ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 81–94
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-81-94

УДК 517.9; 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. II. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К n-МЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Статья является второй частью работы об интегрируемости общих классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям. Первая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении к гладкому n-мерному многообразию// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — Т. 214. — С. 82–106.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF SMOOTH FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLDS. II. EQUATIONS OF MOTION ON THE TANGENT BUNDLE OF AN n-DIMENSIONAL MANIFOLD IN A POTENTIAL FORCE FIELD

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is the second part of the work on the integrability of general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on the tangent bundles of n-dimensional manifolds. The first part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of smooth finite-dimensional manifolds. I. Equations of geodesics on the tangent bundle of a smooth n-dimensional manifold// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **214** (2022), pp. 82–106.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

 © ВИНИТИ РАН, 2022

2. Уравнения движения на касательном расслоении к n-мерному многообразию в потенциальном силовом поле

2.1. Приведенная система. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (**??**) (случай I). Уравнения (**??**) примут вид (**??**). Уравнения геодезических (**??**) после соответствующего выбора кинематических соотношений (**??**) почти всюду эквивалентны составной системе (**??**), (**??**) на многообразии $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ (более общие утверждения см. в [7, 8, 41, 46, 70]).

В общем случае кинематические соотношения (**??**) (с $n(n-1)/2$ «произвольными» функциями $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots, i_1(\beta_{n-2})$ не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до $n^2(n+1)/2$ различных коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Несколько модифицировав систему (**??**), (**??**), получим систему *консервативную*. В отличие от системы (**??**)) наличие силового поля характеризуется гладким коэффициентом $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (2.1). В данном случае вводится внешнее гладкое силовое поле $\tilde{F}(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = (0, \ldots, 0, F(\alpha))$, направленное вдоль оси $\dot{z}_n$.

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\dot{\alpha} = -z_n, \tag{2.1a}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_n = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 + \ldots +\\ + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{2.1b}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{n-1} = \Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots -\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{2.1c}$$

....

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 = \Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1} - \ldots -\\ - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3 -\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{2.1d}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 = \Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1} -\\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2} - \ldots -\\ - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2,\end{aligned} \tag{2.1e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{2.1f}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{2.1g}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{2.1h}$$

.................................,

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{2.1i}$$

Система (2.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{2.2a}$$

$$\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{2.2b}$$

$$\ddot\beta_2+2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2+\ldots+\Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0, \tag{2.2c}$$

$$\ddot\beta_3+2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3+2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3+2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3+ \\ +\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2+\ldots+\Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0, \tag{2.2d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ddot\beta_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}+\ldots+ \\ +\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0, \tag{2.2e}$$

$$\ddot\beta_{n-1}+2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1}+2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}+\ldots+\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}=0. \tag{2.2f}$$

2.2. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай I.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (**??**), *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1)=z_1^2+\ldots+z_n^2+V(\alpha)=C_1=\mathrm{const},\quad V(\alpha)=2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F(a)da. \tag{2.3}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (2.3) в силу системы (2.1) дает

$$2F(\alpha)z_n+2\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\Big]z_{n-1}^2z_n+\ldots+$$
$$+2\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Big]z_1^2z_n+$$
$$-2\left[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\Big]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_{n-2}^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\ldots-$$
$$-2\left[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]+\right.$$
$$\left.+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\ldots-$$
$$-2\left[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]+\right.$$
$$\left.+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right]\times$$
$$\times\frac{z_1^2z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})}-2F(\alpha)z_n\equiv 0,$$

поскольку выполнена система $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств (**??**). □

Предложение 2.2. *Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.1) при условиях предложения **??** дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.1) при условиях предложения **??** дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_{n-1}f(\alpha)\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает предложение. □

В дальнейшем также было бы логично доказать аналогичное предложение и по условиям существования гладкого первого интеграла вида

$$\Phi_4(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)=C_4=\mathrm{const},$$

получив предложение с номером 2.3+1 и т. д. Но мы по предположению индукции опустим некоторое конечное число таких шагов, изменив номер следующего предложения на лишь единицу, получив предложение 2.4. Поэтому далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.1) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1z_n\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+z_1z_{n-1}f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\ldots+$$
$$+z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\ldots r(\beta_{n-3})\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-3}(\beta_{n-3})\times$$
$$\times\left[(-1)^n\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+\frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})+(-1)^{n+1}\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}=\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+\frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 2.1. Если выполнена группа $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств (**??**), а также $n-1$ групп условий (**??**), (**??**), ..., (**??**), то выполнены равенства

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{11}(\alpha),\quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \ldots,$$
$$\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),$$
$$\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\quad \ldots,$$
$$\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2});$$

