ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 44–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-44-52

УДК 517.9

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ

© 2022 г. **Е. П. ИВАНОВА**

Аннотация. Рассматриваются эллиптические краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащих несоизмеримые сдвиги аргументов в старших членах. Исследуется разрешимость краевых задач, гладкость решений, спектральные свойства путем сведения исходной задачи к нелокальной.

Ключевые слова: эллиптическое дифференциально-разностное уравнение, несоизмеримые сдвиги аргументов, нелокальная краевая задача.

METHODS FOR STUDYING DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS WITH INCOMMENSURABLE SHIFTS OF ARGUMENTS

© 2022 **E. P. IVANOVA**

Abstract. We consider elliptic boundary-value problems for differential-difference equations containing incommensurable shifts of arguments in leading terms. Using the reduction of the original problem to a certain nonlocal problem, we examine the solvability of boundary-value problems, the smoothness of solutions, and spectral properties.

Keywords and phrases: elliptic differential-difference equation, incommensurable shifts of arguments, nonlocal boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 47G40

1. Введение. Теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сдвигами аргументов в старших членах построена А. Л. Скубачевским в [5,6]. Интерес к этим задачам связан с важными приложениями к теории многослойных пластин и оболочек (см. [5]), нелинейных лазерных систем (см. [7]). В указанных работах были изучены краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами пространственных переменных, содержащихся в разностных операторах. Поскольку даже малые возмущения сдвигов приводят к их несоизмеримости и к изменению свойств решений соответствующих краевых задач, важным является построение теории дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами аргументов. Такие задачи обладают рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость обобщенных решений краевой задачи может нарушаться внутри области почти всюду. Дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами в одномерном случае рассматривались в [1, 3, 6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–01–00288).

А. Л. Скубачевским был предложен метод исследования задач для дифференциально-разностных уравнений с помощью задач с нелокальными краевыми условиями. Для операторов с несоизмеримыми сдвигами этот метод в общем случае неприменим. Однако если орбита границы заданной области под действием сдвигов разностного оператора конечна, исходная краевая задача также может быть сведена к нелокальной. Для одномерного случая такая задача была исследована в [3]. Было построено специальное разбиение исходной области на непересекающиеся подобласти с помощью графа, ассоциированного с множеством сдвигов разностного оператора. Это разбиение описано в [2,4]; оно применяется также для исследования гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами (см. [4]) и получения условий сильной эллиптичности (см. [2]). Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений в случае бесконечной орбиты границы исследовались в [1, 2].

В данной статье исследуется разрешимость и гладкость эллиптических краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргумента в цилиндрических областях методом сведения их к нелокальным задачам.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. Л. Скубачевскому за поддержку работы.

2. Разностные операторы и орбита границы. Рассмотрим разностный оператор

$$R\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n), \quad (Rv)(x) = \sum_{h\in M} a_h v(x+h), \tag{1}$$

где $a_h \in \mathbb{C}$, M — конечное множество векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с несоизмеримыми координатами. Иными словами, в M найдутся сдвиги, из которых нельзя составить нетривиальную линейную комбинацию с целыми коэффициентами, равную нулевому вектору.

Будем рассматривать действия операторов R на функциях $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$v(x) = 0, \quad x \notin Q. \tag{2}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$ или $Q = (0, d) \times G \subset \mathbb{R}^n$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$ и $G = (a, b)$, если $n = 2$.

Для учета однородных краевых условий (2) используем операторы

$$I_Q\colon L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n), \quad P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q);$$

I_Q — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем вне Q, P_Q — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q. Введем также оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q\colon L_2(Q) \to L_2(Q).$$

Введем следующие обозначения:

$$\widehat{M} \coloneqq M \cup (-M), \quad S_0 = \partial Q, \quad S_1 \coloneqq \Bigl(\bigcup_{h\in\widehat{M}} S_0 + h\Bigr) \cap \bar{Q},$$

$$S_2 \coloneqq \Bigl(\bigcup_{h\in\widehat{M}} (S_1 + h)\Bigr) \cap \bar{Q}, \quad \ldots, \quad S_k \coloneqq \Bigl(\bigcup_{h\in\widehat{M}} (S_{k-1} + h)\Bigr) \cap \bar{Q}, \quad \ldots, \quad S = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k.$$

В силу построения $S_{k-1} \subseteq S_k$.

