ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 74–84
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-74-84

УДК 517.929.7

О ПРИНЦИПЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ И МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2022 г. **М. И. КАМЕНСКИЙ, Г. Г. ПЕТРОСЯН**

Аннотация. В статье рассматривается задача Коши для класса полулинейных дифференциальных включений с дробной производной Капуто порядка $q \in (0,1)$, малым параметром и отклоняющимся аргументом в сепарабельном банаховом пространстве. Предполагается, что линейная часть включения порождает C_0-полугруппу. В пространстве непрерывных функций построен многозначный интегральный оператор, неподвижные точки которого представляют собой решения. Анализ зависимости этого оператора от параметра позволяет установить аналог принципа усреднения. В работе использованы методы теории дробного математического анализа и теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное включение, дробная производная, малый параметр, отклоняющийся аргумент, мера некомпактности, уплотняющий мультиоператор.

ON THE AVERAGING PRINCIPLE FOR SEMILINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS IN A BANACH SPACE WITH A DEVIATING ARGUMENT AND A SMALL PARAMETER

© 2022 **M. I. KAMENSKII, G. G. PETROSYAN**

Abstract. The this paper, we considers the Cauchy problem for a class of semilinear differential inclusions in a separable Banach space involving a fractional Caputo derivative of order $q \in (0,1)$, a small parameter, and a deviant argument. We assume that the linear part of the inclusion generates a C_0-semigroup. In the space of continuous functions, we construct a multivalued integral operator whose fixed points are solutions. An analysis of the dependence of this operator on a parameter allows one to establish an analog of the averaging principle. We apply methods of the theory of fractional analysis and the theory of topological degree for condensing set-valued mappings.

Keywords and phrases: Cauchy problem, differential inclusion, fractional derivative, small parameter, deviant argument, measure of noncompactness, condensing multioperator.

AMS Subject Classification: 34Kxx, 47Hxx

1. Введение. В последние годы большой интерес к теории дробного анализа и дифференциальных уравнений дробного порядка значительно усилился. В первую очередь это происходит благодаря приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, [8, 19, 20, 22, 23, 25] и др.). В настоящее время данное

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-31-60011, № 20-51-15003 НЦНИ_а).

направление занимает довольно широкое место в современной математике, исследования в ней проводят ученые со всего мира (см. [5,6,12–15,17,24]). В то же время в классической теории дифференциальных уравнений и включений важное место занимает класс уравнений и включений с отклоняющимся аргументом. Этот факт не мог не отразиться и в теории дифференциальных уравнений и включений дробного порядка. В данный момент происходит активное исследование дифференциальных уравнений и включений дробного порядка с отклоняющимся аргументом (см. [1,3,4,16,18]). К этому кругу исследований примыкает и наша задача.

В настоящей работе рассматривается следующая задача Коши для полулинейного дифференциального включения с отклоняющимся аргументом в сепарабельном банаховом пространстве E:

$$^{C}D^{q}x(t) \in Ax(t) + F\left(\frac{t}{\epsilon}, x(t), x(t-h)\right), \quad t \in [0,a], \tag{1}$$

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \tag{2}$$

где $^{C}D^{q}$ — дробная производная Капуто порядка $q \in (0,1)$, $\epsilon > 0$ — малый параметр, $\varphi \in C([-h,0];E)$ — заданная функция, $A\colon D(A) \subseteq E \to E$ — линейный замкнутый (не обязательно ограниченный) оператор, порождающий C_0-полугруппу, $F\colon \mathbb{R}\times E\times E \multimap E$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями.

Для указанной задачи построим многозначный интегральный оператор в пространстве непрерывных функций, неподвижные точки которого дают решения. Далее, анализируя зависимость этого оператора от параметра ϵ, установим аналог принципа усреднения. В работе используются методы теории дробного математического анализа и теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений (см. [2,9–11,21]).

2. Предварительные сведения.

2.1. Дробный интеграл и дробная производная. Приведем вначале определения дробного интеграла и дробной производной Капуто (см., например, [19,22]).

