ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 85–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-85-96

УДК 512.816.3

ЛОКАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ ГРУППЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ ПЛОСКОСТИ ДО ЛОКАЛЬНО ДВАЖДЫ ТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППЫ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЭТОЙ ЖЕ ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. **В. А. КЫРОВ**

Аннотация. В работе поставлена задача о нахождении всех локально дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов двумерного пространства. Эта задача сводится к нахождению алгебр Ли локально дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов. Базисные операторы таких алгебр Ли находятся из решений систем дифференциальных уравнений второго порядка. Доказано, что матрицы этих систем уравнений коммутируют между собой и упрощаются приведением к жордановой форме. Из решений систем дифференциальных уравнений выделены алгебры Ли всех локально дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов плоскости. С помощью экспоненциального отображения найдены локально дважды транзитивные группы Ли преобразований.

Ключевые слова: дважды транзитивная группа преобразований, алгебра Ли, жорданова форма матрицы.

LOCAL EXTENSION OF THE TRANSLATION GROUP OF A PLANE TO A LOCALLY DOUBLY TRANSITIVE TRANSFORMATION LIE GROUP OF THE SAME PLANE

© 2022 **V. A. KYROV**

Abstract. In this paper, we examine the problem of finding all locally doubly transitive extensions of the translation group of a two-dimensional space. This problem is reduced to the search for finding Lie algebras of locally doubly transitive extensions of the translation group. The basis operators of such Lie algebras are found from solutions of systems of second-order differential equations. We prove that the matrices of these systems commute with each other and can be simplified by reduction to the Jordan form. From the solutions of systems of differential equations, the Lie algebras of all locally doubly transitive extensions of the translation group of the plane are obtained. Using the exponential mapping, we calculate locally doubly transitive Lie transformation groups.

Keywords and phrases: doubly transitive transformation group, Lie algebra, Jordan form.

AMS Subject Classification: 22F05

1. Введение. В работе В. В. Горбацевича [3] приводится определение расширения транзитивной группы Ли G, действующей в многообразии M: *расширением транзитивной группы Ли* G *называется группа Ли* G_1, *содержащая* G *в виде подгруппы Ли и тоже транзитивная на* M, *причем ограничение этого транзитивного действия на* G *дает исходное транзитивное действие группы Ли* G. Классическим примером расширения группы параллельных переносов плоскости

$\mathbb{R}^2$ является группа аффинных преобразований этой же плоскости. Также отметим, что в [3] рассматриваются глобальные действия и приводится алгебраическая конструкция, дающая расширения транзитивных действий разрешимых групп Ли на компактных многообразиях.

В монографии Г. Г. Михайличенко [6] доказано, что локально просто транзитивная группа Ли преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$ задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(2,2)$, а локально дважды транзитивная группа Ли преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$ задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(3,2)$. Отметим, что первым множеством является плоскости $\mathbb{R}^2$, а вторым множеством является транзитивно действующая группа Ли G.

В данной работе поставлена задача о нахождении всех локальных дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов плоскости $\mathbb{R}^2$. Эти группы Ли преобразований четырехмерные. Согласно [6] такие группы Ли преобразований задают феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(3,2)$. В данной статье сначала проводятся исследования алгебр Ли таких расширений. Базис алгебр Ли состоит из системы четырёх операторов X_1, X_2, Y_1, Y_2, причем $X_1=\partial_x$, $X_2=\partial_y$ задают базис группы параллельных переносов. Из условия замкнутости коммутаторов $[X_i,Y_j]$, где $i,j=1,2,3$, записываются две системы дифференциальных уравнений на коэффициенты операторов Y_1, Y_2. Матрицы коэффициентов этих систем можно упростить приведением их к жордановым формам. Также доказано, что эти матрицы должны коммутировать между собой, что приводит к существенному упрощению их вида. Затем находятся решения системы этих дифференциальных уравнений, после чего из них выделяются алгебры Ли дважды транзитивных групп Ли преобразований плоскости. В заключение с помощью экспоненциального отображения

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \operatorname{Exp}(tY)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + tY\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (tY)^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}/2! + \dots$$

по базисным операторам алгебр Ли находятся уравнения групп Ли преобразований плоскости. Таких групп Ли преобразований оказалось шесть.

2. Основные определения. Сначала определим локальное действие класса C^2 группы Ли G, причем $\dim G = n$, в пространстве $\mathbb{R}^2$, которое приводим согласно работе [1].

Определение 1. Дифференцируемое класса C^2 отображение $\pi\colon \mathbb{R}^2\times G\to\mathbb{R}^2$ называется *эффективным локальным действием*, если выполнены следующие свойства:

(i) $\pi(a,e)=a$ для всех $a\in W$, где W — область в $\mathbb{R}^2$, $e\in G$ — единица; $\pi(\pi(a,h_1),h_2)=\pi(a,h_1h_2)$ для всех $a\in W$, где $h_1,h_2\in G$;

(ii) $\pi(a,h)=a$ для всех $a\in W$, где $h\in G$, тогда и только тогда, когда $h=e$;

(iii) $\pi_h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ — локальный диффеоморфизм для всякого $h\in G$.

