ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 124–134
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-124-134

УДК 517.958, 517.927.25

РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОЛНОТЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2022 г. **В. С. РЫХЛОВ**

Аннотация. Рассматривается смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и смешанной производной. Предполагается, что краевые условия являются распадающимися (одно в левом конце основного интервала, другое в правом конце), корни характеристического уравнения простые и лежат на положительном луче. На коэффициенты уравнения и краевых условий наложены такие условия, что отсутствует двукратная полнота собственных функций соответствующей спектральной задачи для дифференциального квадратичного пучка. Методом контурного интеграла Пуанкаре—Коши получены достаточные условия разрешимости данной задачи.

***Ключевые слова*:** смешанная задача, гиперболическое уравнение, существование решения, разрешимость смешанной задачи, распадающиеся краевые условия, постоянные коэффициенты, собственные функции, двукратная неполнота, двукратное разложение, нерегулярный операторный пучок, дифференциальный пучок, метод контурного интеграла, метод Пуанкаре—Коши.

SOLVABILITY OF A MIXED PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH SPLITTING BOUNDARY CONDITIONS IN THE CASE OF INCOMPLETE SYSTEM OF EIGENFUNCTIONS

© 2022 **V. S. RYKHLOV**

Abstract. In this paper, we consider a mixed problem for a second-order hyperbolic equation with constant coefficients and a mixed partial derivative. We assume that the boundary conditions are splitted (i.e., one condition is posed at the left endpoint of the main interval and the other at the right endpoint) and the roots of the characteristic equation are simple and lie on the positive half-line. The coefficients of the equation and the boundary conditions are constrained by conditions that guarantee the absence of the two-fold completeness of eigenfunctions of the corresponding spectral problem for the differential quadratic pencil. Using the Poincaré–Cauchy contour integral method, we to obtain sufficient conditions for the solvability of this problem.

***Keywords and phrases*:** mixed problem, hyperbolic equation, existence of solutions, solvability of mixed problem, splitting boundary conditions, constant coefficients, eigenfunctions, two-fold incompleteness, two-fold expansion, irregular operator pencil, differential pencil, contour integral method, Poincaré–Cauchy method.

***AMS Subject Classification*:** 35L20,35P10

1. Постановка смешанной задачи. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,+\infty), \tag{1}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha_0 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = 0, \quad \beta_1 \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial u(1,t)}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x), \tag{3}$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{C}$. Условие гиперболичности уравнения (1) означает, что

$$p_1^2 - 4p_2 > 0. \tag{4}$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0.$$

вещественны.

Помимо предположения (4), будем накладывать условие

$$0 < \omega_1 < \omega_2 \iff p_1 < 0, \ p_2 > 0. \tag{5}$$

Это условие, наряду со специфическим видом краевых условий (2), требуется для того, чтобы выделить такой класс смешанных задач (1)—(3), для которого соответствующая спектральная задача не обладала бы двукратной полнотой системы ее собственных функций. Соответствующие предположения будут сделаны немного ниже (см. (10)).

При сделанных предположениях требуется найти *классическое решение* задачи (1)—(3), т.е. найти такую функцию $u(x,t)$, которая в области $Q = \big\{(x,t) \mid x \in [0,1], \ t \in [0,+\infty)\big\}$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

Для нахождения классического решения задачи (1)—(3) будем использовать метод контурного интеграла («вычетный метод») Пуанкаре—Коши. (см., например, [1, 2, 6–8, 20–22]). Следует отметить, что в последние годы большой вклад в обоснование этого метода, но для классических смешанных задач, уравнение которых не содержит смешанных частных производных, но допускающих наличие младших и свободного членов при самых общих предположениях и новых подходах внесли А. П. Хромов и его ученики (см. [16, 17]).

