



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 220 (2023). С. 125–144  
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-125-144

УДК 519.2:531/534

## СПОНТАННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ.

### I. ФРАКТАЛЬНАЯ ПЫЛЬ

© 2023 г. В. В. УЧАЙКИН

**Аннотация.** Обзор посвящен описанию статистических свойств множества случайно распределенных в пространстве изолированных точек, являющихся узлами одной (или семейства независимых) реализации марковской цепи. Целью анализа этой модели является изучение условий возникновения кластеров в множестве этих узлов и описание их характеристик. В данной (первой) части обзора вводятся основные понятия статистики точечных распределений: производящие функционалы, многочастичные плотности, факториальные моменты, марковские цепи, корреляционные функции. Часть заканчивается описанием одномерных самоподобных (в статистическом смысле) множеств, генерируемых дробно-пуассоновским случайным процессом, и демонстрацией явления кластеризации.

**Ключевые слова:** точечные множества, моменты, производящие функционалы, многочастичные функции, марковские цепи, фракталы, пуассоновский процесс.

## SPONTANEOUS CLUSTERING IN MARKOV CHAINS.

### I. FRACTAL DUST

© 2023 V. V. USHAIKIN

**ABSTRACT.** The review is devoted to the description of the statistical properties of a set of isolated points randomly distributed in space, which are nodes of one (or a family of independent) realizations of a Markov chain. The purpose of the analysis of this model is to study the conditions for the emergence of clusters in the set of these nodes and to describe their characteristics. This (first) part of the review introduces the basic concepts of statistics of point distributions: generating functionals, many-particle densities, factorial moments, Markov chains, correlation functions. The part ends with a description of one-dimensional self-similar (in the statistical sense) sets generated by a Poisson-fractional random process and a demonstration of the clustering phenomenon.

**Keywords and phrases:** point sets, moments, generating functionals, multiparticle functions, Markov chains, fractals, Poisson process.

**AMS Subject Classification:** 65P40

**1. Введение.** Математическая модель *случайного точечного распределения* (случайного распределения точек в пространстве) лежит в основе статистической механики и других разделов современной теоретической физики. С простейшим вариантом такой модели, называемым физиками *идеальным газом*, а математиками *однородным пуассоновским ансамблем*, знакомятся еще в молекулярно-кинетической теории. Положение каждой материальной точки (молекулы) в этой модели считается не зависящим от расположения остальных точек (молекул) газа. Отклонение от этой схемы становится существенным уже при рассмотрении реальных газов и жидкостей благодаря действию Ван-дер-Ваальсовых сил, порождающих корреляции между молекулами. В обычных условиях они являются короткодействующими, однако в состоянии турбулентности и при

фазовых переходах радиус корреляций резко возрастает [18]. Далекие корреляции наблюдаются в твердых телах с кристаллической или поликристаллической структурой, в пористых структурах, перколяционных системах, фракталах [12]. Наконец, самоподобные корреляции степенного типа наблюдаются в астрофизических исследованиях межзвездной среды и астрономических исследованиях крупномасштабной структуры Вселенной [1].

Естественно, можно построить различные модели коррелированного распределения точек в пространстве. Существует два распространенных подхода к построению таких моделей. Оба они базируются на понятии случайной величины. Если число координат, описывающих состояние системы, фиксировано (как, например, в динамике классической системы с заданным числом степеней свободы), то их можно считать случайными величинами, заданными на декартовом произведении пространств, и оперировать совместным распределением их вероятностей (иными словами, перейти к модели случайных векторов) [3]. Другой подход используют, когда число степеней свободы не фиксировано (как, например, в квантовой теории поля). Он основан на использовании понятия целочисленной случайной меры, и, несмотря на несколько более абстрактный характер, удобнее в приложениях и даже обладает большей наглядностью [6, 11].

Что касается мотивации построения каких-либо моделей реальных процессов, то можно с уверенностью назвать, как минимум, две ситуации, в которых обращение к моделированию может оказать решающее влияние на ход исследования. В первом случае принципиальные аспекты физики явления ясны, но существует много второстепенных процессов, в той или иной степени могущих повлиять на результат, и моделирование, учитывающее эти поправки, поможет оценить роль каждого из них и сосредоточиться на уточнении результата путем выделения наиболее значимой из них. В другом случае, экспериментальные данные не складываются еще в общую картину, идет процесс накопления их из разных источников. И в этом случае модель, возможно и не вполне адекватная, становится своего рода ориентиром, инструментом для сопоставления эмпирических выводов, неким прообразом будущей теории, ее феноменологическим зародышем.

## 2. Основные определения.

2.1. *Случайные точечные распределения.* Конечное множество различающихся точек

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

принадлежащих борелевскому подмножеству в  $\mathbb{R}^d$ , называется *точечным распределением*. Каждое точечное распределение порождает целозначную функцию области  $A$

$$N(A; x_1, \dots, x_k) \equiv N(A) = \sum_{i=1}^k 1(x_i; A).$$

Здесь и далее  $1(x; A)$  — индикаторная функция множества  $A$ :

$$1(x; A) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между точечными распределениями и функциями  $N(A)$ . Далее мы будем использовать функцию  $N(A)$  для обозначения точечных распределений и употреблять слово *частицы* для их случайных реализаций (то есть называть  $N(A)$  числом частиц в области  $A$ ).

Рассмотрим статистический ансамбль точечных распределений. Он может быть задан набором функций  $P(A_1, \dots, A_k; n_1, \dots, n_k)$ , определенных для любого целого  $k$ , любого множества целых чисел  $n_1, \dots, n_k$  и любого множества областей  $A_1, \dots, A_k$ , так что

$$P(A_1, \dots, A_k; n_1, \dots, n_k) = \mathbf{P}\{N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k\}.$$

Эти функции должны быть неотрицательными, самосогласованными, и отвечать некоторым другим требованиям [6, 11]. Пара семейств функций  $\{N\}$  и  $\{P\}$  образует *вероятностную меру*.

2.2. *Производящие функционалы.* Математическое описание вероятностных свойств случайного точечного распределения удобнее осуществлять с использованием *производящего функционала* (ПФ):

$$\Phi(u(\cdot)) = \mathbb{E} \exp \left\{ \sum_i \ln u(X_i) \right\} = \mathbb{E} \exp \left\{ \int N(dx) \ln u(x) \right\}, \quad (1)$$

где  $\mathbb{E}$  — символ математического ожидания,  $u(x)$  — некоторая измеримая функция,  $\mathbb{R}^d$ ,  $|u(x)| \leq 1$ . Детальное описание такого подхода может быть найдено в [6]. Приведем основные свойства ПФ.

1. ПФ  $\Phi(u(\cdot))$  существует для всех измеримых  $u(x)$  с  $|u(x)| \leq 1$ . Он принимает значения на простых функциях

$$0 \leq u(x) = \sum_{m=1}^M c_m 1(x; A_m) \leq 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

определяет однозначным образом распределение вероятностей случайной меры  $N(\cdot)$ .

2. Если  $|u(x)| \leq 1$ , тогда  $|\Phi(u(\cdot))| \leq 1$ ; если  $0 \leq u(x) \leq 1$ , тогда  $0 \leq \Phi(u(\cdot)) \leq 1$ . Далее,

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \Phi(\theta^{1(\cdot; A)}) = \mathbb{P}\{N(A) = 0\},$$

$$\lim_{\theta \uparrow 1} \Phi(\theta^{1(\cdot; A)}) = \mathbb{P}\{N(A) < \infty\}.$$

3. Пусть случайные меры  $N_1, N_2, \dots, N_k$  независимы и  $N = N_1 + \dots + N_k$ . Тогда соответствующие ПФ  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$  и  $\Phi$  связаны друг с другом соотношением

$$\Phi(u(\cdot)) = \Phi_1(u(\cdot)) \dots \Phi_k(u(\cdot)) = \prod_{i=1}^k \Phi_i(u(\cdot)). \quad (2)$$

2.3. *Факториальные моменты.* Важными характеристиками целозначных случайных мер являются их *факториальные моменты*  $\varphi^{[n]}(A_1, \dots, A_n)$ . Первый факториальный момент определяется как математическое ожидание  $N(A)$ :

$$\varphi^{[1]}(A) = \mathbb{E}N(A).$$

Второй факториальный момент

$$\varphi^{[2]}(A_1, A_2) = \mathbb{E}[N(A_1)N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)].$$

Третий факториальный момент

$$\begin{aligned} \varphi^{[3]}(A_1, A_2, A_3) = & \mathbb{E}[N(A_1)N(A_2)N(A_3) - N(A_1)N(A_2 \cap A_3) - \\ & - N(A_2)N(A_1 \cap A_3) - N(A_3)N(A_1 \cap A_2) + 2N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)]. \end{aligned}$$

Пусть  $C_1, \dots, C_m$  — непересекающиеся области  $\mathbb{R}^d$  и каждая из  $A_i$  совпадает с любой из  $C_j$ , встречающейся среди  $A_1, \dots, A_n$   $n_j$  раз. Тогда

$$\varphi^{[n]}(A_1, \dots, A_n) = \mathbb{E}[N^{[n_1]}(C_1) \dots N^{[n_m]}(C_m)], \quad (3)$$

где

$$N^{[n]}(C) \equiv N(C)[N(C) - 1] \dots [N(C) - n + 1]$$

и  $\mathbb{E}N^{[n]}(C)$  —  $n$ -й факториальный момент случайного целого числа  $N(C)$ . Расширение этого понятия на произвольные множества  $A_1, \dots, A_n$  дано в [6].

