



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 66–73
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-66-73

УДК 517.951, 517.955

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

© 2022 г. Д. В. ТУРТИН, М. А. СТЕПОВИЧ,
В. В. КАЛМАНОВИЧ, Е. В. СЕРЕГИНА

Аннотация. Рассмотрена возможность использования метода интегральных представлений (метода Ханкеля) для решения нестационарной задачи теплопереноса в полупроводниковой мишени. Изучены некоторые особенности использования такого подхода для решения задач теплопереноса в однородной и многослойной средах. Рассмотрение проведено на примере двумерной диффузии неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом. Показано, что для решения ряда практических задач для многослойных мишеней с отличающимися параметрами слоёв может быть использован подход, разработанный ранее для задач теплопереноса в однородных полупроводниковых мишенях.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное уравнение теплопереноса, частная производная, задача Коши, электронный зонд, полупроводник, преобразование Ханкеля.

ON THE SOLUTION OF A NONSTATIONARY PROBLEM OF HEAT AND MASS TRANSFER IN A MULTILAYER MEDIUM BY THE METHOD OF INTEGRAL REPRESENTATIONS

© 2022 D. V. TURTYN, M. A. STEPovich,
V. V. KALMANOVICH, E. V. SEREGINA

ABSTRACT. In this paper, we discuss the possibility of using the method of integral representations (the Hankel method) for solving the nonstationary problem of heat and mass transfer in a semiconductor target. Some features of this approach to problems of heat and mass transfer in homogeneous and multilayer media are studied. We consider the example of two-dimensional diffusion of minority charge carriers generated by an electron probe. We show that a number of practical problems for multilayer targets with different layer parameters can be solved by the approach developed earlier for problems of heat and mass transfer in homogeneous semiconductor targets.

Keywords and phrases: mathematical model, differential equation of heat and mass transfer, partial derivative, Cauchy problem, electron probe, semiconductor, Hankel transform.

AMS Subject Classification: 35A22, 34N05, 35G16, 33C10

1. Введение. Ранее описано использование метода Фурье в сочетании с матричным методом для моделирования одномерного нестационарного процесса остывания в многослойной планарной среде (см. [7]), стационарного процесса одномерной диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных в многослойной планарной полупроводниковой структуре

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (проекты № 18-41-400001, № 19-03-00271).

с произвольным числом слоёв (см. [8, 18, 24]), а также рассмотрены некоторые возможности математического моделирования стационарного процесса теплопереноса, обусловленного объёмным распределением источников в однородных проводящих материалах (см. [1, 2, 31–33]). Для одномерной математической модели диффузии ННЗ проведено исследование корректности, доказана непрерывная зависимость решения от входных данных, получены соотношения, позволяющие оценить влияние погрешностей в исходных данных на распределение диффундирующей примеси (см. [21, 29, 35]). В то же время при решении некоторых нестационарных задач теплопереноса может оказаться весьма целесообразным использование метода интегральных представлений (см. [4, 10, 11, 16, 20]). Отметим, что ранее для решения задач, связанных с взаимодействием остро сфокусированных пучков электронов с конденсированным веществом, подобный подход не рассматривался. Изучение возможности метода интегральных представлений, использующего преобразование Ханкеля для решения задач теплопереноса, и является предметом рассмотрения в настоящей работе.

2. Постановка задачи. Выбор преобразования Ханкеля обусловлен следующим: при использовании в качестве источника неравновесных ННЗ остро сфокусированного пучка электронов, что обычно и реализуется в электронно-зондовых технологиях, задача математического моделирования диффузии ННЗ в полупроводниковой мишени имеет осевую симметрию. В этом случае решение операторного уравнения можно разложить по одной из функций Бесселя и для решения задачи использовать преобразование Ханкеля. Применив данный метод к решению задачи диффузии ННЗ, получим решение рассматриваемой задачи в виде, удобном для дальнейшего исследования. Отметим, что традиционные подходы через преобразование Лапласа или применение метода Фурье дают более сложные зависимости от энергии электронов зонда и параметров полупроводниковой мишени для решения изучаемой задачи процесса диффузии ННЗ. Этим и объясняется изучение возможностей использования преобразования Ханкеля при математическом моделировании диффузии, обусловленной остро сфокусированным электронным зондом в полупроводниковых мишенях. В настоящей работе получено решение такой задачи методом интегральных представлений с использованием преобразования Ханкеля (см. [4, 10, 11, 16, 20]). Показано, что метод интегральных преобразований для данной задачи позволяет получить решение, которое может быть использовано для дальнейшего изучения рассматриваемой математической модели.