Тройка $(\mathbb{R}^2,G,\pi)$ называется *локальной группой Ли преобразований* многообразия $\mathbb{R}^2$.

Обозначим через L алгебру Ли этой группы преобразований. Базис этой алгебры Ли состоит из операторов

$$Z_i = Z_i^1\partial_x + Z_i^2\partial_y, \tag{2.1}$$

где $i=1,\dots,n$.

Определение 2. Эффективное локальное действие $\pi\colon\mathbb{R}^2\times G\to\mathbb{R}^2$ называется *дважды локально транзитивным*, если дополнительно выполняются свойства:

(iv) $n=4$;

(v) матрица

$$V=\begin{pmatrix} Z_1^1(a) & Z_2^1(a) & Z_1^1(b) & Z_2^1(b) \\ Z_1^2(a) & Z_2^2(a) & Z_1^2(b) & Z_2^2(b) \\ Z_1^3(a) & Z_2^3(a) & Z_1^3(b) & Z_2^3(b) \\ Z_1^4(a) & Z_2^4(a) & Z_1^4(b) & Z_2^4(b) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

составленная из коэффициентов операторов (2.1), невырождена для любых точек некоторых окрестностей $U(a),U(b)\in W$.

Свойства (iv) и (v) равносильны тому, что действие $\pi\times\pi$ в $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ локально просто транзитивно.

Определение 3. Будем говорить, что дважды локально транзитивное действие $\pi\colon \mathbb{R}^2\times G\to\mathbb{R}^2$ является локальным расширением группы параллельных переносов, если базис его алгебры Ли L состоит из операторов

$$X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad Y_i=A_i\partial_x+B_i\partial_y,\quad i=1,2. \tag{2.3}$$

В таком случае в алгебре Ли L выделяется коммутативная двумерная подалгебра J, образованная операторами X_1 и X_3. Произвольный оператор Y является линейной комбинацией базисных операторов.

Теорема 1. *Локальное действие $\pi\colon \mathbb{R}^2\times G\to\mathbb{R}^2$ с операторами алгебры Ли* (2.3) *локально дважды транзитивно тогда и только тогда, когда матрица*

$$K(b)-K(a) \tag{2.4}$$

невырождена, где

$$K=\begin{pmatrix}A_1(x,y) & B_1(x,y)\\ A_2(x,y) & B_2(x,y)\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Матрица (2.2) для действия $\pi\colon \mathbb{R}^2\times G\to\mathbb{R}^2$ с операторами ее алгебры Ли (2.3) принимает следующий вид:

$$V=\begin{pmatrix}E & E\\ K(a) & K(b)\end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица 2×2. Согласно формуле Шура (см. [2, с. 59]) $|V|=|K(b)-K(a)|$. Если действие $\pi\colon \mathbb{R}^2\times G\to\mathbb{R}^2$ дважды локально транзитивно, то $|V|\neq0$ и поэтому $|K(b)-K(a)|\neq0$. Справедливо и обратное. □

Из доказательства этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Локальное действие $\pi\colon \mathbb{R}^2\times G\to\mathbb{R}^2$ с операторами алгебры Ли вида*

$$X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad Y_1=A_1(x,y)\partial_x,\quad Y_2=A_2(x,y)\partial_x \tag{2.6}$$

не является локально дважды транзитивным.

Алгебра Ли обладает важным свойством — замкнутость относительно коммутирований, т.е. коммутаторы $[X_j,Y_k]$, где $j,k=1,2$, принадлежат этой же алгебре Ли. В координатной записи, с учетом (2.3), это свойство приводит к системе дифференциальных уравнений на коэффициенты A_i, B_i:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A_i}{\partial x}=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}a_i^jA_j+g_i^1, & \dfrac{\partial A_i}{\partial y}=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}b_i^jA_j+p_i^1,\\ \dfrac{\partial B_i}{\partial x}=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}a_i^jB_j+g_i^2, & \dfrac{\partial B_i}{\partial y}=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}b_i^jB_j+p_i^2,\end{cases} \tag{2.7}$$

причем $a_i^j,b_i^j,g_i^1,g_i^2,q_i^1,q_i^2,p_i^1,p_i^2=\mathrm{const}$. Введем матричные обозначения:

$$T_1=\begin{pmatrix}a_1^1 & a_1^2\\ a_2^1 & a_2^2\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}b_1^1 & b_1^2\\ b_2^1 & b_2^2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}^j=\begin{pmatrix}g_1^j\\ g_2^j\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}^j=\begin{pmatrix}q_1^j\\ q_2^j\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P^j}=\begin{pmatrix}p_1^j\\ p_2^j\end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.7) в матричном виде принимает простой вид:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_x=T_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{G}^1, & \boldsymbol{A}_y=T_2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}^1,\\ \boldsymbol{B}_x=T_1\boldsymbol{B}+\boldsymbol{G}^2, & \boldsymbol{B}_y=T_2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{P}^2.\end{cases} \tag{2.8}$$

Из свойства независимости частных производных относительно порядка дифференцирования вытекают следующие соотношения:

$$(T_1T_2 - T_2T_1)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}_1, \quad (T_1T_2 - T_2T_1)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}_2, \tag{2.9}$$

где $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_4$ — некоторые постоянные векторы.

