widehat{\nabla}'$ — связность на расслоении $f^*TM\otimes(T\Omega)^*$:

$$
(\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}) = \overline{\nabla}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Y} - f_*\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y},
$$

где $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$ — векторные поля на области Ω, $f_*\widehat{Y}$ — векторное поле вдоль отображения f, $\overline{\nabla}$ — индуцированная связность на f^*TM. Симметрическую билинейную форму $\widehat{\nabla}'f_*$ называют *второй фундаментальной формой отображения* f [16].

Метрический тензор g порождает на области $\Omega\subset\widehat{M}$ тензорное поле f^*g вдоль отображения по закону: $f^*g(\widehat{X},\widehat{Y}) = \langle\langle f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}\rangle\rangle$, где $\widehat{X},\widehat{Y}$ — векторные поля на области Ω, $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ — индуцированная метрика на f^*TM. Значит, для индуцированной в расслоении f^*TM связности $\overline{\nabla}$ имеем $(\overline{\nabla}_{\widehat{X}}g)(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}) = 0$ или

$$
\widehat{X}\langle\langle f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \langle\langle\overline{\nabla}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{\nabla}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Z}\rangle\rangle. \tag{10}
$$

Теорема 5. *Пусть $f\colon(\Omega\subset\widehat{M})\to(M,g)$ — гладкое погружение многообразия с линейной связностью $\widehat{\nabla}$ без кручения в риманово многообразие. Тогда связность $\widehat{\nabla}$ является связностью Леви-Чивиты индуцированной метрики в том и только в том случае, если для второй фундаментальной формы погружения выполнено*

$$
\langle\langle(\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}), f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = 0, \tag{11}
$$

где $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ — векторные поля на области Ω.

Доказательство. Обозначим через $\widehat{g}$ — метрику, индуцированную на области $\Omega \subset \widehat{M}$ тензорным полем f^*g, т.е. $\widehat{g}_x = (f^*g)_x$ в любой точке $x \in \Omega$. Находим ковариантную производную индуцированной метрики:

$$(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y},\widehat{Z}) = \widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g}(\widehat{Y},\widehat{Z}) - \widehat{g}(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y},\widehat{Z}) - \widehat{g}(\widehat{Y},\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Z}). \tag{12}$$

Выразим каждое слагаемое правой части этого соотношения с учетом того, что

$$\widehat{g}(\widehat{X},\widehat{Y}) = f^*g(\widehat{X},\widehat{Y}) = \langle\langle f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}\rangle\rangle.$$

Тогда в расслоении $f^*TM \otimes (T\Omega)^*$ последовательно получаем:

$$\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g}(\widehat{Y},\widehat{Z}) = \widehat{X}\langle\langle f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle;$$
$$\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y},\widehat{Z}) = \langle\langle f_*\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \langle\langle \overline{\nabla}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}), f_*\widehat{Z}\rangle\rangle;$$
$$\widehat{g}(\widehat{Y},\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Z}) = \langle\langle f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Z}\rangle\rangle = \langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{\nabla}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \langle\langle f_*\widehat{Y}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Z})\rangle\rangle.$$

После подстановки этих выражений в (12) в силу соотношения (10) имеем

$$(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y},\widehat{Z}) = \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}), f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \langle\langle f_*\widehat{Y}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Z})\rangle\rangle. \tag{13}$$

Итак, из условия (11) для второй фундаментальной формы $(\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y})$ погружения следует ковариантное постоянство индуцированной метрики $\widehat{g}$ в связности $\widehat{\nabla}$ (достаточность доказана).