Определение 1. Дробным интегралом порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,a];E)$ называется функция

$$I^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Определение 2. Дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (N-1, N]$ от функции $g \in C^N([0,a];E)$ называется функция

$$^{C}D^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1}g^{(N)}(s)ds.$$

2.2. Многозначные отображения. Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство. Введем следующие обозначения:

$$P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}, \quad Pb(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ ограничено}\},$$
$$Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\}; \quad K(\mathcal{E}) = \{A \in Pb(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\};$$
$$Kv(\mathcal{E}) = Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E}).$$

Определение 3 (см. [11,21])**.** Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ — некоторое частично упорядоченное множество. Функция $\beta\colon P(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in P(\mathcal{E})$ выполняется условие $\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ — замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется

(i) *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$ включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;

(ii) *несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется

(iii) *правильной*, если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$;

(iv) *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — подмножество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественным порядком;

(v) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\}.$$

Определение 4 (см. [11, 21])**.** Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F}\colon X \to P(\mathcal{E})$ называется

(i) *полунепрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$;

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$;

(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в $\mathcal{E}$;

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Нам понадобятся в дальнейшем следующее утверждение (см. [11, 21]).

Лемма 1. *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F}\colon X \to K(Y)$ — замкнутое квазикомпактное мультиотображение. Тогда $\mathcal{F}$ полунепрерывно снизу.*

Определение 5. Мультиотображение $\mathcal{F}\colon X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности β (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, имеем $\beta(F(\Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega)$.

Справедливы следующие теоремы о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см. [11, 21]).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое ограниченное замкнутое подмножество банахова пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}\colon \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — β-уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\operatorname{Fix}\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ непусто.*

Теорема 2. *Пусть X — ограниченное замкнутое подмножество банахова пространства $\mathcal{E}$, β — монотонная мера некомпактности в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}\colon X \to K(\mathcal{E})$ — замкнутое мультиотображение, которое является β-уплотняющим на каждом ограниченном множестве. Если множество неподвижных точек $\operatorname{Fix}\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ ограничено, то оно компактно.*

Определение 6. Пусть Λ — метрическое пространство параметров. Семейство мультиотображений $G\colon \Lambda \times X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности β (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, имеем $\beta(G(\Lambda \times \Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть X — ограниченное замкнутое подмножество в пространстве $\mathcal{E}$, β — монотонная мера некомпактности в $\mathcal{E}$, Λ — метрическое пространство и $G : \Lambda \times X \to K(\mathcal{E})$ — такое β-уплотняющее семейство замкнутых мультиоператоров, что множество неподвижных точек $\operatorname{Fix} G(\lambda, \cdot) := \{x \in X : x \in G(\lambda, x)\}$ непусто для каждого $\lambda \in \Lambda$. Тогда мультиотображение $\mathcal{F}\colon \Lambda \to P(\mathcal{E})$, где $\mathcal{F}(\lambda) = \operatorname{Fix} G(\lambda, \cdot)$, полунепрерывно снизу.*

2.3. Измеримые мультифункции. Напомним некоторые понятия (см. [11, 21]). Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство.

Определение 7. Мультифункция $G\colon [0,a] \to K(\mathcal{E})$, для $p \geqslant 1$, называется

(i) L^p-*интегрируемой*, если она допускает L^p-интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует такая функция $g \in L^p([0,a];\mathcal{E})$, что $g(t) \in G(t)$ для почти всех $t \in [0,a]$;

(ii) L^p-*интегрально ограниченной*, если существует такая функция $\xi \in L^p([0,a])$, что

$$\|G(t)\| := \sup\Big\{\|g(t)\|_{\mathcal{E}} : g(t) \in G(t)\Big\} \leqslant \xi(t)$$

для почти всех $t \in [0,a]$.

Множество всех L^p-интегрируемых сечений мультифункции $G\colon [0,a] \to K(\mathcal{E})$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Определение 8. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,a];\mathcal{E})$ называется L^p-полукомпактной, если она L^p-интегрально ограничена, т.е.

$$\|\xi_n(t)\|_{\mathcal{E}} \leqslant v(t) \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots \text{ и почти всех } t \in [0,a],$$

где $v \in L^p([0,a])$, а множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в $\mathcal{E}$ для почти всех $t \in [0,a]$.

Если G сильно измерима и L^p-интегрально ограничена, то она L^p-интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \left\{\int_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}^p_G\right\}$$

для любого $t \in [0,a]$.

Лемма 2 (см. [11, теорема 4.2.3])**.** *Пусть $\mathcal{E}$ — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G\colon [0,a] \to P(\mathcal{E})$ — такая L^p-интегрируемая и L^p-интегрально ограниченная мультифункция, что $\chi(G(t)) \leqslant q(t)$ для почти всех $t \in [0,a]$, где $q \in L^p_+([0,a])$. Тогда*

$$\chi\left(\int_0^t G(s)ds\right) \leqslant \int_0^t q(s)ds$$

для всех $t \in [0,a]$. В частности, если мультифункция $G\colon [0,a] \to K(\mathcal{E})$ измерима и L^p-интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем

$$\chi\left(\int_0^t G(s)ds\right) \leqslant \int_0^t \chi(G(s))ds$$

для всех $t \in [0,a]$.