Теорема 2. *Подалгебра Ли J алгебры Ли L является идеалом тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{A}_x$, $\boldsymbol{B}_x$, $\boldsymbol{A}_y$, $\boldsymbol{B}_y$ постоянные.*

Доказательство. Пусть сначала J — идеал в L. Заметим, что J является идеалом тогда и только тогда, когда

$$[X_i, Y_k] = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2,$$

причем $\mu_1, \mu_2 = \mathrm{const}$, $i, k = 1, 2$ (см. [7]). Тогда $\boldsymbol{A}_x = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{B}_x = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{A}_y = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{B}_y = \mathrm{const}$.

Предположим противное: пусть производные коэффициентов операторов Y_1 и Y_2 постоянны; тогда коммутаторы $[X_i, Y_k]$ будут линейно выражаться через операторы X_1 и X_2, поэтому J — идеал в L. □

Из доказательства этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие. $T_1 = T_2 = 0$ *тогда и только тогда, когда J — идеал в L.*

Доказательство. Если $T_1 = T_2 = 0$, то из системы (2.8) получаем $\boldsymbol{A}_x = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{B}_x = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{A}_y = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{B}_y = \mathrm{const}$ и поэтому J — идеал в L (теорема 2).

Пусть J — идеал в L. Предположим, для определенности, $T_1 \neq 0$. Тогда, согласно системе (2.8) хотя бы одна из производных $\boldsymbol{A}_x$, $\boldsymbol{B}_x$ не постоянна. Поэтому по теореме 2 получаем, что J не является идеалом в L. Противоречие. □

Теорема 3. *Матрицы коэффициентов системы* (2.8) *взаимно коммутативны, т.е.*

$$T_1T_2 - T_2T_1 = 0.$$

Доказательство. Предположим, что матрицы коэффициентов системы (2.8) не коммутируют, т.е. $T_1T_2 - T_2T_1 \neq 0$. В случае, если $\det(T_1T_2 - T_2T_1) \neq 0$, из системы (2.9) вытекает постоянство векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, т.е. базисные операторы (2.3) линейно зависимы. В случае, если $\det(T_1T_2 - T_2T_1) = 0$, имеем $\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = 0$, значит, операторы (2.3) также линейно зависимы. Полученное противоречие и доказывает теорему. □

Теорема 4. *Для алгебры Ли локально дважды транзитивного действия $\pi\colon \mathbb{R}^2 \times G \to \mathbb{R}^2$ в подходящем базисе матрица T_1 принимает жорданов вид*:

$$(1)\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad (2)\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad (3)\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad (4)\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

причем $\alpha, \beta, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Доказательство. Базис алгебры Ли локально дважды транзитивного действия $\pi\colon \mathbb{R}^2 \times G \to \mathbb{R}^2$ задается операторами (2.3). Перейдем к новому базису

$$X_i' = X_i, \quad Y_i' = \sum_{j=1}^{2} \chi_i^j Y_j,$$

причем матрица коэффициентов $\chi = (\chi_i^j)$ невырождена. Тогда выражения (2.3) принимают вид

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_i' = A_i'\partial_x + B_i'\partial_y,$$

причем

$$\boldsymbol{A'} = \chi \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B'} = \chi \boldsymbol{B}. \tag{2.11}$$

Далее, вычисляя коммутаторы $[X_i, Y'_j]$, учитывая их замкнутость и сравнивая коэффициенты перед ∂_x и ∂_y, получаем векторные уравнения

$$\begin{cases} \boldsymbol{A'}_x = T'_1\boldsymbol{A'} + \boldsymbol{G'}^1, & \boldsymbol{A'}_y = T'_2\boldsymbol{A'} + \boldsymbol{P'}^1, \\ \boldsymbol{B'}_x = T'_1\boldsymbol{B'} + \boldsymbol{G'}^2, & \boldsymbol{B'}_y = T'_2\boldsymbol{B'} + \boldsymbol{P'}^2. \end{cases}$$

В последнюю систему подставляем выражения (2.11) и сравниваем с (2.8), имеем

$$T_1 = \chi^{-1}T'_1\chi, \quad T_2 = \chi^{-1}T'_2\chi.$$

В линейной алгебре доказывается, что подбором невырожденной матрицы χ матрицу T_1 можно привести к жорданову виду (см. [4, с. 482]), т.е. приходим к утверждению теоремы. □

Теорема 5. *Пусть матрица* T_1 *имеет жорданов вид* (2.10)*. Тогда соответствующая ей произвольная коммутативная матрица* T *принимает следующий вид*:

$$(1)\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}; \quad (2)\ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}; \quad (3)\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}; \quad (4)\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Доказательство этой теоремы сводится к вычислению матричных коммутаторов и приравниванию их к нулевой матрице: $T_1T - TT_1 = 0$. Проиллюстрируем этот алгоритм для третьего случая, т.е. когда матрица T_1 имеет вид (2.10)(3) и

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем

$$T_1T - TT_1 = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 - a_1 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ясно, что $a_3 = 0$, $a_4 = a_1$. В результате матрица T принимает вид (2.12)(3). □

Теоремы 3, 4 и 5 дают существенные ограничения на матрицу коэффициентов T_2 из системы (2.8).