Следующее свойство связывает факториальные моменты с ПФ.

*Пусть случайная целозначная мера  $N(A)$  обладает факториальными моментами*

$$\varphi^{[1]}(A), \dots, \varphi^{[m]}(A_1, \dots, A_m).$$

Тогда ПФ  $\Phi(u(\cdot))$  может быть представлен в виде

$$\Phi(u(\cdot)) = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k!} \int \dots \int \bar{u}(x_1) \dots \bar{u}(x_k) \varphi^{[k]}(dx_1, \dots, dx_k) + R_m, \quad (4)$$

где  $\bar{u}(x) = 1 - u(x)$  и  $R_m$  — остаточный член (см. [6]).

Полагая

$$u(x) = u1(x; A),$$

мы сводим производящий функционал  $\Phi(u(\cdot))$  точечного распределения в  $\mathbb{R}^d$  к производящей функции  $\varphi(u)$  одной случайной величины.

Следуя традиции, сложившейся в теоретической физике, мы перейдем от мер множеств к их плотностям (в предположении, что они, конечно, существуют) с помощью соотношений

$$\varphi^{[k]}(dx_1, \dots, dx_k) = f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

Как следует из (4), плотности факториальных моментов  $f^{[k]}(x_1, \dots, x_k)$  могут быть выражены через функциональные производные от ПФ:

$$f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\delta \Phi(u(\cdot))}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_k)} \Big|_{u=1}. \quad (5)$$

Каждая из них инвариантна относительно перестановок своих аргументов.

Заметим, что согласно (3), в случае непересекающихся элементов  $dx_1, \dots, dx_k$  произведение  $f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$  дает среднее число наборов случайных точек (частиц) данного случайного точечного распределения, таких, что одна из них оказывается в  $dx_1$ , другая попадает в  $dx_2$  и так далее, а  $f^{[1]}(x) \equiv f(x)$  — средняя плотность (*концентрация*) частиц в точке  $x$ .

*2.4. Однородный пуассоновский ансамбль.* В качестве примера рассмотрим однородный пуассоновский ансамбль. Пусть  $u(x)$  — простая функция

$$u(x) = \sum_{m=1}^M u_m 1(x; A_m).$$

Подставляя её в (1) и учитывая, что

$$\ln \sum_{m=1}^M u_m 1(x; A_m) = \sum_{m=1}^M \ln u_m 1(x; A_m)$$

и

$$\int N(dx) 1(x; A_m) = N(A_m),$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi(u(\cdot)) &= \mathbb{E} \exp \left\{ \sum_{m=1}^M \ln u_m N(A_m) \right\} = \mathbb{E} \prod_{m=1}^M u_m^{N(A_m)} = \prod_{m=1}^M \mathbb{E} u_m^{N(A_m)} = \\ &= \prod_{m=1}^M \exp \{ (u_m - 1) \mathbb{E} N(A_m) \} = \exp \left\{ \sum_{m=1}^M (u_m - 1) \mathbb{E} N(A_m) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \int [u(x) - 1] f(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Множественное дифференцирование функционала (6) по  $u(x)$  дает

$$f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) = f(x_1) \dots f(x_k).$$

Таким образом, для пуассоновского ансамбля факториальные моменты высших порядков факторизуются, и это их свойство может быть использовано для описания корреляций в других ансамблях в терминах разностей

$$\xi_k(x_1, \dots, x_k) = f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) - f(x_1) \dots f(x_k).$$

Для  $k = 2$  эта функция отражает простейший тип корреляций, а именно *парные корреляции*. Для  $k = 3$  возможны два типа корреляций: когда две частицы коррелированы, а третья независима, и когда все три частицы коррелированы. Соответствующие члены в  $\xi_3(x_1, x_2, x_3)$  записываются в виде  $f(x_i)\theta_2(x_j, x_k)$  и  $\theta_3(x_1, x_2, x_3)$  соответственно.

Чтобы проанализировать возможные типы в общем случае, необходимо рассмотреть все способы разбиения множества  $\{x_1, \dots, x_k\}$  на непересекающиеся подмножества, содержащие по меньшей мере одну частицу. Интерпретируя каждое подмножество или группу (*кластер*) как набор взаимно коррелированных частиц, статистически независимых от частиц других подмножеств, мы получим следующее представление для плотностей факториальных моментов, которое известно как *групповое разложение*:

$$\begin{aligned} f^{[2]}(x_1, x_2) &= f(x_1)f(x_2) + \theta_2(x_1, x_2), \\ f^{[3]}(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1)f(x_2)f(x_3) + f(x_1)\theta_2(x_2, x_3) + \\ &+ f(x_2)\theta_2(x_1, x_3) + f(x_3)\theta_2(x_1, x_2) + \theta_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

и так далее. Функции  $\theta_n(x_1, \dots, x_k)$ , называемые *неприводимыми  $n$ -частичными корреляционными функциями*, интерпретируются как характеристики  *$n$ -частичных кластеров*. Явное их представление зависит от выбранной модели динамической системы (классической, квантовой, стохастической, [10]). Наш обзор посвящен кластерам узлов в марковской модели, точнее, кластерам, образуемым множеством узлов ансамбля марковских цепей.

### 3. Марковские цепи.

*3.1. Функциональное уравнение.* Пусть в  $\mathbb{R}^d$  имеется случайное распределение  $N_0(A)$  частиц с известным ПФ, и

$$\Phi_0(u(\cdot)) = \mathbb{E} \exp \left\{ \int N_0(dx) \ln u(x) \right\}, \quad (7)$$

и пусть каждая из них  $X_i$  порождает в следующем поколении свое распределение потомков  $N(X_i \rightarrow A)$ . Тогда совокупное распределение всех частиц нового поколения  $N(A)$  может быть представлено в виде суммы

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\nu} N(X_i \rightarrow A), \quad (8)$$

где  $\nu$  — число всех начальных частиц (то есть частиц нулевого поколения), а слагаемые с разными первыми аргументами  $X_i = x_i$  статистически независимы. Именно это обстоятельство и является определяющим свойством *ветвящегося процесса*.

Вычислим ПФ этого распределения по формуле полного математического ожидания. Согласно (2)

$$\Phi(u(\cdot)|X_1, \dots, X_\nu) = \prod_{i=1}^{\nu} G(X_i \rightarrow u(\cdot)), \quad (9)$$

где  $G(X_i \rightarrow u(\cdot))$  — ПФ распределения  $N(X_i \rightarrow A)$ , включающего точку  $X_i$ . Вычисляя теперь математическое ожидание (9) с учётом (1) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(u(\cdot)) &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{\nu} G(X_i \rightarrow u(\cdot)) = \mathbb{E} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \ln G(X_i \rightarrow u(\cdot)) \right\} = \\ &= \mathbb{E} \exp \left\{ \int N_0(dx) \ln G(x \rightarrow u(\cdot)) \right\} = \Phi_0(G(\cdot \rightarrow u(\cdot))). \end{aligned}$$

При заданном  $\Phi_0(u(\cdot))$  функциональное соотношение

$$\Phi(u(\cdot)) = \Phi_0(G(\cdot \rightarrow u(\cdot))) \quad (10)$$

содержит полную информацию о случайном распределении первичных частиц в пространстве и отражает взаимную независимость семейств частиц-потомков. Чтобы найти статистические свойства всех точек, нужна информация, касающаяся развития семейств, то есть конкретный вид ПФ  $G(x \rightarrow u(\cdot))$ .

Для замыкания уравнения (10) воспользуемся моделью *марковского процесса*, согласно которой каждая частица  $X_i$  порождает  $\nu_i$  частиц следующего поколения, распределённых с ПФ  $K(X_i \rightarrow u(\cdot))$  и этот процесс повторяется с тем же ПФ  $K(x \rightarrow u(\cdot))$ . Искомое случайное точечное

распределение состоит из частиц всех поколений, включая начальные частицы. Определенный таким образом случайный процесс является *марковским ветвящимся процессом* с дискретным временем (роль которого играет номер поколения).