Лемма 3 (см. [11, теорема 4.2.1])**.** *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0,a];\mathcal{E})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и почти всех $t \in [0,a]$, является L^1-интегрально ограниченной. Предположим, что $\chi(\{\xi_n\}) \leqslant \alpha(t)$ для почти всех $t \in [0,a]$, где $\alpha \in L^1_+([0,a])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют такие компактное множество $K_\delta \subset \mathcal{E}$, множество $m_\delta \subset [0,a]$ с лебеговой мерой $m_\delta < \delta$ и множество функций $G_\delta \subset L^1([0,a];\mathcal{E})$ со значениями в K_δ, что для каждого $n \geqslant 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой*

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_{\mathcal{E}} \leqslant 2\alpha(t) + \delta, \quad t \in [0,a] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ, и эта последовательность слабо компактна.

3. Вспомогательные результаты. В [3] была рассмотрена задача Коши для полулинейного дифференциального включения дробного порядка в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$ {}^C D^q x(t) \in Ax(t) + \widetilde{F}(t, x_t), \quad t \in [0, a], \tag{3} $$

$$ x(s) + g(x)(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \tag{4} $$

где ${}^C D^q$, $0 < q < 1$, — дробная производная Капуто, $\widetilde{F}\colon [0, a] \times C([-h, 0]; E) \to Kv(E)$ — мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E (не обязательно ограниченный), $g\colon C([-h, a]; E) \to C([-h, 0]; E)$ — нелинейное отображение, x_t предыстория функции до момента $t \in [0, a]$, т.е. $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, и функция $\varphi \in C([-h, 0]; E)$.

Данная задача рассматривалась при следующих предположениях:

- (A) $A\colon D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$, обозначим $M = \sup\{\|T(t)\|; t \in [0; a]\}$;
- $(\widetilde{F}_1)$ для каждого $\xi \in C([-h, 0]; E)$ мультифункция $\widetilde{F}(\cdot, \xi)\colon [0, a] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;
- $(\widetilde{F}_2)$ для почти всех $t \in [0, a]$ мультиотображение $\widetilde{F}(t, \cdot)\colon C([-h, 0]; E) \to Kv(E)$ полунепрерывно сверху;
- $(\widetilde{F}_3)$ существует такая функция $\alpha \in L^\infty_+([0, a])$, что
$$ \|\widetilde{F}(t, \xi)\|_E \leqslant \alpha(t)(1 + \|\xi\|_{C([-h,0];E)}) \text{ для почти всех } t \in [0, a]; $$
- $(\widetilde{F}_4)$ найдется такая функция $\mu \in L^\infty([0, a])$, что для любого ограниченного множества $Q \subset C([-h, 0]; E)$ имеем $\chi(\widetilde{F}(t, Q)) \leqslant \mu(t)\psi(Q)$ для почти всех $t \in [0, a]$, где χ — мера некомпактнотсти Хаусдорфа в E, $\psi(Q) = \sup\limits_{-h \leqslant \theta \leqslant 0} \chi(Q(\theta))$, $Q(\theta) = \{y(\theta), y \in Q\}$, $\theta \in [-h, 0]$;
- (g_1) $g\colon C([-h, a]; E) \to C([-h, 0]; E)$ — вполне непрерывное отображение;
- (g_2) существует такая константа $K > 0$, что $\|g(x)\|_{C([-h,0];E)} \leqslant K$.

Определение 9. Интегральным решением задачи Коши (3)—(4) на промежутке $[-h, a]$ называется функция $x \in C([-h, a]; E)$:

$$ x(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(x)(t), & t \in [-h, 0], \\ \mathcal{G}(t)(\varphi(0) - g(x)(0)) + \int\limits_0^t (t - s)^{q-1}\mathcal{T}(t - s)\phi(s)ds, & t \in [0, a], \end{cases} $$

где

$$ \mathcal{G}(t) = \int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = q\int\limits_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \quad \xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-1/q}\Psi_q(\theta^{-1/q}), $$

$$ \Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq + 1)}{n!}\sin(n\pi q), \quad \theta \in \mathbb{R}^+, \quad \phi \in \mathcal{P}^\infty_F(x). $$