Теорема 6. *Возможны только следующие неупорядоченные пары матриц* T_1 *и* T_2:

$$(1)\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}; \quad (2)\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}; \quad (3)\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ -\lambda_3 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ -\mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где $\lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0$.

Схема доказательства. Пусть первая матрица T_1 принимает любой вид из системы (2.10). Далее, применяя теорему 3, получаем допустимый вид второй матрицы T_2. Применяя теорему 5, получаем допустимый вид матрицы преобразования χ. Затем упрощаем вторую матрицу с помощью найденной матрицы преобразования: $\chi^{-1}T_2\chi$.

Продемонстрируем эту схему на следующем примере. Пусть

$$T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно теореме 4 имеем

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad \det\chi \neq 0.$$

Упрощая матрицу T_2 $(\chi^{-1}T_2\chi)$, получаем результаты:

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

В остальных случаях доказательство аналогично. □

3. Случай разложимой алгебры Ли L. Здесь рассматривается случай $T_1 = T_2 = 0$.

Теорема 7. *Решение системы дифференциальных уравнений* (2.8) *с нулевыми матрицами* T_1 *и* T_2 *в подходящем базисе принимает следующий вид*:

$$\boldsymbol{A} = (g_1^1 x + p_1^1 y + c_1^1)\boldsymbol{\xi} + (g_2^1 x + p_2^1 y + c_2^1)\boldsymbol{\eta}$$
$$\boldsymbol{B} = (g_1^2 x + p_1^2 y + c_1^2)\boldsymbol{\xi} + (g_2^2 x + p_2^2 y + c_2^2)\boldsymbol{\eta},$$

где $g_j^i, p_j^i, c_j^i = \mathrm{const}$, $i, j = 1, 2$, $\boldsymbol{\xi} = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{\eta} = (0, 1)^T$.

Доказательство очевидно. □

По найденным решениям запишем базисные операторы (2.3) *шестимерных линейных пространств*, при этом операторы Y_1 и Y_2 комбинируем с операторами X_1 и X_2 так, чтобы исчезли свободные члены:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \qquad Y_1 = (g_1^1 x + p_1^1 y)\partial_x + (g_1^2 x + p_1^2 y)\partial_y, \\ X_2 &= \partial_y, \qquad Y_2 = (g_2^1 x + p_2^1 y)\partial_x + (g_2^2 x + p_2^2 y)\partial_y. \end{aligned} \tag{3.1}$$

В матричном виде операторы Y_1 и Y_2 записываются так:

$$Y_1 = \left\langle U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Y_2 = \left\langle V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{3.2}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} g_1^1 & p_1^1 \\ g_1^2 & p_1^2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} g_2^1 & p_2^1 \\ g_2^2 & p_2^2 \end{pmatrix}$$

— матрицы коэффициентов, а $\langle , \rangle$ — скалярное произведение векторов. Несложно вычислить коммутатор этих операторов:

$$[Y_1, Y_2] = \left\langle (VU - UV) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle = -\left\langle [U, V] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Таким образом, вычисление коммутаторов операторов Y_1 и Y_2 сводится к вычислению коммутаторов матриц U и V коэффициентов этих операторов.

Далее выясним, при каких условиях на коэффициенты в операторах (3.1) они становятся базисными операторами четырехмерных алгебр Ли. Очевидно, что алгебра Ли $L = J \oplus I$ *разложима*, так как является прямой суммой коммутативного двумерного идеала J, образованного операторами X_1 и X_2 и двумерной подалгебры Ли I, образованной операторами Y_1 и Y_2. Следуя классификации абстрактных двумерных вещественных алгебр Ли, приводим полный список (с точностью до изоморфизма) подалгебр Ли I:

$$[Y_1, Y_2] = 0; \tag{3.3}$$
$$[Y_1, Y_2] = Y_1. \tag{3.4}$$

Теорема 8. *Для локально дважды транзитивной группы Ли преобразований с разложимой алгеброй Ли* $L = J \oplus I$, *базис которой задается операторами* (3.1), *матрица* K *невырождена.*

Доказательство. Согласно теореме 1 матрица, составленная по коэффициентам операторов (3.1), невырождена; значит,

$$\begin{vmatrix} E & E \\ K(1) & K(2) \end{vmatrix} = |K(2) - K(1)| \neq 0,$$

где

$$K = \begin{pmatrix} g_1^1 x + p_1^1 y & g_1^2 x + p_1^2 y \\ g_2^1 x + p_2^1 y & g_2^2 x + p_2^2 y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица

$$K(2) - K(1) = \begin{pmatrix} g_1^1 x_{12} + p_1^1 y_{12} & g_1^2 x_{12} + p_1^2 y_{12} \\ g_2^1 x_{12} + p_2^1 y_{12} & g_2^2 x_{12} + p_2^2 y_{12} \end{pmatrix},$$

где $x_{12} = x_2 - x_1$, $y_{12} = y_2 - y_1$, невырождена. Точки $1 = (x_1, y_1)$ и $2 = (x_2, y_2)$ выбираются произвольно, поэтому матрица K *невырождена.* □

Необходимо из линейных пространств с базисными операторами (3.1) выделить алгебры Ли. Для этого пользуемся возможностью перехода к новому базису, заменой координат (следствие локальной изотопии действий), тождеством Якоби, а также замкнутостью коммутаторов

$$[X_i, X_j], \quad [X_i, Y_j], \quad [Y_i, Y_j], \quad i, j = 1, 2.$$

Последнее означает, что сам коммутатор должен принадлежать алгебре Ли (см. [7, § 13]). Также учитывается теорема 8.