Назовем S орбитой границы ∂Q. Возможны следующие два случая.

Случай 1. Множество S состоит из конечного числа множеств (следов сдвигов границы). Будем говорить, что орбита S конечна.

Случай 2. Множество S состоит из бесконечного числа множеств. Будем говорить, что орбита S бесконечна.

В данной работе будем рассматривать только случай 1.

Рассмотрим открытое множество $U = \bar{Q} \setminus S$; оно состоит из конечного числа непересекающихся связных компонент Q_r $(r = 1, 2, \dots)$ и

$$U = \bigcup_r Q_r, \quad S = \bigcup_r \partial Q_r.$$

Замечание 1. В работе А. Л. Скубачевского [6] для исследования свойств разностных операторов с соизмеримыми сдвигами и гладкости решений соответствующих краевых задач строится разбиение области Q на непересекающиеся подобласти с использованием аддитивной абелевой группы, порожденной множеством сдвигов M. Для множества, содержащего несоизмеримые сдвиги, такое разбиение не существует.

Будем использовать разбиение, построенное без использования группы и описанное в [2].

Определение 1. Будем говорить, что произведено *регулярное разбиение* $\Re_0$ области Q на непересекающиеся подобласти Q_r $(r = 1, 2, \dots)$, если:

(i) $\bigcup_r \bar{Q}_r = \overline{Q}$;

(ii) для любой подобласти Q_{r_1} и любого $h \in \widehat{M} = \{M, -M\}$ либо найдется такая подобласть Q_{r_2}, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R} \setminus Q$. Здесь M — множество векторов из формулы (1).

В силу [2, теорема 2.1] справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Совокупность всех непересекающихся связных компонент множества U является регулярным разбиением $\Re_0$ области Q.*

Разбиению $\Re_0$ поставим в соответствие ориентированный граф. Вершины графа — это подобласти Q_r, дуги графа — это сдвиги $h \in M$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2}, Q_{r_1}, соединяем ориентированной дугой $h = \langle Q_{r_1}, Q_{r_2} \rangle$. На дугах задана числовая функция $\varphi(h) = a_h$, где a_h — коэффициенты разностного оператора из формулы (1). Введем на множестве подобластей (вершин графа) бинарное отношение π следующим образом: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \Re_0$ находятся в отношении π, если существует цепь в графе, соединяющая вершины Q_{r_1} и Q_{r_2}. В цепи движение может осуществляться как по направлению дуги, так и против. Это отношение является отношением эквивалентности и порождает разбиение множества $\Re_0$ на классы эквивалентности. Обозначим подобласти через Q_{sl}, где s — номер класса эквивалентности, l — номер области в этом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс s состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}.

Обозначим через $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$, $l = 1, \dots, N(s)$. Обозначим через

$$P_s \colon L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big)$$

оператор ортогонального проектирования на $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$. В силу [6, лемма 8.5] $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ является инвариантным подпространством оператора R_{ijQ}; при этом

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big).$$

Введем изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s \colon L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1})$$

по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}), \quad x \in Q_{s1},$$

где $l = 1, \ldots, N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}(h_{s1} = 0)$,

$$L_2^N(Q_{s1}) = \prod_{l=1}^{N} L_2(Q_{s1}).$$

Аналогично доказательству леммы 8.6 из [6] можно показать, что оператор

$$R_s \colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1}), \quad R_s = U_s R_Q U_s^{-1},$$

есть оператор умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$, элементы r_{km}^s которой вычисляются по формуле

$$r_{km}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sm} - h_{sk} \in M, \\ 0, & h = h_{sm} - h_{sk} \notin M. \end{cases} \tag{3}$$

Если для построения матрицы R_s использовать ассоциированный с разбиением $\Re_0$ граф, для вершин Q_{sk}, Q_{sm}, связанных дугой $h = \langle Q_{sk}, Q_{sm} \rangle$, положим $r_{km}^s = \varphi(h) = a_h$, в противном случае $r_{km}^s = 0$.