Замечание 1. Имеют место соотношения

$$ \xi_q(\theta) \geqslant 0, \quad \int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)d\theta = 1, \quad \int\limits_0^\infty \theta\xi_q(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(q + 1)}. $$

Лемма 4 (см. [26]). *Операторы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$ обладают следующими свойствами:*

- (i) *для любого $t \in [0, a]$ операторы $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются линейными и ограниченными; более того,*
$$ \|\mathcal{G}(t)x\|_E \leqslant M\|x\|_E, \quad \|\mathcal{T}(t)x\|_E \leqslant \frac{qM}{\Gamma(1 + q)}\|x\|_E; $$
- (ii) *операторы $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ сильно непрерывны для всех $t \in [0, a]$.*

При решении задачи (3)—(4) конструируется следующая схема. Для $x \in C([-h,a];E)$ вводится в рассмотрение мультифункция

$$\Phi_F\colon [-h,a] \to Kv(E), \quad \Phi_F(t) = F(t, x_t).$$

Ясно, что функция $t \in [0,a] \to x_t$ непрерывна. Тогда мультифункция Φ_F является L^p-интегрируемой для любого $p \geqslant 1$ (см. [21]).

Пусть $\mathcal{P}_F^p\colon C([-h,a];E) \multimap L^p([0,a];E)$ — суперпозиционное мультиотображение, заданное формулой $\mathcal{P}_F^p(x) = \mathcal{S}_{\Phi_F}^p$. Для решения задачи (3)—(4) использовалось суперпозиционное мультиотображение

$$\mathcal{P}_F^\infty\colon C([-h,a];E) \multimap L^\infty([0,a];E),$$

заданное формулой $\mathcal{P}_F^\infty(x) = \mathcal{S}_{\Phi_F}^\infty$, и отображение

$$S\colon L^\infty([0,a];E) \to C([0,a];E), \quad S(\phi)(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds,$$

для которого справедливо следующее утверждение.

Лемма 5 (см. [12]). *Для каждого компактного множества $K \subset E$ и такой ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для почти всех $t \in [0,T]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0,T];E)$ влечет сходимость $S(\eta_n) \to S(\eta_0)$ в $C([0,T];E)$.*

Затем задача сводилась к доказательству существования неподвижных точек мультиотображения $\Gamma\colon C([-h,a];E) \multimap C([-h,a];E)$, заданного следующим образом:

$$\Gamma(x) = j(x) + S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x), \quad j(x)(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(x)(t), & t \in [-h,0], \\ \mathcal{G}(t)(\varphi(0) - g(x)(0)), & t \in [0,a]. \end{cases}$$

В итоге было доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *При выполнении условий (A), $(\widetilde{F}_1)$—$(\widetilde{F}_4)$, (g_1)—(g_2) множество решений задачи (3)—(4) на $[-h,a]$ непусто и компактно.*

4. Принцип усреднения. Рассмотрим сначала задачу Коши для включения

$$^C D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t), x(t-h)), \quad t \in [0,a], \tag{5}$$

с начальным условием (2), полагая, что $\varphi \in C([-h,0];E)$, оператор $A\colon D(A) \subseteq E \to E$ удовлетворяет условию (A), мультиотображение $F\colon [0,a] \times E \times E \to Kv(E)$ подчинено следующим условиям:

- (F_1) для всех $(\xi,\eta) \in E \times E$ мультифункция $F(\cdot,\xi,\eta)\colon [0,a] \longrightarrow Kv(E)$ допускает измеримое сечение;
- (F_2) для почти всех $t \in [0,a]$ мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot)\colon E \times E \longrightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху;
- (F_3) существует такая функция $\alpha \in L_+^\infty([0,a])$, что
$$\big\|F(t,\xi,\eta)\big\|_E \leqslant \alpha(t)\big(1 + \|\xi\|_E + \|\eta\|_E\big) \quad \text{для почти всех } t \in [0,T];$$
- (F_4) существует такая константа $k > 0$, что для любых ограниченных множеств $\Omega, \Delta \subset E$ справедливо неравенство
$$\chi(F([0,T] \times \Omega \times \Delta) \leqslant k(\chi(\Omega) + \chi(\Delta)).$$

Из (F_4) следует, что мультиоператор F преобразует ограниченные множества в ограниченные.

Очевидно, что последняя задача (5), (2), если считать, что $F(t,x(t),x(t-h)) = \widetilde{F}(t,\varphi(0),\varphi(-h))$ и $g(x)(\cdot) = 0$, является частным случаем задачи Коши (3)—(4), поэтому при выполнении условий (A), (F_1)—(F_4) множество ее интегральных решений непусто и компактно в пространстве $C([-h,a];E)$.