Теорема 9. *Из системы* (3.1), *с точностью до линейной замены координат и перехода к новому базису, выделяются операторы, образующие базисы четырехмерных алгебр Ли локально дважды транзитивных групп Ли преобразований плоскости* $\mathbb{R}^2$, *являющихся расширением группы параллельных переносов*:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x, \qquad\quad Y_2 = y\partial_y, \tag{3.5}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x, \tag{3.6}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x - x\partial_y \tag{3.7}$$

для алгебры Ли (3.3);

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = bx\partial_x + (b+1)y\partial_y, \tag{3.8}$$

для алгебры Ли (3.4); *здесь* $b = \mathrm{const}$.

Доказательство. В операторах (3.1) произведем линейную замену координат:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}^T = A \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T,$$

причем матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

произвольная и невырожденная. Тогда для операторов дифференцирования относительно старых и новых координат получим связь

$$\begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix}^T = A^T \begin{pmatrix} \partial_{x'} & \partial_{y'} \end{pmatrix}^T.$$

В новых координатах операторы X_1, X_2, Y_1 и Y_2 принимают вид:

$$X_1 = a_{11}\partial_{x'} + a_{21}\partial_{y'}, \quad Y_1 = \left\langle AUA^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$X_2 = a_{12}\partial_{x'} + a_{22}\partial_{y'}; \quad Y_2 = \left\langle AVA^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Линейной комбинацией от операторов X_1, X_2 в новом базисе переходим к операторам $X_1' = \partial_{x'}$, $X_2' = \partial_{y'}$. Тогда, возвращаясь к прежним обозначениям координат и базисных операторов, получим:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = \left\langle U'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Y_2 = \left\langle V'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где введены обозначения

$$U' = AUA^{-1}, \quad V' = AVA^{-1}, \tag{3.9}$$

причем A — произвольная невырожденная матрица. В линейной алгебре доказывается, что тогда матрица U' приводится к жордановой форме (см. [4, с. 482]):

$$U' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

где $a, a_2 \neq 0$, $a_1 \neq a_3$.

В таком случае оператор Y_1 принимает одно из следующих выражений:

$$\begin{aligned} &Y_1 = ax\partial_x + ay\partial_y, && Y_1 = a_1x\partial_x + a_3y\partial_y, \\ &Y_1 = (a_1x + y)\partial_x + a_1y\partial_y, && Y_1 = (a_1x + a_2y)\partial_x + (-a_2x + a_1y)\partial_y. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Очевидно, матрица
$$U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
коммутирует с любой матрицей, поэтому матрицу V можно, как и выше, привести к жордановой форме:
$$V' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix},$$
где $b, b_2 \neq 0$, $b_1 \neq b_3$. Тогда, если оператор Y_1 имеет первый вид из системы (3.10), то для оператора Y_2 будем иметь
$$\begin{gathered} Y_2 = b_1 x\partial_x + b_3 y\partial_y, \quad Y_2 = (b_1 x + y)\partial_x + b_1 y\partial_y, \\ Y_2 = (b_1 x + b_2 y)\partial_x + (-b_2 x + b_1 y)\partial_y; \end{gathered} \tag{3.11}$$
в противном случае
$$Y_2 = (b_1 x + b_2 y)\partial_x + (b_3 x + b_4 y)\partial_y.$$

I. Пусть сначала операторы Y_1 и Y_2 образуют базис коммутативной алгебры Ли (3.3). Подставляя найденные выше операторы в коммутатор $[Y_1, Y_2] = 0$, получаем системы базисных операторов коммутативных алгебр Ли:
$$Y_1 = ax\partial_x + ay\partial_y, \qquad Y_2 = b_1 x\partial_x + b_3 y\partial_y, \tag{3.12}$$
$$Y_1 = ax\partial_x + ay\partial_y, \qquad Y_2 = (b_1 x + y)\partial_x + b_1 y\partial_y, \tag{3.13}$$
$$Y_1 = ax\partial_x + ay\partial_y, \qquad Y_2 = (b_1 x + b_2 y)\partial_x + (-b_2 x + b_1 y)\partial_y, \tag{3.14}$$
$$Y_1 = a_1 x\partial_x + a_3 y\partial_y, \qquad Y_2 = b_1 x\partial_x + b_4 y\partial_y, \tag{3.15}$$
$$Y_1 = (a_1 x + y)\partial_x + a_1 y\partial_y, \qquad Y_2 = (b_1 x + b_2 y)\partial_x + b_1 y\partial_y, \tag{3.16}$$
$$Y_1 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (-a_2 x + a_1 y)\partial_y, \qquad Y_2 = (b_1 x + b_2 y)\partial_x + (-b_2 x + b_1 y)\partial_y. \tag{3.17}$$