Кластер, состоящий из частиц всех поколений, восходящих к одной начальной частице, будем называть *каскадом*. Полное распределение каскада, порожденного частицей  $X_i$ , представляется в виде, подобном (8)

$$N(X_i \rightarrow A) = 1(X_i; A) + \sum_{k=1}^{\nu_i} N(X_{ik} \rightarrow A),$$

где  $\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}, \dots, X_{i\nu_i}\}$  — случайное распределение с ПФ  $K(X_i \rightarrow u(\cdot))$ . ПФ каскада  $N(X_i \rightarrow A)$  связано с ПФ распределения прямых потомков функциональным соотношением

$$G(x \rightarrow u(\cdot)) = u(x)K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot))). \quad (11)$$

Вместе с известными ПФ  $\Phi_0$  и  $K$  соотношения (10) и (11) дают полное описание статистических свойств рассматриваемых точечных распределений.

Во избежание недоразумений, сравним уравнение (11) с уравнением (6) главы XII монографии Севастьянова. В наших обозначениях, его уравнение примет вид:

$$F(x \rightarrow u(\cdot); t+1) = K(x \rightarrow F(\cdot \rightarrow u(\cdot); t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad F(x \rightarrow u(\cdot); 0) = u(x).$$

Наблюдаемое различие в этих уравнениях объясняется тем, что в нашем уравнении  $G$  есть ПФ суммарного распределения частиц всех поколений каскада, образованного одной первичной частицей каскадом по его завершении, тогда как в уравнении Севастьянова  $F$  есть ПФ случайного распределения частиц  $t+1$ -го (в левой части) и  $t$ -го (в правой) поколений. При этом происходит разбиение кластеров на подкластеры, отнесенные разным поколениям, что изменяет результирующую картину. Уравнение (11) в этом смысле является более подходящим для кластерного анализа, так как номер поколения каскада обычно не играет самостоятельной роли в описании физических процессов.

*3.2. Пространственно однородные распределения.* Предположим теперь, что *затравочные частицы распределены согласно однородному пуассоновскому ансамблю со средней плотностью  $\rho_0 = \text{const}$* . Тогда уравнение (10) принимает вид (6):

$$\Phi(u(\cdot)) = \exp \left\{ \rho_0 \int [G(x \rightarrow u(\cdot)) - 1] dx \right\}. \quad (12)$$

Заметим, что если затравочные частицы не производят потомков, то

$$K(x \rightarrow u(\cdot)) = 1$$

и, согласно уравнению (11),

$$G(x \rightarrow u(\cdot)) = u(x).$$

В этом случае мы получаем простой однородный пуассоновский ансамбль независимых частиц.

Используя (5), можно найти из (12) связь между неприводимыми корреляционными функциями  $\theta_k$  и плотностями факториальных моментов

$$\begin{aligned} g^{[k]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_k) &= \left. \frac{\delta^k G(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_k)} \right|_{u=1} : \\ \theta_k(x_1, \dots, x_k) &= \rho_0 \int g^{[k]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_k) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Если процесс развития семейств пространственно однороден, тогда функции  $g^{[k]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_k)$  зависят только от разностей  $x_1 - x, \dots, x_k - x$ , так что

$$\begin{aligned} g^{[k]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_k) &\equiv g^{[k]}(x_1 - x, \dots, x_k - x), \\ f &= \rho_0 \int g^{[1]}(x) dx = \text{const}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\theta_2(x_{21}) = \rho_0 \int g^{[2]}(x', x_{21} + x') dx', \quad x_{21} = x_2 - x_1,$$

$$\theta_3(x_{21}, x_{31}) = \rho_0 \int g^{[3]}(x', x_{21} + x', x_{31} + x') dx'$$

и так далее.

3.3. *Плотности случайного распределения.* Знание первой плотности (концентрации)

$$f(x) = \mathbf{E}N(dx)/dx$$

случайного точечного распределения является необходимым и достаточным условием для вычисления математического ожидания аддитивных функций  $H(X_1, X_2, X_3, \dots) = \sum h(X_i)$ :

$$J \equiv \mathbf{E}H(X_1, X_2, X_3, \dots) = \int h(x)f(x)dx.$$

Чтобы получить соответствующие соотношения, необходимо взять функциональную производную от (10) и (11) и затем положить  $u(x) = 1$ . Выполняя эту процедуру в соответствии с правилами функционального дифференцирования, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi(u(\cdot))}{\delta u(x)} &= \frac{\delta\Phi_0(F(u(\cdot)|\cdot))}{\delta u(x)}, \\ \frac{\delta\Phi_0(G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta u(x)} &= \int \frac{\delta\Phi_0(G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x)} dx'. \end{aligned} \quad (15)$$

При  $u \rightarrow 1$ ,  $G(\cdot \rightarrow u(\cdot)) \rightarrow 1$ , и согласно (4), это уравнение принимает вид

$$f(x) = \int dx' f_0(x') g(x' \rightarrow x). \quad (16)$$

Физический смысл его становится ясным, если принять во внимание, что

$$g(x' \rightarrow x) \equiv g^{[1]}(x' \rightarrow x)$$

является плотностью узлов в точке  $x$  подкаскада с началом в точке  $x'$ , тогда как  $f_0(x')$  — концентрация начальных узлов.

Дифференцируя подобным же образом второе соотношение (11)

$$\frac{\delta G(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} = \delta(x - x_1)K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot))) + u(x) \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta u(x_1)}$$

и следуя уравнению (15), получим

$$\frac{\delta G(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} = \delta(x - x_1)K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot))) + u(x) \int \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} dx'. \quad (17)$$

Полагая здесь  $u(x) = 1$ , приходим к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

$$g(x \rightarrow x_1) = \delta(x - x_1) + \int k(x \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_1) dx'. \quad (18)$$

с ядром

$$k(x \rightarrow x') \equiv \left. \frac{\delta K(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x')} \right|_{u=1}.$$

Решение уравнения (18) даёт усреднённую по ансамблю плотность распределения (по переменной  $x_1$ ) узлов кластера марковской цепи, состоящего из всех потомков частицы  $x$ , ядро уравнения показывает вклад в эту плотность её прямых потомков, а сингулярный член правой части даёт вклад родительской частицы. среднюю пространственную плотность прямых потомков частицы  $x$ .

Предполагая, что ряд Неймана для интегрального уравнения (18) сходится (скажем, выполняется условие  $\int k(x' \rightarrow x) dx = c < 1$ ), мы можем записать его решение в виде

$$g(x' \rightarrow x) = \delta(x - x') + \sum_{i=1}^{\infty} k^{(i)}(x' \rightarrow x), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} k^{(1)}(x' \rightarrow x) &= k(x' \rightarrow x), \\ k^{(i)}(x' \rightarrow x) &= \int k^{(i-1)}(x' \rightarrow x'')k(x'' \rightarrow x)dx''. \end{aligned}$$

В уравнении (19) удобно избавиться от  $\delta$ -сингулярности, введя функцию

$$g'(x' \rightarrow x) = g(x' \rightarrow x) - \delta(x - x') = \sum_{i=1}^{\infty} k^{(i)}(x \rightarrow x'),$$

в свою очередь удовлетворяющую уравнению

$$g'(x \rightarrow x') = \int dx''k(x \rightarrow x'')g'(x'' \rightarrow x') + k(x \rightarrow x'). \quad (20)$$

Если ядро  $k(x \rightarrow x'')$  является инвариантом относительно трансляций

$$k(x \rightarrow x'') = k(x'' - x),$$

то

$$\int g(x' \rightarrow x)dx = \frac{1}{1 - \int k(x)dx} \equiv \frac{1}{1 - c}. \quad (21)$$

Таким образом, полная средняя плотность (16) с  $f_0(x) = \text{const}$  будет конечной, только если выполнено условие

$$c \equiv \int k(x)dx < 1.$$

Коэффициент  $c$  имеет смысл вероятности выживания частицы, продолжающей формирование кластера при переходе в следующее поколение. При заданном распределении начальных частиц (частиц нулевого поколения)  $f_0(x)$  уравнение для суммарной концентрации узлов всех поколений имеет вид

$$f(x) = f_0(x) + c \int f(x')p(x' \rightarrow x)dx',$$

где  $p(x' \rightarrow x)$  — переходная плотность вероятности,  $\int p(x' \rightarrow x)dx = 1$ .

