ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 52–57
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-52-57

УДК 512.6

УДВОЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ АЛГЕБР

© 2022 г. **В. М. БУРЛАКОВ, М. П. БУРЛАКОВ**

Аннотация. Построены алгебры, обобщающие кольцо комплексных кватернионов и алгебры гиперкомплексных чисел Клиффорда. Эти алгебры получаются из алгебр циклических чисел модифицированной процедурой удвоения. Доказаны их основные свойства, аналогичные свойствам квадратичных гиперкомплексных чисел.

Ключевые слова: линейные алгебры, кватернионы, гиперкомплексные числа, циклические алгебры, процедура удвоения, композиционные формы.

DOUBLING OF CYCLIC ALGEBRAS

© 2022 **V. M. BURLAKOV, M. P. BURLAKOV**

Abstract. In this paper, we construct algebras generalizing the ring of complex quaternions and algebras of hypercomplex Clifford numbers. These algebras are obtained from the algebras of cyclic numbers by a modified doubling procedure. Also, we prove basic properties of these algebras, which are similar to the properties of quadratic hypercomplex numbers.

Keywords and phrases: linear algebras, quaternions, hypercomplex numbers, cyclic algebras, doubling procedure, compositional forms.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 16S38

Одним из самых замечательных математических открытий XIX в., как нам об этом убедительно рассказал академик В. И. Арнольд, были кватернионы Гамильтона, которые нашли применение во многих областях математики и её приложений в теоретической физике (см. [1]). Над полем комплексных чисел алгебра кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ получается процедурой удвоения Грейвса—Кэли, применённой к алгебре двойных комплексных чисел $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$. Пусть $\boldsymbol{e}_1$ — образующий элемент алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$, т.е. любое двойное комплексное число $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$ записывается в виде $\boldsymbol{z} = z_0 + z_1\boldsymbol{e}_1$, где $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Добавим к двойным комплексным числам новый элемент $\boldsymbol{e}_2 \notin \mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$, такой, что $\boldsymbol{e}_2^2 = 1$, и составим линейные комбинации

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = (z_{00} + z_{01}\boldsymbol{e}_1) + (z_{10} + z_{11}\boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Множество таких линейных комбинаций образуют алгебру, если для любого $\boldsymbol{z} = z_0 + z_1\boldsymbol{e}_1$ положить $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{e}_2$, где $\overline{\boldsymbol{z}} = z_0 - z_1\boldsymbol{e}_1$. Тогда

$$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{a} \equiv (\boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{e}_2) \cdot (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{a}}_1) + (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{a}}_0) \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Полученная таким способом алгебра будет алгеброй комплексных кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ (сам Гамильтон комплексные кватернионы называл бикватернионами, а физики эту алгебру стали называть алгеброй Паули).

В теории (комплексных) кватернионов ключевую родь играет определитель системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{z}_0 + \overline{\boldsymbol{a}}_1 \cdot \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{b}_0, \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{z}_0 + \overline{\boldsymbol{a}}_0 \cdot \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{b}_0, \end{cases}$$

эквивалентной линейному алгебраическому уравнению $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$; будем называть его *детерминантом* элемента $\boldsymbol{a} \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ и обозначать $\Delta(\boldsymbol{a})$.

Детерминант комплексных кватернионов обладает двумя основными свойствами: во-первых, $\Delta(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{C}$, хотя элементы этого определителя являются двойными комплексными числами; во-вторых, детерминант обладает мультипликативным свойством. Действительно, во-первых,

$$\Delta(\boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \overline{\boldsymbol{a}}_1 \\ \boldsymbol{a}_1 & \overline{\boldsymbol{a}}_0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_0 \cdot \overline{\boldsymbol{a}}_0 - \boldsymbol{a}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{a}}_1 = a_{00}^2 - a_{01}^2 - a_{10}^2 + a_{11}^2 \in \mathbb{C},$$