Циклируя (13) по аргументам, запишем еще два равенства:

$$(\widehat{\nabla}_{\widehat{Y}}\widehat{g})(\widehat{Z},\widehat{X}) = \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{Y},\widehat{Z}), f_*\widehat{X}\rangle\rangle + \langle\langle f_*\widehat{Z}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{Y},\widehat{X})\rangle\rangle;$$
$$(\widehat{\nabla}_{\widehat{Z}}\widehat{g})(\widehat{X},\widehat{Y}) = \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{Z},\widehat{X}), f_*\widehat{Y}\rangle\rangle + \langle\langle f_*\widehat{X}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{Z},\widehat{Y})\rangle\rangle.$$

Вычитая второе соотношение из суммы (13) и первого, получаем

$$\langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}), f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \frac{1}{2}((\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y},\widehat{Z}) + (\widehat{\nabla}_{\widehat{Y}}\widehat{g})(\widehat{Z},\widehat{X}) - (\widehat{\nabla}_{\widehat{Z}}\widehat{g})(\widehat{X},\widehat{Y})),$$

откуда следует необходимость ковариантного постоянства индуцированной метрики $\widehat{g}$. □

Тензор K статистической структуры порождает на области $\Omega \subset \widehat{M}$ тензорное поле f^*K вдоль отображения по закону

$$f^*K(\widehat{X},\widehat{Y},\widehat{\theta}) = \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}, f^*\widehat{\theta}),$$

где $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$ — векторные поля, $\widehat{\theta}$ — 1-форма на области Ω. Тогда можно отождествить индуцированный оператор $\overline{K}_{\widehat{X}}$ такой, что $\overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y} = \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y})$, с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры на области Ω.

Теорема 6. *Пусть $f\colon (\Omega \subset \widehat{M}) \to (M,g,K)$ — гладкое погружение многообразия с линейной связностью $\widehat{\nabla}$ без кручения в статистическое многообразие. Тогда для фиксированной α-связности ∇^α на прообразе Ω индуцируется статистическая структура с подходящей $\widehat{\alpha}$-связностью $\widehat{\nabla}$ в том и только в том случае, если для второй фундаментальной формы погружения выполнено:*

$$\langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}) + (\widehat{\alpha}-\alpha)\cdot \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = 0. \tag{14}$$

Доказательство. В дополнение к метрике $\widehat{g}$, индуцированной на области $\Omega \subset \widehat{M}$ тензорным полем f^*g, обозначим через $\widehat{K}$ — структурный тензор, индуцированный тензорным полем f^*K, т.е. $\widehat{K}_x = (f^*K)_x$ в любой точке $x \in \Omega$. Покажем, что $(\widehat{g},\widehat{K})$ — индуцированная статистическая структура на прообразе Ω.

В самом деле, для любых векторных полей $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ на области $\Omega \subset \widehat{M}$ выполняются оба условия (1):

$$\widehat{K}\big(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}) = \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y} = \overline{K}_{\widehat{Y}} f_*\widehat{X} = \widehat{K}(f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{X});$$
$$\langle\langle \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}), f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \langle\langle \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \langle\langle f_*\widehat{Y}, \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Z})\rangle\rangle.$$

Тогда линейная связность $\widehat{\nabla}$ без кручения на области Ω будет подходящей $\widehat{\alpha}$-связностью индуцированной статистической структуры $(\widehat{g},\widehat{K})$ в том и только в том случае, если $f_*\widehat{\nabla} - \widehat{\alpha}\cdot\overline{K}$ является связностью Леви-Чивиты метрики $\widehat{g}$. Введем обозначение $\widehat{D} = f_*\widehat{\nabla} - \widehat{\alpha}\cdot\overline{K}$ и обоснуем критерий ковариантного постоянства индуцированной метрики $\widehat{g}$ в этой связности.

Находим ковариантную производную метрики $\widehat{g}$:

$$(\widehat{D}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y},\widehat{Z}) = \widehat{X}\langle\langle f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \langle\langle \widehat{D}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \langle\langle f_*\widehat{Y}, \widehat{D}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle. \tag{15}$$

Исходя из следствия вида второй фундаментальной формы погружения:

$$f_*\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y} = \overline{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y} - (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}),$$

выразим второе и третье слагаемые правой части (15):

$$\begin{aligned}
\langle\langle \widehat{D}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle &= \langle\langle f_*\overline{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \widehat{\alpha}\cdot\langle\langle \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \\
&= \langle\langle \overline{\nabla}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}), f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \widehat{\alpha}\cdot\langle\langle \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle; \\
\langle\langle f_*\widehat{Y}, \widehat{D}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle &= \langle\langle f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Z}\rangle\rangle - \widehat{\alpha}\cdot\langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \\
&= \langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{\nabla}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \langle\langle f_*\widehat{Y}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Z})\rangle\rangle - \widehat{\alpha}\cdot\langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