Рассмотрим теперь задачу Коши (1)—(2). Будем полагать, что линейный оператор $A\colon D(A) \subseteq E \to E$ удовлетворяет условию (A), а мультиоператор $F\colon \mathbb{R} \times E \times E \to Kv(E)$ удовлетворяет условиям (F_1)—(F_4), а также следующему условию:

(F_T) мультиотображение F является T-периодическим по первому аргументу, т.е. существует такое $T > 0$, что

$$F(t+T,\xi,\eta) = F(t,\xi,\eta)$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ и для каждой пары $(\xi,\eta) \in E \times E$.

Ясно, что из последнего условия следует существование T-периодических измеримых селекторов для мультифункции $F(\cdot,\xi,\eta)$, для всех $(\xi,\eta) \in E \times E$.

Заметим, что в силу условия (F_3) множество решений задачи (1)—(2) ограниченно на отрезке $[-h,a]$, равномерно по ϵ.

Параллельно с включением (1) введем в рассмотрение усредненное включение:

$$D^q x(t) \in Ax(t) + F_0(x(t), x(t-h)), \tag{6}$$

с начальным условием (2), где

$$F_0(\xi,\eta) = \frac{1}{T}\int_0^T F(s,\xi,\eta)ds.$$

Аналогично тому, как это сделано в [11], можно доказать следующий факт.

Лемма 6. *Мультиоператор $F_0\colon E \times E \to Kv(E)$ полунепрерывен снизу.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{(\xi_n,\eta_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset E \times E$ такова, что $(\xi_n,\eta_n) \to (\xi_0,\eta_0)$. Возьмем произвольное $z_n \in F_0(\xi_n,\eta_n)$, $n \geqslant 1$; тогда существует такое сечение $f_n \in \mathcal{P}_F^{\infty}(\overline{\xi}_n,\overline{\eta}_n)$, где $\overline{\xi}_n \equiv \xi_n$, $\overline{\eta}_n \equiv \eta_n$, что

$$z_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_n(s)ds, \quad n \geqslant 1.$$

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является L^1-полукомпактной, поэтому благодаря лемме 3 можем без ограничения общности считать, что $f_n \rightharpoonup f_0 \in \mathcal{P}_F^{\infty}(\overline{\xi}_0,\overline{\eta}_0)$, где $\overline{\xi}_0 \equiv \xi_0$, $\overline{\eta}_0 \equiv \eta_0$.

Заметим, что если в определении оператора S взять $q = 1$ и считать оператор $A = 0$, то в силу леммы 5 получаем, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_n(s)ds \to \frac{1}{T}\int_0^T f_0(s)ds,$$

т.е. $z_n \to z_0 \in F_0(\xi_0,\eta_0)$, что и требовалось доказать. □

Для любых ограниченных множеств $\Omega, \Delta \subset E$ справедлива оценка

$$\chi(F_0(\Omega,\Delta)) \leqslant k(\chi(\Omega) + \chi(\Delta)), \tag{7}$$

где k — константа из условия (F_4). Действительно, для любых $\xi \in \Omega$, $\eta \in \Delta$ и $f \in \mathcal{P}_F^{\infty}(\xi,\eta)$ получаем, что $f(t) \in F([0,T] \times \Omega \times \Delta)$ для почти всех $t \in [0,T]$. Поэтому

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds \in \overline{\mathrm{co}}\, F([0,T] \times \Omega \times \Delta);$$

более того, $F_0(\Omega \times \Delta) \subset \overline{\mathrm{co}}\, F([0,T] \times \Omega \times \Delta)$, поэтому благодаря определению меры некомпактности и условию (F_4) получаем (7).

Введем в пространстве $C([0,a];E)$ векторную меру некомпактности со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$:

$$\nu\colon P(C([0,a];E)) \to \mathbb{R}^2_+, \quad \nu(\Omega) = (\psi(\Omega), \mathrm{mod}_C(\Omega));$$

здесь первая компонента — это модуль послойной некомпактности

$$\psi(\Omega) = \sup_{t \in [0,a]} e^{-pt}\chi(\Omega(t)),$$

и константа $p > 0$ выбрана так, что для положительного d, удовлетворяющего неравенству

$$\frac{2qM\|\mu\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\frac{d^q}{q} < \frac{1}{4}, \tag{8}$$