а во-вторых,

$$\Delta(\boldsymbol{a})\Delta(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \overline{\boldsymbol{a}}_1 \\ \boldsymbol{a}_1 & \overline{\boldsymbol{a}}_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_0 & \overline{\boldsymbol{b}}_1 \\ \boldsymbol{b}_1 & \overline{\boldsymbol{b}}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_0 + \overline{\boldsymbol{a}}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 \cdot \overline{\boldsymbol{b}}_1 + \overline{\boldsymbol{a}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{b}}_0 \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_0 + \overline{\boldsymbol{a}}_0 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{b}}_1 + \overline{\boldsymbol{a}}_0 \cdot \overline{\boldsymbol{b}}_0 \end{vmatrix} = \Delta(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}).$$

Таким образом, в алгебре (комплексных) кватернионов существует квадратичная форма, обладающая мультипликативным свойством. Именно наличием в алгебре (комплексных) кватернионов мультипликативной квадратичной формы обусловлены её разнообразные приложения, от евклидовой геометрии, где вращения в пространстве можно представить линейной кватернионной функцией, до квантовой теории поля при выводе уравнений Дирака для электронов и позитронов факторизацией волнового уравнения Клейна—Гордона.

Алгебры, у которых существует мультипликативная квадратичная форма, называются *композиционными* (см. [4]). Как показал Гурвиц, над любым полем существует всего четыре композиционные алгебры: само поле, а также алгебры двойных чисел, кватернионов и октав над этим полем. Если же не ограничиваться только квадратичными формами, то естественно поставить вопрос: существуют ли алгебры, у которых имеются мультипликативные формы степени выше 2?

Поиск алгебр с квадратичной мультипликативной формой, не являющейся квадратичной, приводит к такому обобщению процедуры удвоения, при котором алгебра двойных комплексных чисел $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$ *заменяется циклической алгеброй произвольного порядка* $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$.

Чтобы применить процедуру удвоения к произвольной циклической алгебре, нужно прежде всего найти в $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ автоморфизм, заменяющий автоморфизм сопряжения двойных комплексных чисел. Таким автоморфизмом будет резольвентный оператор $\hat{\alpha}_m \colon \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m) \to \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ [2], ставящий произвольному циклическому числу

$$\boldsymbol{z} = z_0 + z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_1^2 + \ldots + z_{m-1}\boldsymbol{e}_1^{m-1} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m),$$

где $\boldsymbol{e}_1$ — образующий элемент алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, циклическое число

$$\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{z}) = z_0 + \alpha_m z_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m^2 z_2\boldsymbol{e}_1^2 + \ldots + \alpha_m^{m-1} z_{m-1}\boldsymbol{e}_1^{m-1} = \boldsymbol{z}(\alpha_m),$$

которое будем называть *резольвентой*, полагая

$$\alpha_m = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Нетрудно видеть, что резольвентный оператор является автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, т.е. для любых $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ справедливы тождества

$$\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \hat{\alpha}_m(\boldsymbol{x}) + \hat{\alpha}_m(\boldsymbol{y}), \quad \hat{\alpha}_m(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \hat{\alpha}_m(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\alpha}_m(\boldsymbol{y}),$$

и, кроме того, $\hat{\alpha}_m^m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, и, значит, резольвентный оператор обратим. Заметим ещё, что если $\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$, то $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C} \subset \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$.

В частном случае, когда $m = 2$, резольвентный оператор совпадает с оператором сопряжения для двойных комплексных чисел. Поэтому естественно использовать резольвентный оператор для удвоения циклических чисел произвольного порядка.

Добавим к элементам алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ с образующим элементом $\boldsymbol{e}_1$ новый элемент $\boldsymbol{e}_2 \notin \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, такой, что $\boldsymbol{e}_2^m = 1$, и составим формальные линейные комбинации следующего вида:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2^2 + \ldots \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (z_{k0} + z_{k1}\boldsymbol{e}_1 + z_{k2}\boldsymbol{e}_1^2 + \ldots + z_{km-1}\boldsymbol{e}_1^{m-1}) \cdot \boldsymbol{e}_2^k.$$

Множество $\mathbf{B}_2^m$ таких линейных комбинаций образует алгебру, если для любого

$$\boldsymbol{z} = z_0 + z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_1^2 + \ldots + z_{m-1}\boldsymbol{e}_1^{m-1} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$$