*3.4. Уравнение Орнштейна—Цернике.* Важнейшую роль в кластеризации точечных распределений играют уже упоминавшиеся выше корреляционные функции различных порядков. Здесь мы рассмотрим специфические связи между ними, имеющие место в рассматриваемой модели марковских цепей. Начнем с двухточечной корреляционной функции

$$\theta_2(x_1, x_2) = \rho_0 \int g^{[2]}(x \rightarrow x_1, x_2)dx. \quad (22)$$

Дифференцируя (17) ещё раз, получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 G(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_2)\delta u(x_1)} &= \delta(x_1 - x) \int \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_2)} dx' + \\ &+ \delta(x_2 - x) \int \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} dx' + \\ &+ u(x) \left\{ \iint \frac{\delta^2 K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))\delta G(x'' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} \frac{\delta G(x'' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_2)} dx' dx'' + \right. \\ &\left. + \int \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta^2 G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)\delta u(x_2)} dx' \right\}. \end{aligned}$$

Полагая  $u(x) = 1$ , приходим к интегральному уравнению для плотности второго факториального момента в случае единственного каскада:

$$g^{[2]}(x \rightarrow x_1, x_2) = \delta(x_1 - x) \int k(x \rightarrow x')g(x' \rightarrow x_2)dx' + \delta(x_2 - x) \int k(x \rightarrow x')g(x' \rightarrow x_1)dx' +$$

$$+ \int dx' \int dx'' k^{[2]}(x \rightarrow x', x'') g(x' \rightarrow x_1) g(x'' \rightarrow x_2) + \int dx' k(x \rightarrow x') g^{[2]}(x' \rightarrow x_1, x_2).$$

Его решение имеет вид:

$$g^{[2]}(x \rightarrow x_1, x_2) = g(x \rightarrow x_1) \int k(x_1 \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_2) dx' + g(x \rightarrow x_2) \int k(x_2 \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_1) dx' + \\ + \int dx' g(x \rightarrow x') \int dx'' \int dx''' k^{[2]}(x' \rightarrow x'', x''') g(x'' \rightarrow x_1) g(x''' \rightarrow x_2). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и принимая во внимание (14), приходим к выражению

$$\theta_2(x_1, x_2) = \rho \left\{ \int k(x_1 \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_2) dx' + \right. \\ \left. + \int k(x_2 \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_1) dx' + \int dx' \int dx'' \bar{k}^{[2]}(x', x'') g(x' \rightarrow x_1) g(x_2 \rightarrow x'') \right\},$$

где

$$\bar{k}^{[2]}(x', x'') = \int k^{[2]}(x \rightarrow x', x'') dx.$$

Используя уравнения (18), (19) с обозначением

$$g'(x' \rightarrow x) = \sum_{i=1}^{\infty} k^{(i)}(x' \rightarrow x),$$

можно переписать результат в виде

$$\theta_2(x_1, x_2) = \rho \left\{ g'(x_1 \rightarrow x_2) + g'(x_2 \rightarrow x_1) + \int dx' \int dx'' \bar{k}^{[2]}(x', x'') g(x' \rightarrow x_1) g(x_2 \rightarrow x'') \right\}.$$

Множественно беря функциональные производные от обеих частей уравнения (11), переписанного в виде

$$G(x \rightarrow u(\cdot)) = u(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n k^{[n]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_n) \times \\ \times [u(x) \bar{G}(x_1 \rightarrow u(\cdot)) \dots \bar{G}(x_n \rightarrow u(\cdot))],$$

получим следующую систему уравнений для плотностей факториальных моментов произвольного порядка:

$$g^{[n]}(x \rightarrow 1, \dots, n) \stackrel{s}{=} \int d1' k(x \rightarrow 1') g^{[n]}(1' \rightarrow 1, \dots, n) + h_n(x \rightarrow 1, \dots, n), \quad (24)$$

где

$$h_1(x \rightarrow 1) = \delta(x, 1)$$

и

$$h_n(x \rightarrow 1, \dots, n) = n \delta(x, 1) \int d1' k(x \rightarrow 1') g^{[n-1]}(1' \rightarrow 2, \dots, n) + \\ + \sum_{m=2}^n \frac{1}{m!} \int d1' \dots \int dm' k^{[m]}(x \rightarrow 1', \dots, m') \sum_{n_1 \dots n_m \geq 1} \left\{ \binom{n}{n_1 \dots n_m} \delta_{N_m, n} g^{[n_1]}(1' \rightarrow 1, \dots, n_1) \dots \right. \\ \dots g^{[n_m]}(m' \rightarrow N_{m-1} + 1, \dots, n) + n \delta(x, 1) \binom{n-1}{n_1 \dots n_m} \delta_{N_m, n-1} g^{[n_1]}(1' \rightarrow 2, \dots, n_1 + 1) \dots \\ \left. \dots g^{[n_m]}(m' \rightarrow N_{m-2} + 2, \dots, n) \right\}, \quad N_m = n_1 + \dots + n_m, \quad n > 1.$$

Здесь мы использовали обозначения  $1, 2, \dots$  и  $1', 2', \dots$  для  $x_1, x_2, \dots$  и  $x'_1, x'_2, \dots$  соответственно, и  $\delta(x, 1)$  для  $\delta(x - x_1)$ . Напомним также, что  $\stackrel{s}{=}$  означает симметризацию правой части:

$$f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{s}{=} g(x_1, \dots, x_n)$$

означает

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum'_{i_1 \dots i_n} g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}),$$

где штрих указывает на то, что слагаемые с двумя или более совпадающими индексами опущены.

Поскольку  $g^{[1]}(x \rightarrow 1) \equiv g(x \rightarrow 1)$  подчиняется уравнению

$$g(x \rightarrow 1) = \int d1' k(x \rightarrow 1') g(1' \rightarrow 1) + \delta(x, 1), \quad (25)$$

она может быть использована в качестве функции Грина для всех остальных уравнений (24) и мы можем получить их решения в рекуррентном виде:

$$g^{[n]}(x \rightarrow 1, \dots, n) \stackrel{s}{=} \int dx' g(x \rightarrow x') h_n(x' \rightarrow 1, \dots, n).$$

В случае отсутствия ветвления все  $k^{[m]}$ ,  $m \geq 2$ , равны нулю и получается простой результат для функций  $\theta_n$ . Подставляя функцию

$$h_n(x \rightarrow 1, \dots, n) = n\delta(x, 1) \int d1' k(x \rightarrow 1') g^{[n-1]}(1' \rightarrow 2, \dots, n)$$

в уравнение (24), получим

$$g^{[n]}(x \rightarrow 1, \dots, n) \stackrel{s}{=} ng(x \rightarrow 1) \int d1' k(1 \rightarrow 1') g^{[n-1]}(1' \rightarrow 2, \dots, n), \quad n \geq 2.$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что системе уравнений удовлетворяют решения

$$g^{[n]}(x \rightarrow 1, \dots, n) \stackrel{s}{=} n!g(x \rightarrow 1)g'(1 \rightarrow 2) \dots g'(n-1 \rightarrow n),$$

где

$$g'(x \rightarrow x') = \int dx'' k(x \rightarrow x'') g(x'' \rightarrow x')$$

подчиняется уравнению

$$g'(x \rightarrow x') = \int dx'' k(x \rightarrow x'') g'(x'' \rightarrow x') + k(x \rightarrow x'),$$

вытекающему из (25). Таким образом, в соответствии с (13), учитывая (21), получаем

$$\theta_k(x_1, \dots, x_k) \stackrel{s}{=} \rho k! g'(1 \rightarrow 2) \dots g'(k-1 \rightarrow n),$$

где

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-c} = \text{const.}$$

## 4. Фракталы.

*4.1. Самоподобие множеств.* Концепция подобия, проявляющаяся в степенных функциях и устойчивых законах, является не просто некоторым частным их свойством, оно отражает важнейшее свойство многих наблюдаемых в природе структур и построенных на их основе моделей. Применительно к геометрическим структурам самоподобие (в узком смысле) означает инвариантность структуры относительно масштабного преобразования координат:  $x \mapsto ax$ ,  $a > 0$ . Масштабно инвариантными являются точка, прямая, плоскость, пространство: как не изменяй масштаб, точка остается точкой, а прямая (бесконечная прямая) — прямой.

Важную роль в анализе самоподобных структур играет понятие *размерности*. Термин «размерность» употребляется в различных смыслах: размерность физической величины, размерность фазового пространства и т. п. Даже в чисто *геометрическом* аспекте существует несколько определений размерности, соответствующих разным понятиям. Наиболее известное определение размерности — минимальное число независимых координат, необходимых для однозначного определения положения точки. Так определенная размерность является целым числом, равным 3 для пространства, 2 — для поверхности, 1 — для линии. При другом (*топологическом*) определении

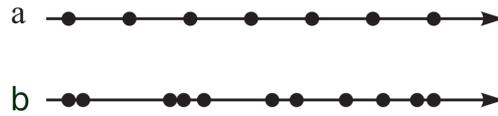


Рис. 1. Одномерная решетка (a) и одномерный газ (b).

размерность множества также полагается целым числом, на единицу большим размерности разреза, разделяющего его на две несвязанные части (примеры: разрезать трехмерное множество можно двумерной поверхностью, поверхность — одномерной линией).

Размерность самоподобия  $D$  определяется формулой

$$D = \frac{\ln N}{\ln n}, \quad (26)$$

где  $N$  — число одинаковых частей, на которые можно разрезать самоподобный объект на подобные ему части с линейными размерами в  $n$  раз меньшие исходных. Легко видеть, что определенная формулой (26) размерность, будучи примененной к отрезку, квадрату и кубу, дает соответственно значения 1, 2 и 3, согласующиеся с другими определениями. В отличие от них, однако, определение (26) может привести и к дробному значению.