II Пусть Y_1 и Y_2 образуют базис некоммутативной алгебры Ли (3.4). Подставляя найденные выше операторы в коммутатор $[Y_1, Y_2] = Y_1$, получаем системы базисных операторов алгебр Ли:
$$Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = (b_1 x + b_2 y)\partial_x + (b_1 y + y)\partial_y. \tag{3.18}$$

Далее в полученных алгебрах Ли (I: (3.12)—(3.17), II: (3.18)) переходим к подходящему базису и вводим удобную линейную систему координат, проверяем тождество Якоби, а также применяем теорему 3, т.е. в каждом из полученных случаев исследуем на невырожденность матрицу K, составленную из коэффициентов операторов Y_1 и Y_2. В результате получаем алгебры Ли с базисными операторами (3.5)—(3.8).

Теорема 9 доказана полностью. □

4. Случай неразложимой алгебры Ли L. Здесь рассматривается случай, когда матрица T_1 и T_2 из теоремы 6 одновременно ненулевые.

Теорема 10. *Система* (2.8) *при условии одновременного отличия от нуля матриц T_1 и T_2 будет иметь решения:*
$$\begin{cases} A_1 = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + a_1, \\ A_2 = c_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + a_2, \\ B_1 = d_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + b_1, \\ B_2 = d_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + b_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = a_1 x + a_2 y + c_1, \\ A_2 = c_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + a_3, \\ B_1 = b_1 x + b_2 y + d_1, \\ B_2 = d_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + b_3; \end{cases}$$
$$\begin{cases} A_1 = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + a_3, \\ A_2 = a_1 x + a_2 y + c_2, \\ B_1 = d_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + b_3, \\ B_2 = b_1 x + b_2 y + d_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = (c_1 + c_2(\lambda_3 x + \mu_3 y))e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + a_1, \\ A_2 = c_2 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + a_2, \\ B_1 = (d_1 + d_2(\lambda_3 x + \mu_3 y))e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + b_1, \\ B_2 = d_2 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + b_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = (\lambda_3 x + \mu_3 y)(a_1 x + a_2 y)/2 + a_3 x + a_4 y + c_1, \\ A_2 = a_1 x + a_2 y + c_2, \\ B_1 = (\lambda_3 x + \mu_3 y)(b_1 x + b_2 y)/2 + b_3 x + b_4 y + d_1, \\ B_2 = b_1 x + b_2 y + d_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y + c_2) + a_1, \\ A_2 = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y + c_2) + a_2, \\ B_1 = d_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y + d_2) + a_1, \\ B_2 = d_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y + d_2) + a_2, \end{cases}$$

где c_1, c_2, d_1, d_2 — произвольные постоянные интегрирования, а a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 — постоянные, выражаемые через коэффициенты исходной системы, причем

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 \neq 0, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0.$$

По найденным решениям записываем базисные операторы (2.3) четырехмерных линейных пространств, при этом операторы Y_1 и Y_2 комбинируем с операторами X_1 и X_2 так, чтобы исчезли свободные члены:

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \qquad Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_1 \partial_x + d_1 \partial_y), \\ X_2 = \partial_y, \qquad Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y}(c_2 \partial_x + d_2 \partial_y); \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \qquad Y_1 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, \qquad Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y}(c_2 \partial_x + d_2 \partial_y); \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \qquad Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_1 \partial_x + d_1 \partial_y), \\ X_2 = \partial_y, \qquad Y_2 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y; \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \qquad Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}((c_1 + c_2(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_x + (d_1 + d_2(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_y); \\ X_2 = \partial_y, \qquad Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_2 \partial_x + d_2 \partial_y), \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \qquad Y_1 = ((\lambda_3 x + \mu_3 y)(a_1 x + a_2 y)/2 + a_3 x + a_4 y)\partial_x + \\ \qquad\qquad\qquad + ((\lambda_3 x + \mu_3 y)(b_1 x + b_2 y)/2 + b_3 x + b_4 y)\partial_y; \\ X_2 = \partial_y, \qquad Y_2 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \qquad Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_1 \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y) + c_2 \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_x + \\ \qquad\qquad\qquad + e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(d_1 \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y) + d_2 \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, \qquad Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_1 \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y) - c_2 \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_x + \\ \qquad\qquad\qquad + e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(d_1 \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y) - d_2 \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_y, \end{cases} \tag{4.6}$$

где

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 \neq 0, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0.$$

Из теоремы 1 следует, что в системах (4.1)—(4.4), (4.6) матрица

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

невырождена, поэтому вводим линейную замену координат так, чтобы

$$c_1 \partial_x + d_1 \partial_y = \partial_{x'}, \quad c_2 \partial_x + d_2 \partial_y = \partial_{y'}.$$