С другой стороны, для фиксированной α-связности ∇^α многообразия (M,g,K) связность Леви-Чивиты $D = \nabla^\alpha - \alpha\cdot K$ метрики g индуцирует на обратном образе f^*TM связность $\overline{D} = \overline{\nabla}^\alpha - \alpha\cdot\overline{K}$. В этой связности индуцированная метрика $\widehat{g}$ ковариантно постоянна: $(\overline{D}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y},\widehat{Z}) = 0$, откуда выводим, что

$$\begin{aligned}
\widehat{X}\langle\langle f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle &= \langle\langle \overline{D}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{D}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \\
&= \langle\langle \overline{\nabla}^\alpha_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \alpha\cdot\langle\langle \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{\nabla}^\alpha_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \alpha\cdot\langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Если считать, что для подходящей $\widehat{\alpha}$-связности $\widehat{\nabla}$ действие индуцированной связности $\overline{\nabla}$ на f^*TM совпадает с действием $\overline{\nabla}^\alpha$, то соотношение (15) последовательно примет вид:

$$\begin{aligned}
(\widehat{D}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y},\widehat{Z}) &= \langle\langle \overline{\nabla}^\alpha_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \alpha\cdot\langle\langle \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \langle\langle f_*\widehat{Y}, \nabla^\alpha_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \\
&- \alpha\cdot\langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \langle\langle \overline{\nabla}^\alpha_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}), f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \widehat{\alpha}\cdot\langle\langle \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle - \\
&- \langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{\nabla}^\alpha_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \langle\langle f_*\widehat{Y}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Z})\rangle\rangle + \widehat{\alpha}\cdot\langle\langle f_*\widehat{Y}, \overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\widehat{D}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y},\widehat{Z}) &= \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}) + (\widehat{\alpha}-\alpha)\cdot\overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle + \\
&+ \langle\langle f_*\widehat{Y}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Z}) + (\widehat{\alpha}-\alpha)\cdot\overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Z}\rangle\rangle.
\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, из условия (16) для второй фундаментальной формы $(\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y})$ погружения следует ковариантное постоянство индуцированной метрики $\widehat{g}$ в связности $f_*\widehat{\nabla} - \widehat{\alpha}\cdot\overline{K}$ (достаточность доказана).

Циклируя (16) по аргументам, запишем еще два равенства:

$$\begin{aligned}
(\widehat{D}_{\widehat{Y}}\widehat{g})(\widehat{Z},\widehat{X}) &= \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{Y},\widehat{Z}) + (\widehat{\alpha}-\alpha)\cdot\overline{K}_{\widehat{Y}} f_*\widehat{Z}, f_*\widehat{X}\rangle\rangle + \\
&+ \langle\langle f_*\widehat{Z}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{Y},\widehat{X}) + (\widehat{\alpha}-\alpha)\cdot\overline{K}_{\widehat{Y}} f_*\widehat{X}\rangle\rangle; \\
(\widehat{D}_{\widehat{Z}}\widehat{g})(\widehat{X},\widehat{Y}) &= \langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{Z},\widehat{X}) + (\widehat{\alpha}-\alpha)\cdot\overline{K}_{\widehat{Z}} f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}\rangle\rangle + \\
&+ \langle\langle f_*\widehat{X}, (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{Z},\widehat{Y}) + (\widehat{\alpha}-\alpha)\cdot\overline{K}_{\widehat{Z}} f_*\widehat{Y}\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Вычитая второе соотношение из суммы (16) и первого, получаем

$$\langle\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X},\widehat{Y}) + (\widehat{\alpha}-\alpha)\cdot\overline{K}_{\widehat{X}} f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z}\rangle\rangle = \frac{1}{2}((\widehat{D}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y},\widehat{Z}) + (\widehat{D}_{\widehat{Y}}\widehat{g})(\widehat{Z},\widehat{X}) - (\widehat{D}_{\widehat{Z}}\widehat{g})(\widehat{X},\widehat{Y})),$$