В силу [6, лемма 8.7] спектр $\sigma(R_Q)$ оператора R_Q совпадает с объединением спектров всех матриц

$$\sigma(R_Q) = \bigcup_s \sigma(R_s).$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Оператор R_Q невырожден тогда и только тогда, когда все матрицы R_s невырождены.*

Рассмотрим отдельно случай, когда область Q является цилиндром: $Q = (0, d) \times G \subset \mathbb{R}^n$. При этом сдвиги h разностного оператора R осуществляются только вдоль оси цилиндра

$$Rv(x) = \sum_{h \in M} a_h v(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n), \tag{4}$$

где M — конечное множество несоизмеримых между собой сдвигов $h \in \mathbb{R}$.

Действуя по изложенному выше алгоритму, построим орбиту S^0 левого основания $\Gamma^0 = \{0\} \times \bar{G}$ цилиндра Q:

$$S^0 = \mathrm{orb}(\Gamma^0) = \bigcup_{i=0}^{N} \Gamma_i^0.$$

Упорядочим связные компоненты орбиты $\Gamma_i^0 = \{\tau_i\} \times \bar{G}$ по возрастанию τ_i:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N < d.$$

Построим аналогичную орбиту S^d правого основания $\Gamma^d = \{d\} \times \bar{G}$ цилиндра. Также упорядочим элементы орбиты:

$$S^d = \mathrm{orb}(\Gamma^d) = \bigcup_{i=0}^{N} \Gamma_i^d, \quad \Gamma_i^d = \{d - \tau_i\} \times \bar{G}, \quad i = 0, \ldots, N.$$

Рассмотрим множество

$$\bar{Q} \setminus (S^0 \cup S^d \cup (\partial G \times (0, d)) = \bigcup Q_r.$$

Присвоим первый номер классу подобластей разбиения, левой границей которых являются элементы $\Gamma_i^0 = \{\tau_i\} \times \bar{G}$ орбиты S^0. Оператор

$$R_{Q1} \colon L_2^{N+1}(Q_{11}) \to L_2^{N+1}(Q_{11}), \quad R_{Q1} = U_1 R_Q U_1^{-1},$$

есть оператор умножения на матрицу R_1 порядка $(N+1) \times (N+1)$.

Пример 1. Пусть разностный оператор R имеет вид

$$(Ru)(x_1, x_2) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 + 1 + \tau, x_2) + a_2 u(x_1 - 1 - 2\tau, x_2), \tag{5}$$

где $1/3 < \tau < 1/2$, τ — иррациональное. Рассмотрим оператор

$$R_Q \colon L_2(Q) \to L_2(Q), \quad R_Q = P_Q R I_Q,$$

где $Q = (0, 2) \times (0, 1)$. Орбиты S^0 левой и S^d правой границ цилиндра:

$$S^0 = \Big\{\{0\} \times [0, 1];\ \{\tau\} \times [0, 1];\ \{1 + \tau\} \times [0, 1];\ \{1 + 2\tau\} \times [0, 1]\Big\},$$
$$S^d = \Big\{\{1 - 2\tau\} \times [0, 1];\ \{1 - \tau\} \times [0, 1];\ \{2 - \tau\} \times [0, 1];\ \{2\} \times [0, 1]\Big\}.$$

Разбиение области Q состоит из трех классов подобластей. Первый класс содержит 4 подобласти:

$$Q_{11} = (0, 1 - 2\tau) \times (0, 1), \qquad Q_{12} = (\tau, 1 - \tau) \times (0, 1),$$
$$Q_{13} = (1 + \tau, 2 - \tau) \times (0, 1), \quad Q_{14} = (1 + \tau, 2) \times (0, 1);$$

второй класс состоит из подобластей

$$Q_{21} = (1 - 2\tau, \tau) \times (0, 1), \quad Q_{22} = (2 - \tau, 1 + 2\tau) \times (0, 1).$$

Третий класс состоит из одной области

$$Q_{13} = (1 - \tau, 1 + \tau) \times (0, 1).$$

Для первого класса $s = 1$ подобластей

$$R_1 \colon L_2^4(Q_{11}) \to L_2^4(Q_{11}), \quad R_1 = U_1 R_Q U_1^{-1}, \quad R_Q \colon L_2(Q) \to L_2(Q).$$

Действию оператора R_1 в силу формулы (3) соответствует умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Для второго класса $s = 2$ подобластей

$$R_2 \colon L_2^2(Q_{21}) \to L_2^2(Q_{21}), \quad R_2 = U_2 R_Q U_2^{-1}.$$

Действию этого оператора соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

На третьем классе действию оператора R_Q соответствует умножение на a_0.