Самоподобные множества с нецелой размерностью называют *фракталами*. Термин «фрактал» был введен в обиход Бенуа Мандельбротом, американским математиком польского происхождения (см. его работы [15, 16]). Именно геометрический аспект фрактальной концепции способствовал быстрому и широкому распространению фрактальных моделей в самых разных науках — физике, химии, материаловедении, биологии, физиологии, геологии, экологии, экономике, лингвистике, космологии [4, 7–9]. Несомненно также, что немалую роль в этом процессе сыграл и сам автор — блестящий популяризатор современного типа, умеющий «показать товар лицом» и в два счета убедить собеседника, что это — именно то, что ему нужно для достижения успеха. Успех самого Б. Мандельброта, вероятно, самого популярного в настоящее время математика в нематематической среде, является лучшим свидетельством тому, что он знает, о чем говорит.

**4.2. Фрактальная пыль.** Обычно присутствующая во фракталоподобных системах переменность (изменчивость от одного экземпляра к другому при сохранении общего мотива) дает основание рассматривать *стохастические (случайные) фракталы*. Введение стохастики существенно обогащает фрактальную концепцию и расширяет сферу ее применений. Стохастический фрактал не воспроизводим: он понимается как бесконечное множества реализаций с заданной на нем вероятностной мерой (*статистический ансамбль Гиббса*). Соотношение подобия понимается теперь в смысле математического ожидания (среднего по ансамблю), а свойство самоподобия распространяется и на вероятностные характеристики стохастического фрактала. Будучи стохастическим в одном масштабе, в силу самоподобия фрактал должен быть стохастическим и во всех других масштабах. Другими словами, увеличение размеров наблюдаемой части рассматриваемого стохастического фрактала не сопровождается уменьшением статистических флуктуаций. *Статистика фракталов — негауссова статистика, в ее основе лежат устойчивые распределения, отличные от нормального.*

Центральной моделью теоретической физики является материальная точка — объект столь малых размеров, что для указания его положения в пространстве достаточно дать координаты одной геометрической точки. Разумеется, все зависит от рассматриваемой задачи: описывая Вселенную, мы можем считать такими точками целые галактики, в солнечной системе мы считаем точками планеты, в сосуде с газом — атомы или молекулы, изучая атом, мы считаем точками электроны и ядро.

Будем, для краткости, называть материальные точки *атомами*. Разместив атомы на прямой на равном расстоянии друг от друга, получим одномерную модель кристаллической решетки, а разбросав их случайно, получим модель одномерного газа. Здесь, однако, следует кое-что уточнить, и в первую очередь — понятие «случайно».

Пусть атомы расположены в точках  $x_1, x_2, x_3, \dots$  и расстояния между соседями разные и колеблются (не в смысле зависимости от времени — картина статичная, а в смысле их значений для разных промежутков) в широких пределах (Рис. 1). Можно ли сказать о том, что они распределены случайно? Нет, каким бы причудливым это распределение нам ни казалось. Для того, чтобы говорить о случайном распределении атомов на прямой, надо задать или хотя бы мысленно (как это делал Гиббс) представить статистический ансамбль, т. е. множество разных распределений атомов на прямой с заданными вероятностями появления каждого конкретного распределения. С этой точки зрения детерминированная среда — это ансамбль, все члены которого одинаковы. Поэтому, если мы имеем всего одно наблюдаемое распределение, нам не дано узнать, принадлежит оно статистическому или детерминированному ансамблю. Однако, если мы имеем возможность повторять эксперимент и наблюдать результат снова и снова, то уже при малом числе наблюдений можно установить факт случайности, а при большом — построить некоторую модель статистического ансамбля.

Предположим, что такая возможность есть, и что, наблюдая некоторый промежуток  $(0, x]$  оси, мы установили, что число атомов на нем  $N(x)$  распределено по закону Пуассона со средним значением  $\langle N(x) \rangle$ . Если теперь, разбивая  $(0, x]$  на отрезки  $\Delta x_i$  различной длины, мы будем получать тот же результат и для этих отрезков, т. е. увидим, что независимо от чисел атомов на других отрезках  $N(\Delta x_i)$  распределено по закону Пуассона со средним значением  $\langle N(\Delta x_i) \rangle = \langle N(x) \rangle \Delta x_i / x$ , пропорциональным  $\Delta x_i$ , то можно сказать, что мы имеем дело с *однородным пуассоновским ансамблем*, описывающим, например, одномерный идеальный газ.

Моделировать, т. е. получать конкретные реализации такого распределения, чрезвычайно просто. Поместив первый атом, например, в начале координат, случайное расстояние до первого соседа справа (или слева) можно выбрать из экспоненциального распределения с плотностью  $\psi_1(x) = \mu e^{-\mu x}$  и затем повторять эту процедуру в выбранном направлении. Ситуация такова, как если бы какая-то реальная частица двигалась вдоль оси  $x$ , испытывая столкновения в отдельных точках однородной среды, сопровождающиеся появлением в них атомов (ионов).

Заметим, что несмотря на очевидную связь между этими событиями, порождаемыми одной траекторией, случайные числа атомов в непересекающихся интервалах оказываются строго независимыми и образуют пуассоновский ансамбль, для которого среднее и дисперсия случайного числа  $N(x)$  имеют вид:

$$\langle N(x) \rangle = \mu x, \quad \langle N^2(x) \rangle - \langle N(x) \rangle^2 = \mu x,$$

где  $\mu = \text{const}$  — линейная плотность атомов. Это связано с особым свойством распределения  $\psi_1(x) = \mu e^{-\mu x}$ , удовлетворяющего уравнению

$$d\psi_1/dx = -\mu\psi_1;$$

отношение  $d\psi_1/\psi_1$  не зависит от  $x$ . В тех случаях, когда  $x$  имеет смысл времени, эта независимость пуассоновского процесса трактуется как *отсутствие памяти*.

Сохранив теперь тот же алгоритм блуждания для построения случайного распределения атомов на прямой, возьмем вместо  $\psi_1(x)$  другое распределение  $\psi(x)$ , не являющееся экспоненциальным. Пользуясь элементарными средствами теории вероятностей, можно найти распределение случайного числа атомов на отрезке  $[0, x]$  при условии, что первый из них находится в точке 0, среднее значение и дисперсию. Если при этом дисперсия распределения  $\psi(x)$  расстояния между соседними атомами конечна, то для толстых слоев мы по-прежнему получим  $\langle N(x) \rangle \propto x$ , и  $\sigma_{N(x)}^2 \propto x$ , т. е. относительные флуктуации  $\delta_{N(x)} = \sigma_{N(x)} / \langle N(x) \rangle$  числа атомов в слое толщиной  $x$  будут убывать как  $x^{-1/2}$ . Отличие от пуассоновского ансамбля лишь в том, что теперь это наблюдается в асимптотическом режиме (не при любых  $x$ , как выше, а только при больших).

В случае бесконечной дисперсии  $\psi(x)$  общие (т. е. не зависящие в асимптотике от конкретной формы  $\psi(x)$ ) результаты могут быть получены лишь для распределений с хвостами степенного типа  $\psi(x) \propto x^{-\nu-1}$ ,  $0 < \nu \leq 1$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Расчеты показывают, что в асимптотике больших толщин  $x$  среднее число атомов в слое растет пропорционально  $x^\nu$  (т. е. медленнее, чем в пуассоновском случае) и *относительные флуктуации асимптотически конечны*, т. е. с ростом  $x$  не исчезают,

как в пуассоновском случае, а стремятся к отличной от нуля постоянной. Такое поведение тесно связано с иерархической структурой корреляций, обусловленных ее кластерным характером, порождаемым дробно-дифференциальным оператором. С увеличением  $x$  растет не только число кластеров, но и их массивность (число их конституентов), соответственно увеличиваются флуктуации суммарной массивности, чем и обеспечивается асимптотическая тенденция постоянства относительных флуктуаций.

Если принять во внимание только первый факт, то можно было бы подумать, что речь просто идет о среде с переменной концентрацией атомов

$$f(x) = d\langle N(x) \rangle / dx \propto x^{-\nu-1},$$

убывающей с ростом  $x$  по степенному закону. Как это не удивительно, но это не так. Легко сообразить, что процесс блуждания, генерирующий распределение атомов, инвариантен относительно направления движения гипотетической «частицы», рассаживающей атомы, слева направо или справа налево, расстояния между соседями в любом случае распределены по одному и тому же закону. Это значит, что убывание  $f(x)$  должно наблюдаться в обе стороны от выбранной точки, положение которой мы выберем за начало координат. Но этот атом ничем не отличается от других, следовательно, плотность атомов должна убывать в обе стороны относительно любого из них. Парадоксальность ситуации очевидна: если относительно, скажем, точки  $x_1$ , плотность атомов убывает в обе стороны, то относительно  $x_2 > x_1$  она должна быть асимметричной: убывать направо и возрастать при перемещении точки наблюдения от  $x_2$  до  $x_1$  налево, а уж затем перейти в режим убывания, но с более высокого начального значения. Этого, однако, не происходит: все атомы рассматриваемой структуры равноправны. Мы имеем дело с *фрактальной пылью*.