задать следующие структурные тождества:

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\alpha_m) \cdot \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{z}(\alpha_m^{m-1}).$$

Тогда для любых $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \in \mathbf{B}_2^m$ имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2^2 + \ldots \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1}) \cdot (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2^2 + \ldots \boldsymbol{a}_{m-1} \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1}) = \\ = (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{a}_{m-1}(\alpha_m) + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{a}_{m-2}(\alpha_m^2) + \ldots + \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{a}_1(\alpha_m^{m-1})) + \\ + (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{a}_0(\alpha_m) + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{a}_{m-1}(\alpha_m^2) + \ldots + \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{a}_2(\alpha_m^{m-1})) \cdot \boldsymbol{e}_2 + \\ + (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1(\alpha_m) + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{a}_0(\alpha_m^2) + \ldots + \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{a}_3(\alpha_m^{m-1})) \cdot \boldsymbol{e}_2^2 + \ldots + \\ + (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_{m-1} + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{a}_{m-2}(\alpha_m) + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{a}_{m-3}(\alpha_m^2) + \ldots + \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{a}_0(\alpha_m^{m-1})) \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1}.\end{aligned}$$

Определённая так алгебра называется *алгеброй бионов m-го порядка.*

Введём теперь в рассмотрение *детерминант элемента* $\boldsymbol{a} \in \mathbf{B}_2^m$:

$$\Delta(\boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_{m-1}(\alpha_m) & \boldsymbol{a}_{m-2}(\alpha_m^2) & \ldots & \boldsymbol{a}_1(\alpha_m^{m-1}) \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0(\alpha_m) & \boldsymbol{a}_{m-1}(\alpha_m^2) & \ldots & \boldsymbol{a}_2(\alpha_m^{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m-1} & \boldsymbol{a}_{m-2}(\alpha_m) & \boldsymbol{a}_{m-3}(\alpha_m^2) & \ldots & \boldsymbol{a}_0(\alpha_m^{m-1}). \end{vmatrix}$$

Покажем, что для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{B}_2^m$, во-первых, $\Delta(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{C}$, хотя элементы этого определителя являются циклическими комплексными числами; во-вторых, детерминант обладает мультипликативным свойством.

Для доказательства первого утверждения заметим, что $\hat{\alpha}_m(\Delta(\boldsymbol{a})) = \Delta(\boldsymbol{a})$. Это тождество доказывается перестановкой строк и столбцов у $\hat{\alpha}_m(\Delta(\boldsymbol{a}))$. Например,

$$\hat{\alpha}_m(\Delta(\boldsymbol{a})) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) & \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) & \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) & \boldsymbol{a}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \Delta(\boldsymbol{a});$$

это и означает, что $\Delta(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{C}$. Доказательство второго утверждения получается непосредственным перемножением определителей. Например,

$$\Delta(\boldsymbol{a})\Delta(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_0 & \boldsymbol{b}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{b}_1(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{b}_2(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{b}_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3) \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3) \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3^2) \end{matrix} \right| = \Delta(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}).$$

Таким образом, в алгебрах $\mathbf{B}_2^m$ существует форма степени m, обладающая мультипликативным свойством. Наличие в алгебрах бионов мультипликативной формы открывает возможности разнообразных приложений этих алгебр, подобных тем, которые присущи алгебре комплексных кватернионов. Например, мы получаем серию геометрических структур, в начале которой находится комплексное пространство с евклидовой структурой, реализованное на алгебре комплексных кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. К другим приложениям относится описание симметрий в калибровочных полях, факторизация дифференциальных уравнений в частных производных любого порядка, отыскание топологических инвариантов и т. д.