откуда следует необходимость ковариантного постоянства индуцированной метрики $\widehat{g}$ в описываемой связности. □

Погружения, удовлетворяющие условию теоремы 5, принадлежат классу относительно аффинных [22]. Тогда из теоремы 6 получаем

Следствие. *Гладкое погружение многообразия с линейной связностью* $\widehat{\nabla}$ *без кручения в статистическое многообразие является относительно аффинным в том и только в том случае, когда оно сохраняет «нумерацию параметра» α-связностей:* $\alpha = \widehat{\alpha}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозова Е. А., Ченцов Н. Н.* Естественная геометрия семейств вероятностных зконов// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1991. — *83.* — С. 133–265.
2. *Рылов А. А.* Связности, совместимые с метрикой, и статистические многообразия// Изв. вузов. Мат. — 1992. — № 12. — С. 47–56.
3. *Рылов А. А.* Связности, совместимые с метрикой, в теории статистических многообразий// Изв. вузов. Мат. — 1994. — № 3. — С. 62–64.
4. *Рылов А. А.* Связности Амари—Ченцова на логистической модели// Изв. Пензенск. гос. пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 2011. — № 26. — С. 195–206.
5. *Рылов А. А.* Связности постоянной кривизны на статистической модели Парето// Изв. Пензенск. гос. пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 2012. — № 30. — С. 155–163.
6. *Amari S.* Information Geometry and Its Applications. — Springer, 2016.
7. *Arwini K., Dodson C. T. J.* Information Geometry: Near Randomness and Near Independence. — Springer-Verlag, 2008.
8. *Furuhata H.* Hypersurfaces in statistical manifolds// Differ. Geom. Appl. — 2009. — *27*, № 3. — P. 420–429.
9. *Furuhata H., Hasegawa I.* Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds// in: Geometry of Cauchy–Riemann Submanifolds. — Singapore: Springer, 2016. — P. 179–215.
10. *Ivanova R.* A geometric observation on four statistical parameter spaces// Tensor, N.S. — 2010. — *72.* — P. 188–195.
11. *Lauritzen S.* Conjugate connections in statistical theory// in: Geometrization of Statistical Theory (*Dodson C. T. J.*, ed.). — Lancaster, 1987. — P. 33–51.
12. *Lauritzen S.* Statistical manifolds// in: Differential Geometry in Statistical Inference. — Hayward, California: Inst. of Math. Statistics, 1987. — P. 163–216.
13. *Matsuzoe H.* Complex statistical manifolds and complex affine immersions// in: Current Developments in Differential Geometry and Its Related Fields. — Singapore: World Scientific, 2016. — P. 183–199.
14. *Min C. R., Choe S. O., An Y. H.* Statistical immersions between statistical manifolds of constant curvature// Glob. J. Adv. Res. Class. Mod. Geom. — 2014. — *3*, № 2. — P. 66–75.
15. *Nielsen F.* An elementary introduction to information geometry// Entropy. — 2020. — *22.* — 1100.
16. *Nore T.* Second fundamental form of a map// Ann. Mat. Pura Appl. IV. Ser. — 1987. — *146.* — P. 281–310.
17. *Opozda B.* Bochner's technique for statistical structures// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2015. — *48.* — P. 357–395.
18. *Rylov A.* Constant curvature connections on statistical models// in: Information Geometry and Its Applications. — Cham: Springer, 2018. — P. 349–361.
19. *Siddiqui A. N., Shahid M. H., Lee J. W.* On Ricci curvature of submanifolds in statistical manifolds of constant (quasi-constant) curvature// AIMS Mathematics. — 2020. — *5*, № 4. — P. 3495–3509.
20. *Siddiqui A. N., Chen B.-Y., Siddiqi M. D.* Chen inequalities for statistical submersions between statistical manifolds// Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2021. — *18*, № 4. — 2150049.
21. *Takano K.* Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions// J. Geom. — 2006. — *85.* — P. 171–187.
22. *Yano K., Ishihara S.* Harmonic and relatively affine mappings// J. Differ. Geom. — 1975. — *10.* — P. 501–509.

Рылов Александр Аркадьевич
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: `alexander_rylov@mail.ru`