3. Действие разностных операторов в пространствах Соболева. Введем в рассмотрение пространство Соболева $H^m(Q)$ комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе с обобщенными производными до порядка m включительно; $H^m(Q)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^m(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_Q D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_i \geqslant 0$,

$$D^\alpha = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(-i \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Обозначим через $\mathring{H}^m(Q)$ замыкание пространства $C_0^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^m(Q)$.

Пусть $Q = (0, d) \times G \in \mathbb{R}^n$ — цилиндр, R — разностный оператор, определенный формулой (4) со сдвигами только вдоль оси цилиндра. Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^N$, $0 = \tau_0 < \tau_2 < \ldots < \tau_N$, — абсциссы компонент орбиты S^0 основания цилиндра под действием разностного оператора R. Введем в рассмотрение пространство $H^1_\gamma(Q)$ функций $u \in H^1(Q)$, для которых

$$u\big|_{x_1=0} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^1 u|_{x_1=\tau_i}, \quad u\big|_{x_1=d} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^2 u|_{x_1=d-\tau_i}. \tag{8}$$

Пусть R_1 — матрица первого класса подобластей разбиения области Q, определенная формулой (3). Матрица R_{11} получена из R_1 вычеркиванием последней строки и столбца. Обозначим через R_1^1 (соответственно, R_1^2) матрицу, полученную из матрицы R_1 вычеркиванием первого (соответственно, последнего) столбца. Обозначим i-ю строку матрицы R_1^1 (соответственно, матрицы R_1^2) через e_i (соответственно, g_i).

Предположим, что $\det R_{11} \neq 0$. Тогда первая строка матрицы R_1^1 есть линейная комбинация остальных ее строк:

$$e_1 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^1 e_{i+1}. \tag{9}$$

Аналогично, последняя строка матрицы R_1^2 есть линейная комбинация предыдущих строк:

$$g_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^2 g_{N+1-i}. \tag{10}$$

Введем обозначения

$$\gamma^1 = (-1, \gamma_1^1, \dots, \gamma_N^1)^t, \quad \gamma^2 = (\gamma_N^2, \dots, \gamma_1^2, -1)^t,$$

$(R_1^1)^t$ — транспонированная матрица для R_1^1. Тогда систему для нахождения γ^1 можно переписать в виде

$$(R_1^1)^t \gamma^1 = 0. \tag{11}$$

Система уравнений относительно γ^2 примет вид

$$(R_1^2)^t \gamma^2 = 0. \tag{12}$$

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству, приведенному для одномерного случая в [3].

Теорема 1. *Пусть R_Q — невырожденный оператор и $\det R_{11} \neq 0$. Тогда существуют такие γ_i^1, γ_i^2, $i = 1, \dots, N$, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(Q)$ на $H^1_\gamma(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно.*

Пример 2. Пусть разностный оператор R имеет вид

$$(Rv)(x) = a_0 v(x_1, x_2) + a_1(v(x_1+1, x_2) + v(x_1-1, x_2)) + a_2(v(x_1+1+\tau, x_2) + v(x_1-1-\tau, x_2)), \tag{13}$$

где $1/4 < \tau < 1/2$, τ — иррациональное число. Рассмотрим оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q,$$

где $Q = (0,2)\times(0,1)$. Абсциссы орбит левого и правого оснований цилиндра равны соответственно

$$S^0 = \{0, \tau, 1, 1+\tau\}, \quad S^d = \{1-\tau, 1, 2-\tau, 2\}.$$

Разбиение области Q состоит из двух классов подобластей. Первый класс содержит 4 подобласти:

$$Q_{11} = (0, 1-\tau) \times (0,1), \quad Q_{12} = (\tau, 1) \times (0,1),$$
$$Q_{13} = (1, 2-\tau) \times (0,1), \quad Q_{14} = (1+\tau, 2) \times (0,1);$$