3. Математическая модель изучаемого процесса. В общем случае при использовании остро сфокусированного электронного зонда реализуется трёхмерная диффузия неравновесных ННЗ (см. [14, 23, 26, 36]). Однако при использовании электронов низких энергий (примерно до 8 кэВ) основная часть энергии рассеивается практически в поверхностном слое мишени и поэтому в этом случае может быть использована двумерная модель (см. [15, 28, 29, 35]). В этом случае математическая модель нестационарной диффузии ННЗ в рассматриваемой задаче (при выключении электронного зонда; см. [15, 28, 29, 35]) описывается при помощи уравнения в частных производных

$$\frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t} = D \Delta c(x, y, t) - \frac{c(x, y, t)}{\tau} \quad (1)$$

с начальным условием

$$c(x, y, 0) = n(x, y). \quad (2)$$

Оси прямоугольной декартовой системы координат x и y лежат на плоской поверхности полубесконечного полупроводника, $x, y \in (-\infty, \infty)$; $c(x, y, t)$ — концентрация ННЗ в точке с координатами (x, y) в момент времени t , а постоянные τ и D — время жизни и коэффициент диффузии ННЗ; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа. Функция $n(x, y)$ удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию ННЗ в состоянии квазиравновесия (при включённом электронном зонде, когда число ННЗ, генерируемых и рекомбинирующих в объёме полупроводника в единицу времени, постоянно и равно друг другу; см. [14, 15, 28]):

$$\Delta n(x, y) - \frac{n(x, y)}{\lambda^2} = -\rho(x, y). \quad (3)$$

Граничные условия для уравнения (3) имеют вид:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} n(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} n(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} n(x, y) = 0. \quad (4)$$

Здесь постоянная $\lambda = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина ННЗ. Отметим, что при моделировании процесса диффузии в правой части уравнения (3) должна находиться функция $\rho(x, y)$, описывающая концентрацию ННЗ, генерированных в полупроводнике в единицу времени, что достигается делением энергии, выделяемой в единице объёма полупроводника в единицу времени, на энергию образования электронно-дырочной пары (см. [3]).

4. Решение задачи с использованием преобразования Ханкеля. Сделав в задаче (1)–(2) замену

$$c(x, y, t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)v(x, y, t),$$

получим

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} = D\Delta v(x, y, t), \quad (5)$$

$$v(x, y, 0) = n(x, y). \quad (6)$$

К уравнению (5) применим преобразование Ханкеля. Введем обозначения

$$\hat{V}(\eta, t) = \int_0^{+\infty} rV(r, t)J_0(\eta r)dr, \quad V(r, t) = \int_0^{+\infty} \eta \hat{V}(\eta, t)J_0(\eta r)d\eta;$$

здесь $J_0(\eta r)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

В левой части уравнения (5) выражение $V_t(r, t)$ заменяется на $\hat{V}_t(\eta, t)$, а для правой части этого уравнения, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) r J_0(\eta r) dr &= \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) J_0(\eta r) dr = \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} J_0(\eta r) \right) \Big|_{r=0}^{r=\infty} - \int_0^{+\infty} \eta r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} dr = \\ &= -\eta \int_0^{+\infty} r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} dr = -\eta \left(V(r, t) r \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}^{r=\infty} + \eta \int_0^{+\infty} V \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) dr = \\ &= \eta \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} r \eta \right) V dr = \int_0^{+\infty} \left(\eta^2 r \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \eta \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) V dr. \end{aligned}$$

Для функции Бесселя $J_0(x)$ по определению имеем равенство

$$\eta^2 \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} + \eta^2 J_0(\eta r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^2 r \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \eta \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} = -\eta^2 J_0(\eta r).$$

Значит,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) r J_0(\eta r) dr = -\eta^2 \int_0^{+\infty} r V J_0(\eta r) dr = -\eta^2 \hat{V}(\eta, t).$$

Поэтому уравнение (5) переходит в уравнение вида

$$\frac{\partial \hat{V}(\eta, t)}{\partial t} + D\eta^2 \hat{V}(\eta, t) = 0. \quad (7)$$

Решив уравнение (7), получим $\hat{V}(\eta, t) = A(\eta) \exp(-D\eta^2)$, откуда

$$V(r, t) = \int_0^{+\infty} B(\eta) J_0(\eta r) \exp(-D\eta^2) d\eta. \quad (8)$$