выполняется следующая оценка:

$$\frac{2qM\|\mu\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\frac{1}{pd^{1-q}} < \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Вторая компонента введенной меры некомпактности ν есть модуль равностепенной непрерывности:

$$\mathrm{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in\Omega}\max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta}\|x(t_1)-x(t_2)\|.$$

Рассмотрим выпуклое замкнутое множество

$$\mathcal{D} = \{x \in C([0,a];E),\ x(0) = \varphi(0)\} \subset C([0,a];E);$$

для функции $x \in \mathcal{D}$ определим

$$x[\varphi](t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h,0], \\ x(t), & t \in [0,a]. \end{cases}$$

Теперь можно ввести в рассмотрение суперпозиционный мультиоператор

$$\mathcal{P}^\infty_{F_\epsilon} \colon \mathcal{D} \to P(L^\infty([0,a];E)),$$

$$\mathcal{P}^\infty_{F_\epsilon}(x) = \left\{\phi \in L^\infty([0,a];E) : \phi(t) \in F\left(\frac{t}{\epsilon},\ x(t),\ x[\varphi](t-h)\right) \text{ для почти всех } t \in [0,a]\right\}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующий многозначный аналог леммы Красносельского—Крейна для банахова пространства $\mathcal{E}$ (см. [11]). Чтобы записать ее в удобной форме для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0,a];\mathcal{E})$, обладающей свойством $x_n \xrightarrow{C} x^0$, положим

$$\mathcal{F}_n(s) = F\left(\frac{s}{\epsilon_n}, x_n(s), x_n(s-h)\right), \quad \mathcal{F}_0(s) = F_0(x^0(s), x^0(s-h)),$$

для почти всех $s \in [0,a]$.

Лемма 7. *Пусть мультиоператор F удовлетворяет условиям (F_1), (F_2), (F_4), (F_T), последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0,a];\mathcal{E})$ и $f_n \in \mathcal{P}^1_{\mathcal{F}_n}$. Предположим, что $\epsilon_n \to 0$, $x_n \xrightarrow{C} x^0$ и $f_n \xrightarrow{L^1} f^0$. Тогда $f^0 \in \mathcal{P}^1_{\mathcal{F}_0}$.*

В частности, отметим, что в последней лемме в качестве пространства $\mathcal{E}$ может быть использовано $E \times E$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $F_\epsilon(t,x,y) = F(t/\epsilon,x,y)$; для $\epsilon > 0$ будем обозначать символом $\Sigma^{F_\epsilon}_\varphi$ множество решений задачи Коши (1)—(2), а через $\Sigma^{F_0}_\varphi$ — множество решений задачи Коши для усредненного включения (6) с начальным условием (2). Также будем обозначать r-раздутие множества через W_r.

Теорема 5. *Предположим, что мультиоператор F удовлетворяет условиям (F_1)—(F_4) и (F_T). Тогда для каждого $r > 0$ существует такое $\epsilon_0 > 0$, что*

$$\Sigma^{F_\epsilon}_\varphi[0,a] \subset W_r(\Sigma^{F_0}_\varphi[0,a]) \quad \textit{для почти всех } \epsilon \in (0,\epsilon_0].$$

Доказательство. Рассмотрим семейство мультиоператоров $G\colon [0,1]\times\mathcal{D} \to Kv(\mathcal{D})$:

$$G(\epsilon,x) = \left\{z : z(t) = \mathcal{G}(t)\varphi(0) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi_\epsilon(s)ds,\ \phi_\epsilon \in \mathcal{P}^\infty_{F_\epsilon}(x)\right\}.$$

Вначале покажем, что G полунепрерывно сверху в каждой точке $(0,x)$. Для этого возьмем такие последовательности $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,1]$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}$, что $\epsilon_n \to 0$, $x_n \to x$. Тогда для каждой последовательности $\phi_n \in \mathcal{P}^\infty_{F_{\epsilon_n}}(x_n)$, $n \geqslant 1$, для почти всех $t \in [0,a]$ множество $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^\infty$ по условию (F_4), лежит в относительно компактном множестве $F([0,T] \times \{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \times \{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty})$, где $y_n(t) = x_n(t-h)$, поэтому последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является L^1-полукомпактной. В силу критерия Дистеля (см. [7]) можем предположить без ограничения общности, что $\phi_n \xrightarrow{L^1} \phi^0$. По лемме 7 получаем, что $\phi^0 \in \mathcal{P}^1_{F_0}$, но последовательность ϕ_n ограничена, поэтому $\phi^0 \in \mathcal{P}^{\infty}_{F_0}$. Теперь остается использовать условие леммы 5.