4.3. *Генератор фрактальной пыли.* Назовем фрактальную пыль, для которой условия

$$\langle N_\nu(x) \rangle = \mu_\nu x^\nu, \quad f_\nu(x) = \mu_\nu \nu x^{\nu-1}, \quad 0 < \nu \leq 1 \quad (27)$$

выполняются не только в асимптотике больших толщин, но и при любых  $x$ , *совершенной фрактальной пылью*, а плотность  $\psi_\nu(x)$  — ее *генератором*. Генератор пыли связан с ее плотностью  $f_\nu(x)$  уравнением восстановления

$$f_\nu(x) = \psi_\nu(x) + \int_0^x f_\nu(x-x')\psi_\nu(x')dx'. \quad (28)$$

Поставим задачу найти генератор фрактальной пыли по заданным условиям (27).

Применим к уравнению восстановления преобразование Лапласа:

$$\widehat{f}_\nu(\lambda) = [1 + \widehat{f}_\nu(\lambda)]\widehat{\psi}_\nu(\lambda). \quad (29)$$

Случаю  $\nu = 1$  (равномерному в среднем распределению атомов на оси,  $f_1(x) = \mu_1$ ) соответствует

$$\psi_1(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x}$$

и, следовательно,

$$\widehat{\psi}_1(\lambda) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda}.$$

Действительно, подставив это выражение в уравнение (28) и разрешив его относительно  $\widehat{f}_1(\lambda)$ , получим

$$\widehat{f}_1(\lambda) = \frac{\widehat{\psi}_1(\lambda)}{1 - \widehat{\psi}_1(\lambda)} = \frac{\mu_1}{\lambda},$$

откуда и следует

$$f_1(x) = \mu_1.$$

Поставим теперь вопрос иначе: какой должна быть плотность  $\psi_\nu(x)$ , чтобы генерируемая ею стохастическая пыль имела фрактальную размерность  $\nu < 1$ , то есть чтобы выполнялись соотношения (27). Учитывая, что

$$\widehat{f}_\nu(\lambda) = \mu_\nu \nu \Gamma(\nu) \lambda^{-\nu},$$

из уравнения (29) находим

$$\widehat{\psi}_\nu(\lambda) = \frac{\widehat{f}_\nu(\lambda)}{1 + \widehat{f}_\nu(\lambda)} = \frac{\mu}{\mu + \lambda^\nu}, \quad \mu = \mu_\nu \nu \Gamma(\nu).$$

При выполнении обратного преобразования Лапласа

$$\psi_\nu(x) = \mathbb{L}^{-1}\{\widehat{\psi}_\nu(\lambda)\}(x) = \mathbb{L}^{-1}\left\{\frac{\mu}{\mu + \lambda^\nu}\right\}(x) = \mu \mathbb{L}^{-1}\left\{\lambda^{-\nu} \frac{1}{1 + a\lambda^{-\nu}}\right\}(x)$$

разложим сумму геометрической прогрессии в ряд,

$$\lambda^{-\nu} \frac{1}{1 + a\lambda^{-\nu}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \lambda^{-\gamma}, \quad \gamma = j\nu + \nu,$$

и воспользуемся соотношением

$$\mathbb{L}^{-1}\{\lambda^{-\gamma}\}(x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}.$$

В результате получим

$$\psi_\nu(x) = \mu x^{\nu-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\mu x^\nu)^j}{\Gamma(\nu j + \nu)}.$$

Учитывая представление двухпараметрической функции Миттаг-Леффлера в виде ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)},$$

перепишем генератор фрактальной пыли в виде:

$$\psi_\nu(x) = \mu x^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(-\mu x^\nu).$$

Напомним, что  $\psi_\nu(x)$  — плотность вероятности для случайного расстояния  $X$  между соседними атомами фрактальной пыли, запишем вероятность того, что  $X$  превысит заданное значение  $x$ :

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^{\infty} \psi_\nu(x) dx = E_\nu(-\mu x^\nu).$$

Здесь  $E_\nu$  — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера. При  $\nu = 1$  она превращается в обычную экспоненту,

$$E_1(-\mu x) = e^{-\mu x},$$

и мы имеем дело с обычным пуассоновским процессом. При  $\nu < 1$  мы имеем пуассоновский процесс дробного порядка (*дробный пуассоновский процесс*) [5, 13, 14, 22, 23].

График случайной функции  $N(x)$  имеет форму лестницы, все ступеньки которой имеют одинаковую высоту, но разную длину. Подниматься по такой лестнице не очень удобно. Особенно это становится неудобным, когда длины ступенек имеют большой разброс: длина ступеньки может оказаться очень большой, и бегущий уже думает, что миновал лестницу вообще, и тут под ноги ему попадает вновь ступенька, да и не одна. . . Оттого-то и называют ее дьявольской.

То же самое свойство фрактальной пыли проявляется в следующем эксперименте. Возьмем интервал длиной  $L$  с числом атомов  $N$ , разобьем его на  $n$  ячеек и, подсчитав число атомов в каждой из них, представим результат в виде гистограмм. При  $\nu = 1$  вид гистограммы будет зависеть от числа атомов  $N(L)$  в интервале  $L$  и числа ячеек. Если среднее число атомов в ячейке  $N(L)/n$  достаточно велико (скажем, больше трех — четырех десятков), то заполнены будут все ячейки и приблизительно одинаковым числом атомов. При фрактальном же распределении ( $\nu < 1$ ) часть ячеек, как правило, будет оставаться пустой (Рис. 2). Явление это носит название *перемежаемости*. Конечно, и в регулярном случае (при  $\nu = 1$ ) столбики гистограммы не будут иметь одинаковую высоту, но с увеличением  $N$  или увеличением длины отрезка  $L$  при фиксированном числе ячеек и эта разница будет уменьшаться. Во фрактальном же случае ( $\nu < 1$ ) увеличение  $N$  (достигаемое увеличением  $\mu_\nu$ ) или  $L$  не приводит к качественному изменению

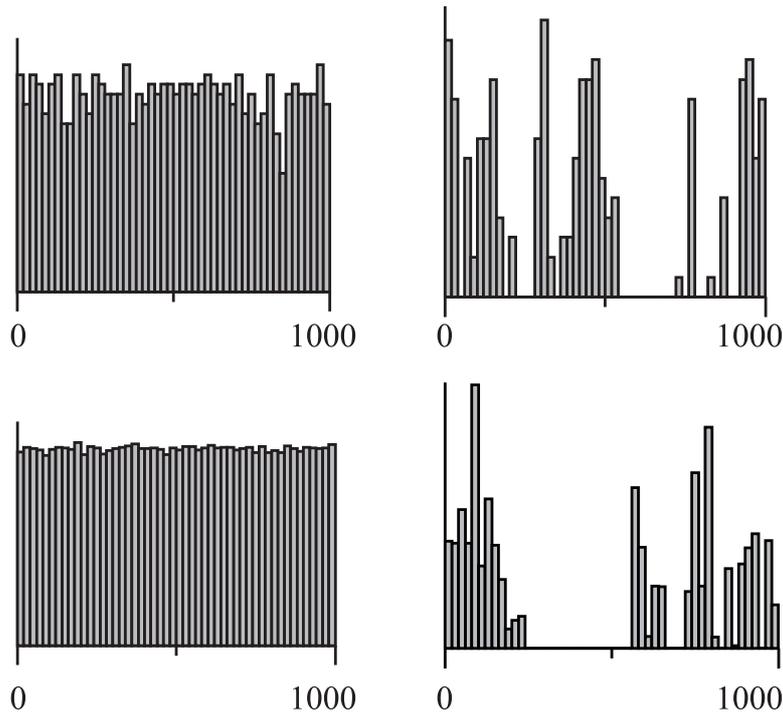


Рис. 2. Изменение в 100 раз сглаживает гистограмму в случае  $\nu = 1$  (слева) и не сглаживает ее в случае  $\nu < 1$  ( $\nu = 1/2$ ) (справа) [20]. В последнем случае мы видим кластеризацию узлов марковской цепи, являющихся одновременно и координатами случайных точек.

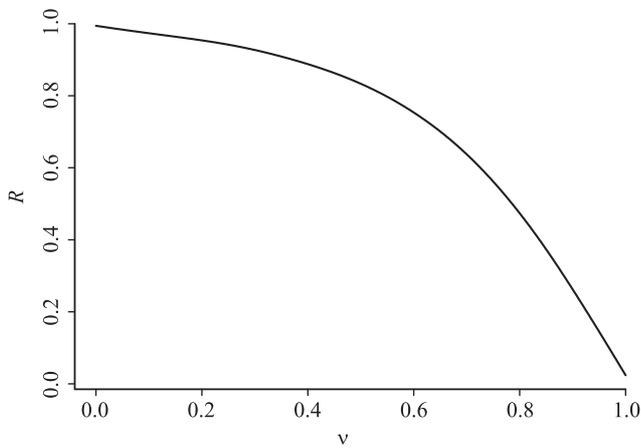


Рис. 3. Коэффициент перемежаемости как функция  $\nu$  [20].