следовательно, в системе (2.1) появляется независимая подсистема порядка $2n-1$, состоящая из первых $2n-1$ уравнений (уравнение для $\dot\beta_{n-1}$ отделяется):

$$\dot\alpha=-z_n, \tag{2.4a}$$

$$\dot z_n=F(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_{n-1}^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2+\ldots+ \\ +f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2, \tag{2.4b}$$

$$\dot z_{n-1}=\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_{n-2}^2-\ldots- \\ -\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2, \tag{2.4c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot z_2=\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n-f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1}-\ldots- \\ -f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})+Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3- \\ -\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2, \tag{2.4d}$$

$$\dot z_1=\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n-f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1}- \\ -f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma_3(\beta_2)+Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2}-\ldots- \\ -f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2, \tag{2.4e}$$

$$\dot\beta_1=z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{2.4f}$$

$$\dot\beta_2=z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{2.4g}$$

$$\dot\beta_3=z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{2.4h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot\beta_{n-2}=z_2f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{2.4i}$$

$$\dot\beta_{n-1}=z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{2.5}$$

Предложение 2.5. *Если выполнены условия предложений* 2.2, 2.3, ..., 2.4, *то система* (2.4), (2.5) *имеет первый интеграл вида* (**??**), *где после взятия интеграла вместо постоянных* C_{n-1}, C_n *можно формально подставить левые части соответствующих первых интегралов.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 2.2, 2.3, ..., 2.4, то, система (2.4), (2.5) обладает первыми интегралами (**??**), (**??**), ..., (**??**), количество которых равно $n-1$. Нам понадобятся лишь два последних первых интеграла. Рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n соответствующих первых интегралов. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{2.6}$$

Угол β_{n-1} будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.4), (2.5):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2}i(\beta_{n-2}).$$

Используя в этом уравнении равенство (2.6), получим требуемое утверждение. □

Прямым следствием предложений 2.1, …, 2.5 является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия предложений* 2.1, …, 2.4, *то система* (2.4), (2.5) *обладает полным набором независимых первых интегралов вида* (2.3), (**??**), (**??**), …, (**??**), (**??**), *количество которых равно* $n+1$.

Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет доказан ниже.

2.3. Приведенная система. Случай II. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (**??**) (случай II). Уравнения (**??**) примут вид (**??**). Уравнения геодезических (**??**) после соответствующего выбора кинематических соотношений (**??**) почти всюду эквивалентны составной системе (**??**), (**??**) на многообразии $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ (более общие утверждения см. в [54, 56, 60, 72]).

В общем случае кинематические соотношения (**??**) (с $n(n-1)/2+1$ «произвольными» функциями $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до $n^2(n+1)/2+1$ различных коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Несколько модифицировав систему (**??**), (**??**), получим систему *консервативную.* Именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле (в отличие от системы (**??**))

$$\tilde{F}(z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}) \\ F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) \\ \vdots \\ F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_n(\alpha)f_n(\alpha) \end{pmatrix}$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет следующий вид:

$$\dot\alpha = z_nf_n(\alpha), \tag{2.7a}$$

$$\begin{aligned}\dot z_n = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f_n(\alpha)\Big[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)\Big]z_n^2 - \\ - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - \\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{2.7b}$$

$$\begin{aligned}\dot z_{n-1} = F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - \\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{2.7c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}\dot z_2 = {} & F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})- \\ & - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)+Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n- \\ & - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)+Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1}-\ldots- \\ & - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)+Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3- \\ & - \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r^2_2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{2.7d}$$

$$\begin{aligned}\dot z_1 = {} & F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2})- \\ & - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n- \\ & - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1}- \\ & - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta)+Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2}-\ldots- \\ & - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2,\end{aligned} \tag{2.7e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{2.7f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{2.7g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{2.7h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{2.7i}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{2.7j}$$

Система (2.7) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - F_n(\alpha)f_n^2(\alpha)+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\ldots+\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0, \tag{2.8a}$$

$$\ddot\beta_1 - F_{n-1}(\beta_1)f_1^2(\alpha)+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\ldots+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0, \tag{2.8b}$$

$$\begin{aligned}\ddot\beta_2 - {} & F_{n-2}(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2+ \\ & +\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2+\ldots+\Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,\end{aligned} \tag{2.8c}$$

$$\begin{aligned}\ddot\beta_3 - {} & F_{n-3}(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h_1^2(\beta_2)+2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3+2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3+2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3+ \\ & +\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2+\ldots+\Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,\end{aligned} \tag{2.8d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\begin{aligned}\ddot\beta_{n-2} - {} & F_2(\beta_{n-2})f^2_{n-2}(\alpha)g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})+ \\ & +2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}+\ldots+ \\ & +\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,\end{aligned} \tag{2.8e}$$

$$\begin{aligned}\ddot\beta_{n-1} - {} & F_1(\beta_{n-1})f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})+2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1}+ \\ & +2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}+\ldots+\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}=0.\end{aligned} \tag{2.8f}$$

2.4. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай II.