второй класс состоит из подобластей

$$Q_{21} = (1-\tau, \tau) \times (0,1), \quad Q_{22} = (2-\tau, 1+\tau) \times (0,1).$$

На первом классе подобластей действию оператора R_Q соответствует умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix};$$

ее определитель

$$\det R_1 = (a_0^2 - a_1^2 - a_0a_2)(a_0^2 - a_1^2 + a_0a_2).$$

На втором классе действию оператора R_Q соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad \det R_2 = (a_0^2 - a_1^2).$$

В силу леммы 2 необходимое и достаточное условие невырожденности оператора R_Q имеет вид

$$\begin{gathered} |a_0| \neq |a_1|, \\ (a_0^2 - a_1^2 - a_0a_2)(a_0^2 - a_1^2 + a_0a_2) \neq 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Запишем матрицы $R_1^1 = R_1^2$, R_{11}:

$$R_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}, \quad R_{11} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Условие невырожденности R_{11}:

$$\det R_{11} = a_0(a_0^2 - a_1^2) \neq 0. \tag{15}$$

Пусть выполнены условия (14), (15). Тогда в силу теоремы 1 существуют такие $\gamma_i^1 = \gamma_i^2$, $i = 1, \ldots, 3$, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(Q))$ на $H_\gamma^1(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно, где $H_\gamma^1(Q)$ — подпространство функций $u \in H^1(Q)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0, x_2) = \gamma_1 u(\tau, x_2) + \gamma_2 u(1, x_2) + \gamma_3 u(1 + \tau, x_2), \tag{16}$$

$$u(2, x_2) = \gamma_1 u(2 - \tau, x_2) + \gamma_2 u(1, x_2) + \gamma_3 u(1 - \tau, x_2), \tag{17}$$

где γ_1, γ_2, γ_3 в силу симметричности матрицы R_1 находятся из системы (11).

Решение этой системы существует и единственно:

$$\gamma_1 = \frac{a_1a_2}{a_1^2 - a_0^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \gamma_3 = -\frac{a_0a_2}{a_1^2 - a_0^2}. \tag{18}$$

4. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. Используем результаты теории нелокальных эллиптических задач для исследования свойств эллиптических дифференциально-разностных операторов и гладкости обобщенных решений соответствующих краевых задач.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$AR_Qv = f(x) \quad (x \in Q) \tag{19}$$

с однородными краевыми условиями

$$v|_{\partial Q} = 0. \tag{20}$$

Здесь $Q = (0, d) \times G \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a, b)$, если $n = 2$), $A = A_0 + a_0$ — дифференциальный оператор, где

$$A_0 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{21}$$

$a_{ij} = a_{ji}$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $f_0 \in L_2(Q)$; $R_Q = P_Q R I_Q$; разностный оператор R определен по формуле

$$Rv(x) = \sum_{h \in M} a_h v(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n), \tag{22}$$

M — конечное множество несоизмеримых между собой сдвигов $h \in \mathbb{R}$, $a_h \in \mathbb{C}$. Используем матрицы R_1, R_{11}, определенные в разделе 3.

Пусть $A_R\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ — неограниченный оператор, заданный следующим образом:

$$D(A_R) = \{v \in \mathring{H}^1(Q) \mid R_Q v \in H^2(Q)\}, \quad A_R v = AR_Q v. \tag{23}$$

Задача (19), (20) для целочисленных сдвигов разностного оператора R исследована в [6]. А. Л. Скубачевским предложен метод сведения этой задачи к краевой задаче с нелокальными краевыми условиями. Разбиение, описанное в разделе 3, позволяет обобщить этот метод на случай несоизмеримых сдвигов (если орбита границы конечна).

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений вида (19), (20), вообще говоря, не имеют гладких классических решений, и естественно определить решение в обобщенном смысле (см. [6]).