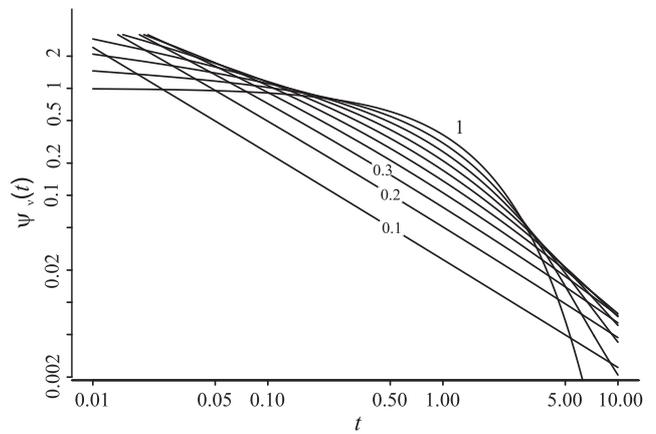


Рис. 4. Плотности  $\psi_\nu(x)$ ,  $\nu = 0,1(0,1)1$ .

картины: по-прежнему видны пустоты и сгущения (кластеры) (Рис. 2). Можно сказать, что на самоподобные структуры, коими являются фракталы, философский закон о переходе количества в качество не распространяется.

На рис. 3 показана зависимость *коэффициента перемежаемости* (средней доли пустых ячеек при  $\mu \rightarrow \infty$ )

$$R(\nu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \langle n_0/n \rangle.$$

Перепишав (29) в виде

$$[\lambda^\nu + \mu] \widehat{\psi}_\nu(\lambda) = \mu$$

и выполнив обратное преобразование, приходим к *дробно-дифференциальному уравнению*

$${}_0D_x^\nu \psi_\nu(x) + \mu \psi_\nu(x) = \mu \delta(x).$$

При  $\nu < 1$  решение этого уравнения выражается через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера

$$\psi_\nu(x) = \mu x^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(-\mu x^\nu), \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Существует еще одно представление этой плотности [5],

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-t} \phi_\nu(\mu x/t) dt, \quad \phi_\nu(\xi) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi[\xi^\nu + \xi^{-\nu} + 2 \cos(\nu\pi)]},$$

позволяющее увидеть степенной характер поведения плотности при  $\alpha \neq 1$  на больших и малых временах (рис. 4):

$$\psi_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{\mu^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}, & x \rightarrow 0; \\ \frac{\nu \mu^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} x^{-\nu-1}, & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь распределение  $p_n(x) = P(N(x) = n)$  для случайного числа атомов фрактальной пыли, разделенных случайными интервалами  $\xi_j$  на отрезке длиной  $x$ . Согласно теории восстановления

$$p_n(x) \equiv P(N(x) = n) = P\left(\sum_{j=1}^n \xi_j > x\right) - P\left(\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j > x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и следующая система интегральных уравнений для  $p_n(x)$  имеет место:

$$p_n(x) = \delta_{n0} \int_x^\infty \psi_\nu(\tau) d\tau + [1 - \delta_{n0}] \int_0^x \psi_\nu(x - \tau) p_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

После преобразования Лапласа:

$$\lambda^\nu \widehat{p}_n(\lambda) = -\mu \widehat{p}_n(\lambda) + \mu \widehat{p}_{n-1}(\lambda) + \lambda^{\nu-1} \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \widehat{p}_{-1} = 0.$$

Обратное преобразование приводит к системе уравнений для фрактального распределения:

$${}_0D_x^\nu p_n(x) = \mu [p_{n-1}(x) - p_n(x)] + \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \delta_{n0}, \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (30)$$

При  $\nu \rightarrow 1$  она превращается в систему для регулярного случая:

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \mu [p_{n-1}(x) - p_n(x)] + \delta(x) \delta_{n0}.$$

Здесь использовано предельное (в смысле обобщенных функций) соотношение

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} = \delta(x).$$

Уравнения (30) и описывают статистические свойства дьявольской лестницы. При  $\nu = 1$  длины разных ступенек, хоть и имеют разброс, но разброс этот не критический: нет ни очень коротких ступенек (точнее, они маловероятны), ни очень длинных, и можно как-то приноровиться. Дьявольский характер лестницы проявляется лишь при  $\nu < 1$ : у плотности распределения длины ступеньки появляется особенность в нуле, порождая сгущения ступенек (кластеры), и тяжелый степенной хвост, ответственный за появление длинных полок, усыпляющих бдительность бегущего. Но плотность распределения длины ступеньки удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое при  $\nu < 1$  становится дробным. Таким образом, *дьявольский характер лестницы возникает одновременно с дробным характером дифференциального уравнения.*

4.4. *Предельное дробно-пуассоновское распределение.* Пусть случайная величина  $N$  с целочисленными значениями  $n$  распределена по дробно-пуассоновскому закону порядка  $\nu$  с математическим ожиданием  $EN = \bar{n}$ . Введем случайную величину  $Z(\nu) = N/\bar{n}$  и квазинепрерывную переменную  $z = n/\bar{n}$ . Плотность вероятности  $Z$ , зависящую от параметра  $\bar{n}$ , обозначим через  $f_\nu(z; \bar{n})$

$$f(z; \bar{n}) = \bar{n} \frac{\bar{n}^{\bar{n}z}}{\Gamma(\bar{n}z + 1)} e^{-\bar{n}} \sim \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(z-1)^2}{2/\bar{n}} \right\}.$$

Наблюдаем очевидный результат: с ростом  $\bar{n}$  плотность приближается к нормальной с математическим ожиданием 1 и убывающей дисперсией и в пределе превращается в вырожденное распределение:

$$\lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} f(z; \bar{n}) = \delta(z-1).$$

Однако, как показано в [19], это справедливо лишь при  $\nu = 1$ , то есть в случае истинного пуассоновского распределения. В случае дробного порядка характеристическая (по Лапласу) функция  $\chi(\lambda)$  скейлинговой переменной  $Z$  выражается через функцию Миттаг-Леффлера  $E_\nu$ :

$$\chi(\lambda) = \mathbb{E} e^{-\lambda Z} = E_\nu(\bar{n}\Gamma(\nu+1)(e^{-\lambda/\bar{n}} - 1)).$$

При больших  $\bar{n}$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda Z} \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda z} f_\nu(z) dz \sim E_\nu(-\lambda'),$$

где  $E_\nu$  — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера, а  $\lambda' = \lambda\Gamma(\nu+1)$ .

Сравнение этого выражения с формулой (6.9.8) из [21, с. 187]

$$\begin{aligned} E_\nu(-\lambda') &= \nu^{-1} \int_0^\infty \exp(-\lambda' x) g_+^{(\nu)}(x^{-1/\nu}) x^{-1-1/\nu} dx \times \\ &\times \int_0^\infty e^{-\lambda z} \left\{ \frac{[\Gamma(\nu+1)]^{1/\nu}}{\nu} g_+^{(\nu)} \left( \left( \frac{z}{\Gamma(\nu+1)} \right)^{-1/\nu} \right) z^{-1-1/\nu} \right\} dz \end{aligned}$$

показывает, что при  $\nu \neq 1$  случайная величина  $Z(\nu)$  имеет невырожденное распределение

$$f_\nu(z) = \left\{ \frac{[\Gamma(\nu+1)]^{1/\nu}}{\nu} g_+^{(\nu)} \left( \left( \frac{z}{\Gamma(\nu+1)} \right)^{-1/\nu} \right) z^{-1-1/\nu} \right\}$$

с моментами

$$\langle Z^k \rangle = \frac{[\Gamma(1+\nu)]^k \Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k\nu)}.$$

В этих формулах

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} g_+^{(\nu)}(z) dz = e^{-\lambda^\nu}.$$

Используя разложение этой плотности в степенной ряд, получим

$$f_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(1-(k+1)\nu) [\Gamma(\nu+1)]^{k+1}}. \quad (31)$$

При  $z \rightarrow 0$

$$f_\nu(z) \rightarrow f_\nu(0) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} = \frac{\sin(\nu\pi)}{\nu\pi}.$$