Здесь $B(\eta) = \eta A(\eta)$ — произвольная функция. Учитывая начальное условие (6), из (8) имеем

$$\int_0^{+\infty} B(\eta) J_0(\eta r) d\eta = n(r). \quad (9)$$

Применив к (9) обратное преобразование Ханкеля, получим

$$B(\eta) = \int_0^{+\infty} n(\xi) J_0(\eta \xi) \xi d\xi. \quad (10)$$

Подставив (10) в (8) и учитывая, что $B(\eta) = \eta A(\eta)$, находим

$$V(r, t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} n(\xi) J_0(\xi \eta) J_0(\eta r) \exp(-D\eta^2 t) \eta \xi d\eta d\xi. \quad (11)$$

С учётом соотношения

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\rho^2 x^2) J_p(\alpha x) J_p(\alpha x) x dx = \frac{1}{2\rho^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\rho^2}\right) I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2\rho^2}\right),$$

где $I_p(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка p (см. [4, 10, 11, 16, 20]), выражение (11) можно переписать в виде

$$V(r, t) = \frac{1}{2Dt} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right) n(\xi) \xi d\xi.$$

Таким образом, решение $c(r, t)$ задачи Коши (1)–(2) имеет вид

$$c(r, t) = \frac{\exp(-\frac{t}{\tau})}{2Dt} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right) n(\xi) \xi d\xi. \quad (12)$$

Отметим, что выражение (12) совпадает с результатами расчёта распределений ННЗ, генерированных остро сфокусированным электронным зондом после диффузии ННЗ в однородном полубесконечном полупроводниковом материале, и полученными для двухмерной модели (см. [34]), а также с результатами сравнения расчётов с использованием формулы (12) с экспериментальными данными.

В цилиндрической системе координат

$$n(r) = A_1 \exp(\sqrt{\sigma} r) + B_1 \exp(-\sqrt{\sigma} r) - \frac{1}{D\sqrt{\sigma}} \int_0^r \rho(\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}(r - \xi)) d\xi, \quad (13)$$

где $\sigma = 1/D\tau$, а числа A_1 и B_1 удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$D_1(A_1\sqrt{\sigma} - B_1\sqrt{\sigma}) = v_{s1}(A_1 - B_1),$$

$$\begin{aligned} v_{s2} \left(A_1\sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{\sigma_1}) + B_1\sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{-\sigma_1}) - \frac{1}{D\sqrt{\sigma}} I_1 \right) + \\ + D_2 \left(A_1\sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{\sigma_1}) - B_1\sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{-\sigma_1}) - \frac{1}{D} I_2 \right) = 0, \end{aligned}$$

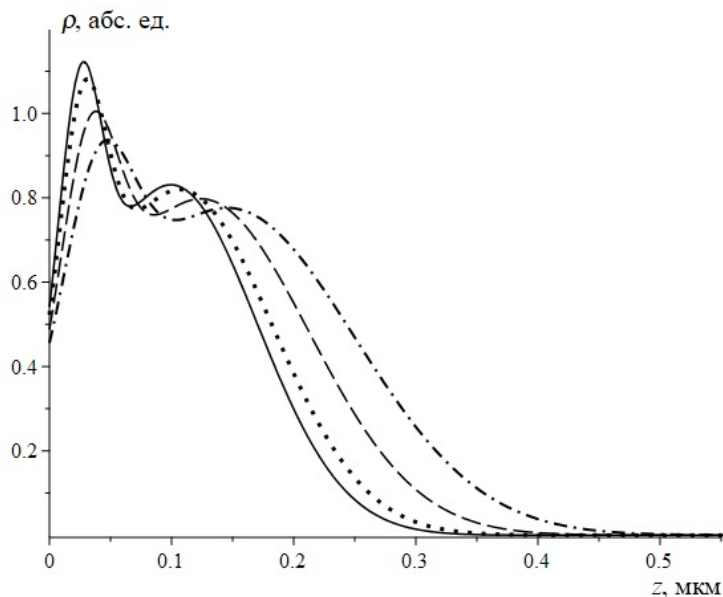


Рис. 1. Распределение плотностей потерь энергии электронами пучка $\rho(z)$ в HgTe (сплошная кривая), $\text{Cd}_{0,2}\text{Hg}_{0,8}\text{Te}$ (кривая, обозначенная точками), $\text{Cd}_{0,6}\text{Hg}_{0,4}\text{Te}$ (пунктирная кривая), CdTe (штрих-пунктирная кривая). Зависимости рассчитаны для энергии электронов $E_0 = 10$ кэВ

где

$$I_1 = \int_0^l \rho(\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}(1-\xi)) d\xi, \quad I_2 = \int_0^l \rho(\xi) \operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}(1-\xi)) d\xi.$$

Решив последнюю систему уравнений, находим A_1 и B_1 .