Предложение 2.6. *Если всюду на области определения справедлива система* $n(n-1)/2+1$ *дифференциальных равенств* (**??**), *то система* (2.7) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = z_1^2+\ldots+z_n^2+V(\alpha,\beta)=C_1=\mathrm{const}, \tag{2.9}$$

$$V(\alpha,\beta)=V_n(\alpha)+\sum_{k=1}^{n-1}V_{n-k}(\beta_k)=-2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F_n(a)da-2\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\beta_{k,0}}^{\beta_k}F_{n-k}(b)db.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (2.9) в силу системы (2.7) дает

$$\begin{gathered}
2z_nF_n(\alpha)f_n(\alpha)+2z_{n-1}F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)+2z_{n-2}F_{n-2}(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)+\\
+2z_{n-3}F_{n-3}(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2)+\ldots+2z_2F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})+\\
+2z_1F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2})-2f_n(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_n(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_n^3-\\
-2\left[f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_{n-1}^2z_n}{f_n(\alpha)}-\ldots-\\
-2\Bigg[f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\right]+\\
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2z_n}{f_n(\alpha)}-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_{n-2}^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\ldots-\\
-2\Bigg[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\right]+\\
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\ldots-\\
-2\Bigg[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]+\\
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\times\\
\times\frac{z_1^2z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})}-\\
-2z_nF_n(\alpha)f_n(\alpha)-2z_{n-1}F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)-2z_{n-2}F_{n-2}(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)-\\
-2z_{n-3}F_{n-3}(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2)-\ldots-\\
-2z_2F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})-\\
-2z_1F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2})\equiv 0,
\end{gathered}$$

поскольку выполнена система $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств (**??**). □

Следующие утверждения справедливы в более общем виде, но мы ограничимся следующими.

Предложение 2.7. *Пусть $F_{n-k}(\beta_k)\equiv 0$, $k=1,\ldots,n-1$. Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.7) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.7) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 2.8. *Пусть* $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 2, \ldots, n-1$. *Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.7) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.7) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_n\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\,\Psi_1(\beta_1) -$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\} z_{n-1}f(\alpha)\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает предложение. □

В дальнейшем было бы логично доказать аналогичное предложение и по условиям существования гладкого первого интеграла вида

$$\Phi_4(z_{n-3}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const},$$

получив предложение с номером 2.8+1 и т. д. Но мы по предположению индукции опустим некоторое конечное число таких шагов, изменив номер следующего предложения на лишь единицу и получим предложение 2.9. Поэтому далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.9. *Пусть* $F_1(\beta_{n-1}) \equiv 0$. *Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.7) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.7) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_n(\alpha)z_1z_n\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right] +$$
$$+ z_1z_{n-1}f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) + \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right] +$$
$$\ldots + z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\ldots r(\beta_{n-3})\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-3}(\beta_{n-3})\times$$
$$\times\left[(-1)^n\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) + (-1)^{n+1}\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} = \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 2.2. Пусть $F_1(\beta_{n-1}) \equiv F_1^0 = \mathrm{const}$. Если выполнена группа $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств (??), а также $n-1$ групп условий (??), (??), ..., (??), то выполнены равенства

$$\begin{gathered}
\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha), \quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1), \quad \ldots, \\
\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \\
\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1), \quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2), \quad \ldots, \\
\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2});
\end{gathered}$$

следовательно, в системе (2.7) появляется независимая подсистема порядка $2n-1$, состоящая из первых $2n-1$ уравнений (уравнение для $\dot\beta_{n-1}$ отделяется):

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{2.10a}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_n = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2 - \ldots - \\
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned}\tag{2.10b}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_{n-1} = F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots - \\
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned}\tag{2.10c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\begin{aligned}
\dot z_2 = F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n - \\
- f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1} - \ldots - \\
- f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3 - \\
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned}\tag{2.10d}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_1 = F_1^0 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n - \\
- f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1} - \\
- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2} - \ldots - \\
- f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2,
\end{aligned}\tag{2.10e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{2.10f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{2.10g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{2.10h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot{\beta}_{n-2} = z_2 f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{2.10i}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{2.11}$$

Предложение 2.10. *Пусть $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Если выполнены условия предложений* **??**, **??**, ..., **??**, *то система* (2.10), (2.11) *имеет первый интеграл вида* (**??**), *где после взятия интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно формально подставить левые части соответствующих первых интегралов.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений **??**, **??**, ..., **??**, то, система (2.10), (2.11) обладает первыми интегралами (**??**), (**??**), ..., (**??**), количество которых равно $n-1$. Нам понадобятся лишь два последних первых интеграла. Рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n соответствующих первых интегралов. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{2.12}$$

Угол β_{n-1} будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.10), (2.11):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Используя в этом уравнении равенство (2.12), получим требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.6, ..., 2.10 является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия предложений* 2.6, ..., 2.9, *то система* (2.10), (2.11) *обладает полным набором независимых первых интегралов вида* (2.9), (**??**), (**??**), ..., (**??**), (**??**), *количество которых равно $n+1$.*

Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показан ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
2. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
3. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
6. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
11. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.

14. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.

41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 165–169.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
54. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
55. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
56. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — *470*, № 3. — С. 288–292.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
63. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.

67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
70. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
71. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
72. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
73. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
74. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959.* — 080001.
75. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
76. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`