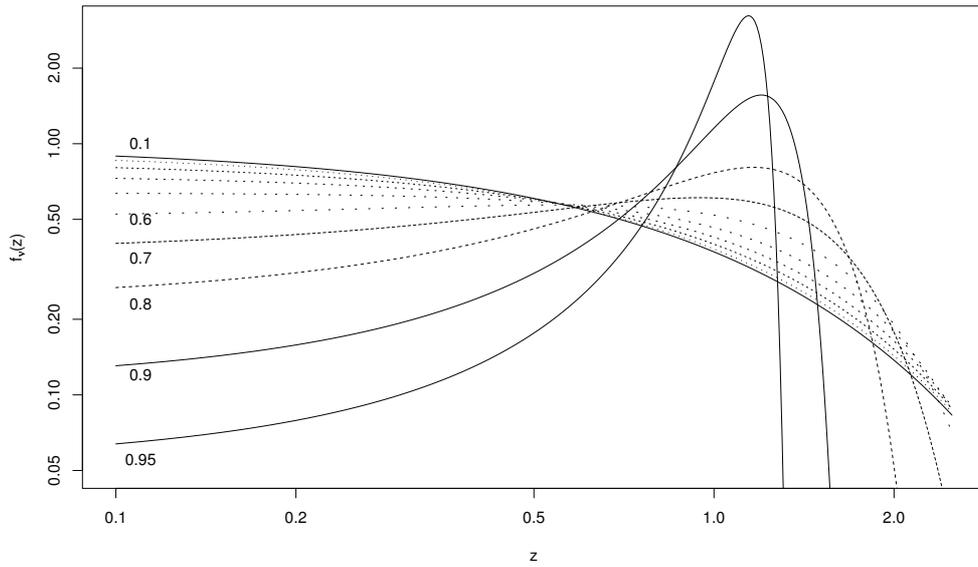


Рис. 5. Предельные дробно-пуассоновские плотности (31).

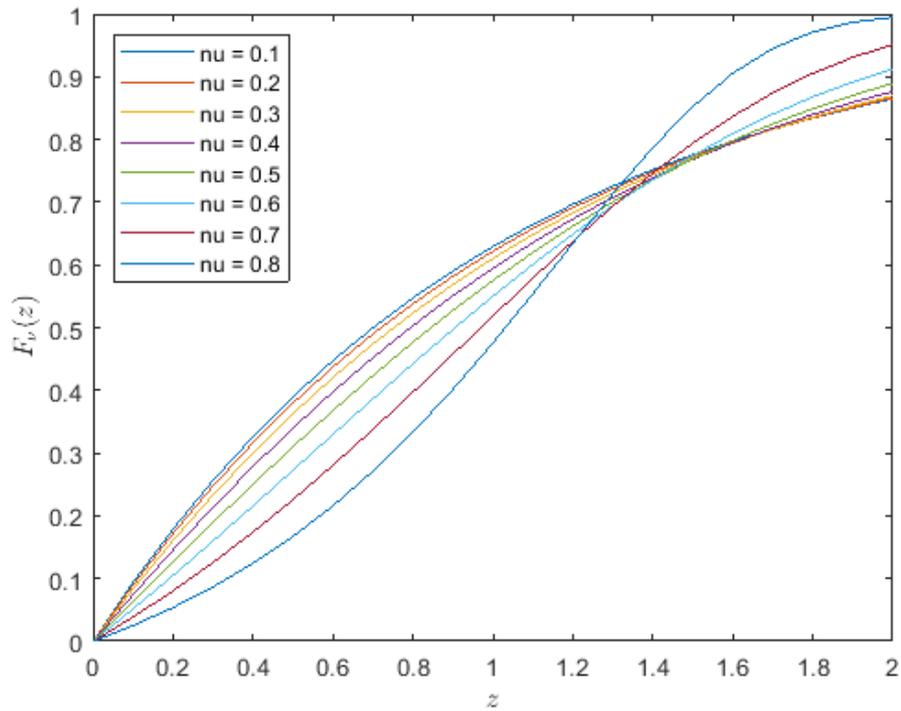


Рис. 6. Предельные функции дробно-пуассоновского распределения  $F_\nu(z)$  (32).

Заметим, что  $\langle Z^0 \rangle = 1$ ,  $\langle Z^1 \rangle = 1$  и  $\langle Z^2 \rangle = 2\nu B(\nu, 1 + \nu)$ , так что относительные флуктуации в предельном распределении

$$\delta_\nu \equiv \sigma_{N(t)} / \langle N \rangle = \sqrt{2\nu B(\nu, 1 + \nu) - 1} = \begin{cases} 1, & \nu = 0, \\ \sqrt{\pi/2} - 1, & \nu = 1/2, \\ 0, & \nu = 1. \end{cases}$$

В частном случае  $\nu = 1/2$ , записывается в виде полунормального распределения  $f_\nu(z)$ :

$$f_{1/2}(z) = \frac{2}{\pi} e^{-z^2/\pi}, \quad z \geq 0.$$

Графики плотностей разных порядков и соответствующих функций распределения вероятностей

$$F_\nu(z) = \int_0^z f_\nu(x) dx \quad (32)$$

изображены на рис. 5 и 6.

В довершение раздела мы приведем теорему о моделировании случайной величины с дробно-устойчивым распределением.

**Теорема 1.** Пусть  $Z(\nu)$ ,  $\nu \in (0, 1]$ , случайная величина, распределенная по дробно-пуассоновскому закону, а  $S_+(\nu)$  – субординатор порядка  $\nu$ . Тогда

$$Z(\nu) \stackrel{d}{=} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{[S_+(\nu)]^\nu}.$$

*Доказательство.* Доказательство несложно: запишем выражение для дополнительной функции распределения

$$\bar{F}_\nu(z) = \int_z^\infty f_\nu(\zeta) d\zeta = \frac{[\Gamma(\nu + 1)]^{1/\nu}}{\nu} \int_z^\infty g_+^{(\nu)} \left( \left( \frac{\zeta}{\Gamma(\nu + 1)} \right)^{-1/\nu} \right) \zeta^{-1-1/\nu} d\zeta,$$

выполним замену переменной

$$t = \left( \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\zeta} \right)^{1/\nu}, \quad dt = [\Gamma(\nu + 1)]^{1/\nu} (-1/\nu) \zeta^{-1-1/\nu} d\zeta,$$

и, сравнив полученную вероятность с формулой

$$\int_0^{[\Gamma(\nu+1)/z]^{1/\nu}} g_+^{(\nu)}(t) dt = \mathbb{P} \left( [S_+(\nu)]^\nu < \frac{\Gamma(\nu + 1)}{z} \right),$$

приходим к утверждению теоремы.  $\square$

Вторая часть обзора будет посвящена мезофракталам — точечным распределениям гибридного типа, в разных масштабах обладающим свойствами как фрактального, так и однородного распределений. Эффективность мезофрактальной модели будет продемонстрирована применением ее к статистическому описанию распределения галактик во Вселенной.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышев Ю. В., Теерикорпи П. Фрактальная структура Вселенной. — Нижний Архыз: САО РАН, 2005.
2. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972.
3. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969.
4. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993.
5. Репин О. Н., Саичев А. И. Дробный закон Пуассона // Изв. вузов. Радиофизика. — 2000. — 43, № 9. — С. 823–826.
6. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
7. Пьетронеро Л. (ред.) Фракталы в физике. — М.: Мир, 1988.
8. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991.
9. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Москва–Ижевск: РХД, 2001.
10. Balescu R. Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics. — New York–London–Sydney–Toronto: Wiley, 1975.

11. *Harris T. E.* The Theory of Branching Processes. — Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1963.
12. *Isichenko M. B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media// *Rev. Mod. Phys.* — 1992. — 64. — P. 961–1043.
13. *Jumarie G.* Fractional master equation: non-standard analysis and Liouville–Riemann derivative// *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2001. — 12. — P. 2577–2587.
14. *Laskin N.* Fractional Poisson processes// *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* — 2003. — 8. — P. 201–213.
15. *Mandelbrot B. B.* *Fractals: Form, Chance and Dimension.* — San Francisco: W. H. Freeman, 1977.
16. *Mandelbrot B. B.* *The Fractal Geometry of Nature.* — New York: W. H. Freeman, 1983.
17. *Stell G.* *Statistical Mechanics Applied to Random-Media Problems*// *AMS Lect. Appl. Math.* — 1991. — 27. — P. 109–137.
18. *Takayasu H.* Stable distribution and Lévy process in fractal turbulence// *Progr. Theor. Phys.* — 1984. — 72. — P. 471–478.
19. *Uchaikin V. V.* *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. 1.* — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
20. *Uchaikin V., Cahoy D., Sibatov R.* Fractional processes: From Poisson to branching one// *Int. J. Bifurcation Chaos.* — 2008. — 18, № 09. — P. 2717–2725.
21. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* *Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications.* — Netherlands, Utrecht: VSP, 1999.
22. *Wang Xiao-Tian, Wen Zhi-Xiong* Poisson fractional processes// *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2003. — 18, № 1. — P. 169–177.
23. *Wang Xiao-Tian, Wen Zhi-Xiong, Zhang Shi-Ying* Poisson fractional processes, II// *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2006. — 28, № 1. — P. 143–147.

Учайкин Владимир Васильевич  
Ульяновский государственный университет  
E-mail: vuchaikin@gmail.com