Полученное решение (12) задачи Коши (1)–(2) и формула (13) в дальнейшем позволяют устанавливать классы единственности и корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

5. О некоторых особенностях использования преобразования Ханкеля для решения задач тепломассопереноса в многослойной среде с отличающимися параметрами слоёв. С математической точки зрения рассматриваемая задача тепломассопереноса может быть решена строго аналитически для произвольного числа слоёв многослойной мишени (см. [5,6,9,19,25,30]). В то же время физическая постановка задачи и её реализация представляют определённые трудности, связанные с изменением параметров изначально монохроматического источника возбуждения при прохождении ускоренными электронами слоёв мишени (см. [12,27]).

На рис. 1 представлены результаты расчётов распределений плотностей потерь энергии электронами пучка $\rho(z)$ в HgTe (сплошная кривая) и широко используемых в оптоэлектронике и СВЧ-технике полупроводниковых материалах: монокристаллическом теллуриде кадмия (штрих-пунктирная кривая) и его твёрдых растворах $\text{Cd}_{0,2}\text{Hg}_{0,8}\text{Te}$ (кривая, обозначенная точками) и $\text{Cd}_{0,6}\text{Hg}_{0,4}\text{Te}$ (пунктирная кривая; см. [22]).

Зависимости рис. 1 рассчитаны для энергии электронов $E_0 = 10$ кэВ. Здесь использовано выражение для ρ , наилучшим образом описывающее реальное распределение потерь энергии в однородном материале (см. [13]). Этот рисунок иллюстрирует близость распределений для CdTe и $\text{Cd}_{0,6}\text{Hg}_{0,4}\text{Te}$, что позволяет при моделировании двухслойной структуры $\text{Cd}_{0,6}\text{Hg}_{0,4}\text{Te} - \text{CdTe}$

в правой части дифференциальных уравнений использовать значения ρ , параметры которых отвечают монокристаллическому теллуриду кадмия. Как показывают результаты математического моделирования, в этом и в ряде других случаев для решения практических задач для многослойных структур вполне может быть использован и подход, характерный для однородных мишеней (см. [5, 6, 8, 9, 17, 18, 24, 25, 30]).

6. Заключение. В работе показана возможность использования метода Ханкеля для решения нестационарной задачи тепломассопереноса в полупроводниковой мишени. Изучены некоторые особенности использования такого подхода для решения задач тепломассопереноса в однородной и многослойной средах. Рассмотрение проведено на примере диффузии неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом. Показано, что для решения ряда практических задач для многослойных мишеней с отличающимися параметрами слоёв может быть использован подход, разработанный ранее для задач тепломассопереноса в однородных полупроводниках. Эти результаты могут быть использованы при планировании эксперимента, проведении количественных вычислений и обработки полученных результатов в электроннозондовых технологиях при использовании электронов низких энергий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А. Оценка нагрева поверхности однородной металлической мишени электронным зондом // Изв. РАН. Сер. физ. — 2019. — 83, № 11. — С. 1455–1460.
2. Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А., Филиппов М. Н. Оценка нагрева поверхности полупроводниковой мишени низкоэнергетичным электронным зондом // Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2018. — № 8. — С. 48–52.
3. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников. — М.: Наука, 1990.
4. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2004.
5. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде // Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2017. — № 10. — С. 105–110.
6. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А. О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией // Вопр. атом. науки техн. Яд.-реакт. константы. — 2018. — № 3. — С. 158–167.
7. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. О применении матричного метода для математического моделирования процессов теплопереноса // Мат. 20 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.). — Сарато: Научная книга, 2020. — С. 118–121.
8. Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А. Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Изв. РАН. Сер. физ. — 2020. — 84, № 7. — С. 1027–1033.
9. Калманович В. В., Степович М. А. О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники // Пробл. разраб. персп. микро- и нанoeлектрон. систем. — 2018. — № 3. — С. 194–201.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.
11. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их разложения. — М.: Учпедгиз, 1963.
12. Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А. Энергетический спектр электронов, прошедших плёночную мишень // Изв. РАН. Сер. физ. — 1993. — 57, № 9. — С. 7–11.
13. Михеев Н. Н., Степович М. А. Завод. лаб. Диагн. мат. — 1996. — 62, № 4. — С. 20–25.
14. Поляков А. Н., Степович М. А., Туртин Д. В. Трёхмерная диффузия экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования // Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2015. — № 12. — С. 48–52.

15. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. Двумерная диффузия и катодолюминесценция экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования// Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2012. — № 11. — С. 35–40.
16. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
17. Серегина Е. В., Калманович В. В., Степович М. А. О моделировании распределений неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в многослойных планарных полупроводниковых структурах// Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2020. — № 7. — С. 93–100.
18. Серегина Е. В., Калманович В. В., Степович М. А. Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2019. — 172. — С. 108–116.
19. Степович М. А., Калманович В. В., Серегина Е. В. О возможности приложения матричного метода к моделированию катодолюминесценции, обусловленной широким электронным пучком в планарной многослойной полупроводниковой структуре// Изв. РАН. Сер. физ. — 2020. — 84, № 5. — С. 700–703.
20. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
21. Туртин Д. В., Серегина Е. В., Степович М. А. Качественный анализ одного класса дифференциальных уравнений тепломассопереноса в конденсированном веществе// Пробл. мат. anal. — 2020. — № 104. — С. 149–156.
22. Филачев А. М., Таубкин И. И., Трищенко М. А. Твердотельная фотоэлектроника. Фотодиоды. — М.: Физматкнига, 2011.
23. Everhart T. E. Kilovolt electron energy dissipation in solids// J. Appl. Phys. — 1960. — 31, № 10. — P. 1483–1492.
24. Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. Comparison of analytical and numerical modeling of distributions of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of medium-energy electrons in a two-layer semiconductor structure// J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — 1479. — 012116.
25. Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. On the possibility of a numerical solution of the heat and mass transfer problem with the combined matrix and generalized powers of Bers method// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1163. — 012012.
26. Kanaya K., Okayama S. Penetration and energy-loss theory of electrons in solid targets// J. Phys. D. — 1972. — 5, № 1. — P. 43–58.
27. Mikhееv N. N., Stepovich M. A. The energy spectrum of electrons passing through film targets and some of its applications to electron beam engineering// Mat. Sci. Eng. B. — 1995. — 32, № 1-4. — P. 1–16.
28. Noltemeyer M., Bertram F., Hempel T., Bastek B., Polyakov A., Christen J., Brandt M., Lorenz M., Grundmann M. Excitonic transport in ZnO// J. Mater. Research. — 2012. — 27, № 17. — P. 2225–2231.
29. Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material// Lobachevskii J. Math. — 2018. — 39, № 2. — P. 259–262.
30. Seregina E. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. Modeling of heating in the epitaxial structure $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}/\text{CdTe}$ with the projection least squares method// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1163. — 012013.
31. Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N. Assessment of the heating of conductive targets with an electron beam. Results of computational experiment// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1203. — 012042.
32. Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N. Mathematical modelling of heating of homogeneous metal targets with a focused electron beam// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1163. — 012014.
33. Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N. On one peculiarity of the model describing the interaction of the electron beam with the semiconductor surface// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 955. — 012040.
34. Stepovich M. A., Turtin D. V., Seregina E. V., Kalmanovich V. V. On the correctness of mathematical models of time-of-flight cathodoluminescence of direct-gap semiconductors// ITM Web Conf. — 2019. — 30. — 07014.

35. *Stepovich M. A., Turtin D. V., Seregina E. V., Polyakov A. N.* On the qualitative characteristics of a two-dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low-energy electron beam in a homogeneous semiconductor material// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1203. — 012095.
36. *Wittry D. B., Kyser D. F.* Measurements of diffusion lengths in direct-gap semiconductors by electron beam excitation// J. Appl. Phys. — 1967. — 38. — P. 375–382.

Туртин Дмитрий Витальевич

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Ивановский филиал

E-mail: turtin@mail.ru

Степович Михаил Адольфович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: m.stepovich@rambler.ru

Калманович Вероника Валерьевна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru

Серегина Елена Владимировна

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

(национальный исследовательский университет), Калужский филиал

E-mail: evfs@yandex.ru