Если к алгебре комплексных кватернионов применить ещё раз процедуру удвоения, то получится алгебра комплексных октав. Аналогично процедуру удвоения можно применить и к алгебрам бионов, в результате чего мы получим серию неассоциативных алгебр, первой из которых будет алгебра октав, получаемая удвоением алгебры $\mathbf{B}_2^2 = \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Алгебра октав обобщает алгебру кватернионов в том смысле, что алгебра октав содержит алгебру кватернионов как свою подалгебру. Другое обобщение алгебры кватернионов доставляют гиперкомплексные числа Клиффорда, или альтернионы. Альтернионы получаются, если к образующим векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ добавлять новые базисные элементы, подчинённые тем же коммутационным тождествам, что и $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Другими словами, алгебра альтернионов $\mathbf{A}_n(\mathbb{C})$ строится над линейным (комплексным) пространством $\mathbf{E}_n$, которое называется *подстилающим пространством* алгебры $\mathbf{A}_n(\mathbb{C})$. При этом в $\mathbf{E}_n$ существует базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, векторы которого удовлетворяют структурным уравнениям

$$\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_h = -\boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{e}_k^2 = \boldsymbol{e}_0 = 1,$$

так что базис линейного пространства алгебры $\mathbf{A}_n(\mathbb{C})$ образуют мономы $\boldsymbol{e}_{k_1} \cdot \boldsymbol{e}_{k_2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{e}_{k_r}$, где $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqslant n$. Таким образом, $\dim \mathbf{A}_n(\mathbb{C}) = 2^{\dim \mathbf{E}_n}$. В силу структурных уравнений для векторов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbf{E}_n \subset \mathbf{A}_n(\mathbb{C})$ справедливо следующее *фундаментальное тождество*:

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2.$$

Можно также показать, что алгебры альтернионов получаются тензорным произведением алгебр комплексных кватернионов и двойных комплексных чисел (см. [5]), а именно, имеет место изоморфизм

$$\mathbf{A}_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{H}(\mathbb{C}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}(\mathbb{C})}_{k} \otimes \mathbb{C}(\mathbb{Z}_2), & \text{если } n = 2k+1 \\ \underbrace{\mathbb{H}(\mathbb{C}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}(\mathbb{C})}_{k}, & \text{если } n = 2k \end{cases}.$$

Алгебры бионов получают аналогичное обобщение, если для векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ некоторого базиса комплексного линейного пространства $\mathbf{E}_n$ задать следующие *структурные тождества*: $\boldsymbol{e}_1^m = \boldsymbol{e}_2^m = \ldots = \boldsymbol{e}_n = 1$ и

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_h = \alpha_m \boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_k, & \text{если } k > h, \\ \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_h = \alpha_m^{m-1} \boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_k, & \text{если } k < h, \end{cases}$$

Полученные таким образом алгебры называются *элементальными алгебрами* и обозначаются $\mathbf{B}_n^m$ (см. [2]). При этом $\mathbf{B}_n^2 = \mathbf{A}_n(\mathbb{C})$, поскольку $\alpha_2 = \alpha_2^{2-1} = -1$.

Алгебры $\mathbf{B}_n^m$ во многом аналогичны алгебрам альтернионов, как по своим свойствам, так и по приложениям.

Прежде всего, заметим, что базис линейного пространства алгебры $\mathbf{B}_n^m$ образуют мономы $\boldsymbol{e}_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \boldsymbol{e}_1^{k_1} \cdot \boldsymbol{e}_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{e}_n^{k_n}$, где $0 \leqslant k_r < m$, и, следовательно, $\dim \mathbf{B}_n^m = m^{\dim \mathbf{E}_n}$. В случае альтернионов показатели степени в базисных мономах могут быть равными либо нулю, либо единице, и потому базис в $\mathbf{A}_n$ образуют мономы $\boldsymbol{e}_{k_1 k_2 \ldots k_r} = \boldsymbol{e}_{k_1} \cdot \boldsymbol{e}_{k_2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{e}_{k_r}$, где $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Как и в случае алгебры альтернионов над трёхмерным подстилающим пространством, алгебры $\mathbf{B}_3^m$ имеют нетривиальный центр, порождаемый элементом $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1} \cdot \boldsymbol{e}_3$. Это приводит к тому, что алгебры $\mathbf{B}_n^m$ представляют собой тензорные произведения алгебр $\mathbf{B}_2^m$ и $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, так что

$$\mathbf{B}_n^m = \begin{cases} \underbrace{\mathbf{B}_2^m \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}_2^m}_{k} \otimes \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m), & \text{если } n = 2k+1, \\ \underbrace{\mathbf{B}_2^m \otimes \ldots \otimes \mathbf{B}_2^m}_{k}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Покажем теперь, что в силу структурных уравнений алгебры $\mathbf{B}_n^m$ для произвольных векторов $\boldsymbol{z} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbf{E}_n \subset \mathbf{B}_n^m$ справедливо следующее *фундаментальное тождество*:

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n)^m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m.$$

Возьмём сначала алгебру $\mathbf{B}_2^m$. Для любых векторов подстилающего пространства этой алгебры $\boldsymbol{x} = x_2\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{y} = y_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$ справедливо перестановочное тождество

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) = (y_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m y_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2),$$

что проверяется перемножением. Нетрудно показать, что

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m.$$

Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-2} \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = \\ &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-2} \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2) = \\ &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-3} \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2) = \\ &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-3} \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m^2 x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^2 = \ldots = \\ &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m^{m-1} x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-1} = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m,\end{aligned}$$

так как $\overline{\alpha}_m^{m-1} = \alpha_m$.

Теперь раскроем скобки в выражениях $(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m$ и $(x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m$:

$$\begin{aligned}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m = x_1^m + P_m^1(\alpha_m)x_1^{m-1}x_2\boldsymbol{e}_1^{m-1}\boldsymbol{e}_2 + P_m^2(\alpha_m)x_1^{m-2}x_2^2\boldsymbol{e}_1^{m-2}\boldsymbol{e}_2^2 + \ldots + \\ + P_m^h(\alpha_m)x_1^{m-h}x_2^h\boldsymbol{e}_1^{m-h}\boldsymbol{e}_2^h + \ldots + x_2^m,\end{aligned}$$

где $P_m^h(\alpha_m)$ — некоторые многочлены от α_m; они получаются в результате приведения подобных с учётом структурных тождеств. Кроме того,

$$\begin{aligned}(x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m = x_1^m + \alpha_m P_m^1(\alpha_m)x_1^{m-1}x_2\boldsymbol{e}_1^{m-1}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_m^2 P_m^2(\alpha_m)x_1^{m-2}x_2^2\boldsymbol{e}_1^{m-2}\boldsymbol{e}_2^2 + \ldots + \\ + \alpha_m^h P_m^h(\alpha_m)x_1^{m-h}x_2^h\boldsymbol{e}_1^{m-h}\boldsymbol{e}_2^h + \ldots + x_2^m.\end{aligned}$$

Но

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m,$$

и мы получаем следующие тождества:

$$P_m^h(\alpha_m) = \alpha_m^h P_m^h(\alpha_m) \quad \iff \quad (1 - \alpha_m^h)P_m^h(\alpha_m) = 0,$$

так как $\alpha_m^h \neq 1$. Таким образом,

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m = x_1^m + x_2^n.$$

Допустим теперь, что это тождество выполняется для $n = k$, и покажем, что оно справедливо и для $n = k + 1$. Введём обозначение $\boldsymbol{e} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_k\boldsymbol{e}_k$ и заметим, что

$$\boldsymbol{e}_{k+1} \cdot \boldsymbol{e} = \alpha_m \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}_{k+1}, \quad \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}_{k+1} = \alpha_m^{m-1}\boldsymbol{e}_{k+1} \cdot \boldsymbol{e}.$$

Поэтому

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_k\boldsymbol{e}^k + x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1})^m = (\boldsymbol{e} + x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1})^m = \boldsymbol{e}^m + x_{k+1}^m = \; = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m + x_{k+1}^m,$$

и фундаментальное тождество доказано по индукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2014.
2. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф Пресс, 2006.
3. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Ким, 2020.
4. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
5. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1955.

Бурлаков Валерий Михайлович
Пензенский государственный университет
E-mail: don.burlakoff@mail.ru

Бурлаков Михаил Петрович
Московский педагогический государственный университет
E-mail: burlakovmihail@mail.ru