Докажем, что мультиоператор G — уплотняющий относительно меры некомпактности ν. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ — непустое ограниченное множество и

$$\nu(G([0,1] \times \Omega)) \geqslant \nu(\Omega). \tag{10}$$

Покажем, что Ω — относительно компактное множество.

Очевидно, достаточно доказать последнее утверждение для мультиотображения $S \circ \mathcal{P}^{\infty}_{F_\epsilon}$.

Из оценки (10) вытекают неравенства

$$\psi(S \circ \mathcal{P}^{\infty}_{F_\epsilon}(\Omega)) \geqslant \psi(\Omega), \quad \mathrm{mod}_C(S \circ \mathcal{P}^{\infty}_{F_\epsilon}(\Omega)) \geqslant \mathrm{mod}_C(\Omega). \tag{11}$$

Применяя условие регулярности (F_4), имеем

$$\begin{aligned}
\chi\Big(\Big\{\phi_\epsilon(s):\ \phi_\epsilon \in \mathcal{P}^{\infty}_{F_\epsilon}(\Omega)\Big\}\Big) &\leqslant \chi\Big(F\Big([0,T] \times \{x(s)\} \times \{y(s) = x(s-h)\} : x \in \Omega\Big)\Big) \leqslant \\
&\leqslant k\Big(\chi\big(\{x(s)\} : x \in \Omega\big) + \chi\big(\{x[\varphi](s-h)\}\big) : x \in \Omega\Big) = \\
&= e^{ps}k\Big(e^{-ps}\chi\big(\{x(s)\} : x \in \Omega\big) + e^{-ps}\chi\big(\{x[\varphi](s-h)\} : x \in \Omega\big)\Big) \leqslant 2e^{ps}k\psi(\Omega).
\end{aligned}$$

Используя лемму 4 и последнее неравенство, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
e^{-pt}\chi\Big(S \circ \mathcal{P}^{\infty}_{F_\epsilon}\big(\Omega(t)\big)\Big) &\leqslant e^{-pt}\frac{qMk}{\Gamma(1+q)}\int\limits_0^t (t-s)^{q-1} 2e^{ps}\psi(\Omega)ds \leqslant \\
&\leqslant \frac{2qMk}{\Gamma(1+q)}\psi(\Omega)\left(e^{-pt}\int\limits_0^{t-d}(t-s)^{q-1}e^{ps}ds + e^{-pt}\int\limits_{t-d}^{t}(t-s)^{q-1}e^{ps}ds\right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{2qMk}{\Gamma(1+q)}\psi(\Omega)\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{p(t-d)}-1}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leqslant \frac{2qMk}{\Gamma(1+q)}\psi(\Omega)\left(\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{-pd}}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{2qMk}{\Gamma(1+q)}\psi(\Omega)\left(\frac{1}{pd^{1-q}} + \frac{d^q}{q}\right).
\end{aligned}$$

Теперь, используя неравенства (8) и (9), для последней оценки имеем

$$\sup_{t\in[0,a]} e^{-pt}\chi\Big(S \circ \mathcal{P}^{\infty}_{F_\epsilon}(\Omega)\Big) \leqslant \frac{1}{2}\psi(\Omega), \quad \psi\Big(S \circ \mathcal{P}^{\infty}_{F_\epsilon}(\Omega)\Big) \leqslant \frac{1}{2}\psi(\Omega).$$

Учитывая первое неравенство из (11) вместе с последним, получаем

$$\psi(\Omega) \leqslant \frac{1}{2}\psi(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \psi(\Omega) = 0;$$

более того,

$$\chi(\Omega(t)) = 0 \quad \text{для всех } t \in [0,a]. \tag{12}$$

Перейдем теперь к оценке модуля равностепенной непрерывности. Возьмем последовательности $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$. Ограниченность мультиоператора F на ограниченных множествах влечет за собой ограниченность множества $\{f_n : f_n \in \mathcal{P}^{\infty}_{F_{\epsilon_n}}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Из условий (F_4) и (12) следует, что множество $F([0,T] \times \{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \times \{x_n(t-h)\}_{n=1}^{\infty})$ относительно компактно, поэтому множество $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ также относительно компактно для почти всех $t \in [0,a]$. Следовательно, множество $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо компактно в $L^1([0,a];E)$. Из (12) следует в силу леммы 3, что для каждого $\delta > 0$ существуют компактное множество $K_\delta \subset E$, множество $m_\delta \subseteq [0,a]$ с лебеговой мерой $\mathrm{mes}(m_\delta) < \delta$ и такое множество функций $\Xi_\delta \subset L^1([0,a];E)$ со значениями в K_δ, что для каждого