В системе (4.5) с точностью до переобозначения переменных можно считать $\lambda_3 \neq 0$, поэтому вводим замену координат $x' = \lambda_3 x + \mu_3 y$, $y' = y$. Затем комбинируем операторы X_1 и X_2, после чего возвращаемся к прежним обозначениям координат, операторов и постоянных (в новых обозначениях неравенства на коэффициенты сохраняются):

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\partial_x, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y}\partial_y; \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y}\partial_y; \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\partial_x, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y; \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\partial_x + (\lambda_3 x + \mu_3 y)e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\partial_y; \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_2 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_1 = ((a_1 x^2 + a_2 xy)/2 + a_3 x + a_4 y)\partial_x + ((b_1 x^2 + b_2 xy)/2 + b_3 x + b_4 y)\partial_y; \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\sin(\lambda_3 x + \mu_3 y)\partial_x + e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\cos(\lambda_3 x + \mu_3 y)\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\cos(\lambda_3 x + \mu_3 y)\partial_x - e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\sin(\lambda_3 x + \mu_3 y)\partial_y, \end{cases} \tag{4.12}$$

где

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 \neq 0, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0.$$

Далее воспользуемся условием замкнутости коммутаторов $[X_2, Y_1]$, $[X_1, Y_1]$, $[Y_1, Y_2]$. В результате получим следующие алгебры Ли, которые запишем с точностью до переобозначения координат:

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x}\partial_x, & \mu_2 \neq 0, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\mu_2 y}\partial_y, & \lambda_1 \neq 0; \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}\partial_x, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{-\lambda_1 x - \mu_1 y}\partial_y, \end{cases} \quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0; \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = \dfrac{a_1}{\mu_2}x(\mu_2\partial_x - \lambda_2\partial_y), \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y}\partial_y, \end{cases} \quad \mu_2 \neq 0; \tag{4.15}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x}\partial_x + (\lambda_3 x + \lambda_1 y)e^{\lambda_1 x}\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x}\partial_y, \end{cases} \quad \lambda_1 \neq 0; \tag{4.16}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = (a_3 x + a_4 y)\partial_x + (b_1 x^2/2 + b_3 x + b_4 y)\partial_y; \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = b_1 x\partial_y, \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = (a_1 x^2/2 + a_3 x + a_4 y)\partial_x + (b_1 x^2/2 + b_3 x + b_4 y)\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = a_1 x\partial_x + b_1 x\partial_y, \end{cases} \quad a_1 \neq 0; \tag{4.18}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y)\partial_x + \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y)\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y)\partial_x - \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y)\partial_y, \end{cases} \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0; \tag{4.19}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}[\sin(\mu_1 x - \lambda_1 y)\partial_x + \cos(\mu_1 x - \lambda_1 y)\partial_y], \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}[\cos(\mu_1 x - \lambda_1 y)\partial_x - \sin(\mu_1 x - \lambda_1 y)\partial_y], \end{cases} \quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0. \tag{4.20}$$

В системах (4.13)—(4.20) вводим следующие линейные замены координат:

(i) в (4.13): $x' = \lambda_1 x$, $y' = \mu_2 y$;
(ii) в (4.14): $x' = x$, $y' = \mu_1 y$ при $\lambda_1 = 0$; $x' = \lambda_1 x + \mu_1 y$, $y' = y$ при $\lambda_1 \neq 0$;
(iii) в (4.15): $x' = x$, $y' = \lambda_2 x + \mu_2 y$;
(iv) в (4.16): $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_3 x + \lambda_1 y$;
(v) в (4.18): $\partial_{x'} = a_1\partial_x + b_1\partial_y$, $\partial_{y'} = \partial_y$;

(vi) в (4.19): $x' = \lambda_3 x$, $y' = \lambda_3 y$ при $\mu_3 = 0$; $x' = -\lambda_3 x + \mu_3 y$, $y' = \mu_3 x + \lambda_3 y$ при $\mu_3 \neq 0$;
(vii) в (4.20): $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_1 y$ при $\mu_1 = 0$; $x' = -\lambda_1 x + \mu_1 y$, $y' = \mu_1 x + \lambda_1 y$ при $\mu_1 \neq 0$.

Затем линейно комбинируем операторы, возвращаемся к прежним обозначениям координат и операторов, а также проверяем коммутационные соотношения. В результате получаем:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^x\partial_x, \quad Y_2 = e^y\partial_y; \tag{4.21}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y\partial_x, \quad Y_2 = e^{-y}\partial_y; \tag{4.22}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^x\partial_x, \quad Y_2 = e^{-x}(a\partial_x + \partial_y); \tag{4.23}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = e^y\partial_y; \tag{4.24}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^x\partial_x + ye^x\partial_y, \quad Y_2 = e^x\partial_y; \tag{4.25}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_2 = x\partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + (x^2 + ry)\partial_y; \tag{4.26}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_2 = x\partial_x, \quad Y_1 = x^2\partial_x + x\partial_y; \tag{4.27}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \quad Y_2 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \tag{4.28}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y[\sin x\partial_x + \cos x\partial_y], \quad Y_2 = e^y[\cos x\partial_x - \sin x\partial_y]. \tag{4.29}$$

Далее в системах (4.21)—(4.29) вводим подходящие нелинейные замены координат, после чего линейно комбинируем базисные операторы и переходим к прежним обозначениям координат и операторов. В результате получаем:

(i) в (4.21) замена координат $x' = e^{-x}$, $y' = e^{-y}$ приводит к (3.5);
(ii) в (4.22) замена координат $x' = x$, $y' = e^y$ дает (3.8) при $b = 0$;
(iii) в (4.23) при $a \neq 0$ замена координат $x' = e^{-x}$, $y' = ay$ дает (4.27), а при $a = 0$ замена координат $x' = y$, $y' = -x$ приводит к (4.22);
(iv) в (4.24) замена координат $x' = x$, $y' = e^{-y}$ приводит к (3.5);
(v) в (4.25) замена координат $x' = e^{-x}$, $y' = ye^{-x}$ и последующее их переобозначение приводит к (3.6);
(vi) в (4.27) замена координат $x' = e^{-x}$, $y' = ye^{-x}$ и последующее их переобозначение приводит к представлению базиса в виде:
$$X_1 = x\partial_x, \quad X_2 = y\partial_y, \quad Y_1 = x\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x; \tag{4.30}$$
(vii) в (4.28) замена координат
$$x = \operatorname{arctg}\frac{2x'}{1 - x'^2} / \ln\frac{y'^2}{1 + x'^2}, \quad y = 1/\ln\frac{y'^2}{1 + x'^2}$$
приводит к (3.7), и, наконец, в (4.29) замена координат $x' = e^{-y}\sin x$, $y' = e^{-y}\cos x$ приводит к (3.7) (см. [5]).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 11. *Существует всего шесть четырехмерных алгебр Ли локально дважды транзитивных групп Ли преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$, являющихся расширением группы параллельных переносов. С точностью до замены координат и перехода к новому базису имеем базисные операторы этих алгебр Ли*: (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (4.26) *и* (4.30).

5. Вычисления локально дважды транзитивных действий. Далее к найденным операторам применим экспоненциальное отображение
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \operatorname{Exp}(tY)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + tY\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (tY)^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}/2! + \ldots \tag{5.1}$$

Применяя это отображение с базисным операторам алгебр Ли групп преобразований из теоремы 10, находим однопараметрические группы Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^2$. Затем вычисляя композицию этих однопараметрических подгрупп, записываем явные выражения уравнений такого действия.

Теорема 12. *Локальные группы Ли преобразований трехмерного пространства* $\mathbb{R}^3$ *с операторами ее алгебр Ли из теоремы 10, задающие локально дважды транзитивные действия, в подходящих обозначениях параметров и координат принимают соответственно следующий вид:*

$$x' = a_1x + a_3, \qquad y' = a_2y + a_4, \tag{5.2}$$

$$x' = a_1x + a_2y + a_3, \quad y' = a_1y + a_4, \tag{5.3}$$

$$x' = a_1x + a_2y + a_3, \quad y' = -a_2x + a_1y + a_4, \tag{5.4}$$

$$x' = a_1^b x + a_2y + a_3, \quad y' = a_1^{b+1}y + a_4, \tag{5.5}$$

$$x' = a_1x + a_3, \qquad y' = a_2x + a_1^r y + x^2\frac{a_1^r - a_1^2}{r-2} + a_4, \tag{5.6}$$

$$x' = a_1x + a_2y, \qquad y' = a_3x + a_4y. \tag{5.7}$$

Доказательство теоремы сводится к применению экспоненциального отображения (3.2) к базисным операторам алгебры Ли и дальнейшему вычислению композиции получаемых действий. Продемонстрируем эту процедуру на примере вычисления группы преобразований (5.6). Применяя к базисным операторам (4.26) экспоненциальное отображение (3.2), в результате получаем однопараметрические подгруппы:

$$\begin{aligned}
&x' = x + t_1, && y' = y;\\
&x' = x, && y' = y + t_2;\\
&x' = x, && y' = y + t_3x;\\
&x' = xe^{t_4}, && y' = ye^{rt_4} + x^2\frac{e^{rt_4} - e^{2t_4}}{r-2}.
\end{aligned}$$

Далее вычисляем композицию этих однопараметрических подгрупп:

$$x' = xe^{t_4} + t_1, \quad y' = ye^{t_4} + ye^{rt_4} + x^2\frac{e^{rt_4} - e^{2t_4}}{r-2} + xt_3e^{t_4} + t_2.$$

Введя упрощающие обозначения для параметров: $a_1 = e^{t_4}$, $a_2 = t_3e^{t_4}$, $a_3 = t_1$, $a_4 = t_2$, получаем выражения (5.6). Аналогично находятся и остальные локально дважды транзитивные действия из списка (5.2)—(5.7). □

Благодарность. В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую признательность профессору Геннадию Григорьевичу Михайличенко за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.
3. *Горбацевич В. В.* О расширении транзитивных действий групп Ли// Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — *81*, № 6. — С. 86–99.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
5. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(2,2)$ в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(3,2)$// Вестн. Удмуртск. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2018. — *28*, № 3. — С. 305–327.
6. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур. — Барнаул: Барнаул. гос. пед. ун-т, 2003.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет
E-mail: kyrovVA@yandex.ru