Определение 2. Функцию $v \in D(A_R)$ назовем обобщенным решением задачи (19), (20), если

$$A_R v = f. \tag{24}$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 3. Функцию $v \in \mathring{H}^1(Q)$ назовем обобщенным решением задачи (19), (20), если для любой функции $w \in \mathring{H}^1(Q)$ выполнено тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} R_Q v_{x_j}, w_{x_i})_{L_2(Q)} + (a_0 v, w)_{L_2(Q)} = (v, f)_{L_2(Q)}, \tag{25}$$

где $(v, w)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Определение 4. Будем называть уравнение (19) и соответствующий оператор AR_Q эллиптическим в $\bar{Q}$, если выполняются следующие условия:

(i) оператор A сильно эллиптичен в $\bar{Q}$, т.е. квадратичная форма

$$\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

положительно определена;

(ii) оператор R_Q регулярен, т.е. R_Q невырожден и $det R_{11} \neq 0$.

Рассмотрим также краевую задачу для уравнения

$$Au = A_0 u + a_0 u(x) = f(x) \quad (x \in Q) \tag{26}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$u\big|_{x_1=0} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^1 u|_{x_1=\tau_i}, \quad u\big|_{x_1=d} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^2 u|_{x_1=d-\tau_i} \quad ub\big|_{[0,d]\times\partial G} = 0. \tag{27}$$

где $\gamma_i^1, \gamma_i^2 \in \mathbb{C}$ — постоянные.

Введем неограниченный оператор $A_\gamma\colon D(A_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(A_\gamma) = \{u \in H^1_\gamma(Q) : A_\gamma u \in L_2(Q)\}$, действующий в пространстве обобщенных функций $D'(Q)$ по формуле $A_\gamma u = Au$, где $H^1_\gamma(Q)$ — подпространство функций в $H^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям (27).

Определение 5. Функцию u назовем обобщенным решением нелокальной эллиптической задачи (26), (27), если $u \in D(A_\gamma)$ и

$$A_\gamma u = f. \tag{28}$$

Сведение задачи (19), (20) к нелокальной эллиптической задаче (26), (27) позволяет обобщить утверждение теорему 2 из [4] о гладкости обобщенных решений краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (19) *является эллиптическим в* $\bar{Q}$ *и пусть* v — *обобщенное решение краевой задачи* (19), (20). *Тогда* $R_Q v \in H^2(Q)$ *и* $v \in H^2(Q_{sl})$ *для всех подобластей* Q_{sl} *регулярного разбиения* $\Re_0$ *области* Q.

Доказательство. В силу условия (ii) и теоремы 2 существуют такие числа $\gamma_i^1, \gamma_i^2 \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, N$), что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(Q)$ на $H^1_\gamma(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно. Таким образом, функция $u = R_Q v$ является обобщенным решением задачи (26), (27). Поэтому в силу [6, лемма 7.1] имеем $R_Q v \in H^2(Q)$. Отсюда и из [6, лемма 2.15] следует, что $v \in H^2(Q_{sl})$ для всех подобластей Q_{sl} регулярного разбиения. □

Теорема 3. *Пусть уравнение* (19) *является эллиптическим. Тогда неограниченный оператор* $A_R \colon D(A_R) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind} A_R = 0$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что уравнение (24) эквивалентно уравнению (28). В силу [6, теорема 1.2] оператор A_γ фредгольмов и $\operatorname{ind} A_\gamma = 0$. Следовательно, оператор A_R фредгольмов и $\operatorname{ind} A_R = 0$. □

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству [6, теорема 7.4].

Теорема 4. *Пусть уравнение* (19) *является эллиптическим. Если кроме того* $a_h = \bar{a}_{-h}$, *то оператор* $A_R \colon D(A_R) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *самосопряжен, а его спектр состоит из вещественных изолированных собственных значений конечной кратности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Е. П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента// Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — *59.* — С. 74–96.
2. *Иванова Е. П.* О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — *62.* — С. 85–99.
3. *Иванова Е. П.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, сводящиеся к нелокальным задачам// Совр. мат. Фундам. напр. — 2019. — *65*, № 4. — С. 613—622.
4. *Иванова Е. П.* О гладких решениях дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 1. — С. 145–148.
5. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5 (431). — С. 3–112.
6. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
7. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 1998. — *32*, № 2. — P. 261–278.

Иванова Елена Павловна
Московский авиационный институт (научно-исследовательский университет);
Российский университет дружбы народов, Москва
E-mail: `elpaliv@yandex.ru`