$n \geqslant 1$ существует функция $b_n \in \Xi_\delta$, для которой $\|f_n(t) - b_n(t)\|_E \leqslant \delta$ для всех $t \in [0, a] \setminus m_\delta$. В силу последних рассуждений и леммы 5 получаем, что множество

$$\left\{ \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) f_n(s) ds : f_n(s) \in \mathcal{P}^\infty_{F_{\epsilon_n}}(\Omega) \right\}_{n=1}^\infty$$

относительно компактно в $C([0, a]; E)$. Используя второе неравенство из (11), имеем

$$\mathrm{mod}_C(\Omega) \leqslant \mathrm{mod}_C\Big(S([0,T] \times \Omega)\Big) = \mathrm{mod}_C\left(\left\{ Sf_n \;\middle|\; f_n(s) \in \mathcal{P}^\infty_{F_{\epsilon_n}}(\Omega) \right\}\right) = 0,$$

где

$$Sf_n(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) f_n(s) ds.$$

Таким образом, $\nu(\Omega) = (0, 0)$, поэтому Ω относительно компактное множество, и мультиоператор G уплотняющий относительно меры некомпактности ν. Остается сослаться на теорему 3. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасова М. С., Петросян Г. Г.* О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 9. — С. 3–15.
2. *Каменский М. И., Макаренков О. Ю., Нистри П.* Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром// Докл. РАН. — 2003. — *388*, № 4. — С. 439–442.
3. *Петросян Г. Г., Афанасова М. С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2017. — № 1. — С. 135–151.
4. *Afanasova M., Liou Y. Ch., Obukhoskii V., Petrosyan G.* On the controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space// J. Nonlin. Convex Anal. — 2019. — *20*, № 9. — P. 1919–1935.
5. *Appell J., Lopez B., Sadarangani K.* Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives// J. Nonlin. Var. Anal. — 2018. — *2*, № 1. — P. 25–33.
6. *Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V.* On generalized boundary-value problems for a class of fractional differential inclusions// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — № 20. — P. 1424–1446.
7. *Diestel J., Ruess W. M., Schachermayer W.* Weak compactness in $L^1(\mu, X)$// Proc. Am. Math. Soc. — 1993. — *118*. — P. 447–453.
8. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. — Singapore: World Scientific, 2000.
9. *Johnson R., Nistri P., Kamenski M.* On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods// J. Differ. Equations. — 1997. — *140*, № 1. — P. 186–208.
10. *Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V.* Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces// Nonlin. Anal. — 1993. — *20*, № 7. — P. 781–792.
11. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 2001.
12. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces// Fixed Point Theory. — 2017. — *18*, № 1. — P. 269–292.
13. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* Boundary-value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space// Appl. Anal. — 2018. — *97*, № 4. — P. 571–591.
14. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces// Fixed Point Theory Appl. — 2017. — *28*, № 4. — 28.
15. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary-value problems for fractional differential inclusions// Fixed Point Theory Appl. — 2019. — 2.
16. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* On a periodic boundary-value problem for a fractional-order semilinear functional differential inclusions in a Banach space// Mathematics. — 2019. — *7*, № 12. — 1146.

17. *Ke T. D., Loi N. V., Obukhovskii V.* Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2015. — № 18. — P. 531–553.
18. *Ke T. D., Obukhovskii V., Wong N. C., Yao J. C.* On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays// Appl. Anal. — 2013. — *92.* — P. 115–137.
19. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
20. *Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T.* On the initial-value problem for the fractional diffusion-wave equation// in: Waves and Stability in Continuous Media. — Singapore: World Scientific, 1994. — P. 246–251.
21. *Obukhovskii V. V., Gelman B. D.* Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications. — Singapore: World Scientific, 2020.
22. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1999.
23. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. — London–New York: Springer-Verlag, 2010.
24. *Zhang Z., Liu B.* Existence of mild solutions for fractional evolution equations// Fixed Point Theory. — 2014. — *15.* — P. 325–334.
25. *Zhou Y.* Fractional Evolution Equations and Inclusions: Analysis and Control. — London: Elsevier, 2016.
26. *Zhou Y., Jiao F.* Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations// Comput. Math. Appl. — 2010. — *59.* — P. 1063–1077.

Каменский Михаил Игоревич
Воронежский государственный университет
E-mail: `mikhailkamenski@mail.ru`

Петросян Гарик Гагикович
Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: `garikpetrosyan@yandex.ru`