2. Преобразование к спектральной задаче и формальное представление решения. Будем искать решение задачи (1)—(2) в виде $u(x,t) = e^{\lambda t} y(x,\lambda)$. Приходим к спектральной задаче

$$L(\lambda) y = 0 \tag{6}$$

для квадратичного пучка $L(\lambda)$, определенного формулами

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y, \tag{7}$$

$$U_1(y,\lambda) := \alpha_1 y'(0) + \lambda \alpha_0 y(0) = 0, \quad U_2(y,\lambda) := \beta_1 y'(1) + \lambda \beta_0 y(1) = 0. \tag{8}$$

Фундаментальную систему решений уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ образуют функции

$$y_1(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Далее считаем для определенности, что $\alpha_1 \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$. В остальных случаях тоже можно получить соответствующие результаты, только обозначения будут другими.

Введем обозначения

$$v_j = \alpha_1\omega_j + \alpha_0, \quad w_j = \beta_1\omega_j + \beta_0, \quad V_j = \begin{pmatrix} v_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} 0 \\ w_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2;$$

$$a_{sk} = \det(W_s, W_k), \quad a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k), \quad a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k), \quad a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k), \quad s, k = 1, 2.$$

Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_i(y_j,\lambda)\big)_{i,j=1}^2 = \lambda^2\Big|V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1;\ V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2\Big| =$$
$$= \lambda^2\Big(a_{\bar 1\bar 2} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar 2} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar 1 2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\Big) = \lambda^2\Big(e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar 2} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar 1 2}\Big) = \lambda^2\Delta_0(\lambda), \quad (9)$$

где $a_{1\bar 2} = -v_2w_1$, $a_{\bar 1 2} = v_1w_2$, а коэффициенты $a_{\bar 1\bar 2}$ и a_{12} в рассматриваемом случае, очевидно, равны нулю, ввиду специфики краевых условий.

Если $a_{\bar 1\bar 2} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$ в (9), то пучок $L(\lambda)$ регулярен по Биркгофу и его функция Грина имеет оценку $O(1/|\lambda|)$ вне кружков фиксированного достаточно малого радиуса около собственных значений (см. [5, 14, 19, 23]).

Если же $a_{12} = 0$ или $a_{12} = a_{\bar 1 2} = 0$ в (9) (или $a_{\bar 1\bar 2} = 0$ или $a_{\bar 1\bar 2} = a_{1\bar 2} = 0$ в симметричном случае), то функция Грина этого пучка имеет экспоненциальный рост при $|\lambda| \to \infty$ и $\arg\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$. Такие пучки, как известно, относятся к классу нерегулярных пучков (см., например, [12, 18]).

Пусть далее выполняются условия

$$v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0, \quad w_1 \neq 0, \quad w_2 \neq 0. \quad (10)$$

В этом случае пучок $L(\lambda)$ не является вырожденным, т.е. существует счетное число собственных значений и собственных функций. В то же время $L(\lambda)$ не является регулярным по Биркгофу.

Порождающей функцией (см. [12]) для системы собственных функций пучка $L(\lambda)$ будет функция (при $\lambda \neq 0$)

$$\gamma(z,\lambda) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x}\end{vmatrix} = -v_2e^{\lambda\omega_1 x} + v_1e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Как показано в [9] (см. также [10]) система $\{\gamma(x,\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$, а следовательно, и система собственных функций пучка $L(\lambda)$, определяемого формулами (7)—(8), двукратно не полна в $L_2[0,1]$ и имеет бесконечный дефект относительно двукратной полноты.

Насколько известно автору, условия разрешимости смешанной задачи (1)—(3) при таких предположениях ранее не были получены.

Из (9)—(10) следует, что корни уравнения $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеют вид

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i + d_0}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

где $d_0 := \ln_0 c_0$, $c_0 = -a_{1\bar 2}/a_{\bar 1 2} = (v_2w_1)/(v_1w_2)$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, удовлетворяющая условию $\ln_0 1 = 0$).

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Хорошо известно, что $\Lambda\setminus\{0\}$ — множество ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть собственным значением, а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$. Это требует дополнительного исследования, но для наших целей это не принципиально.

Линеаризуем пучок $L(\lambda)$ так, как это делается в [18]: положим $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Задача (6) тогда перейдет в следующую задачу на собственные значения в пространстве вектор-функций для оператора $\hat L$:

$$\hat L z = \lambda z, \quad z \in D_{\hat L}, \quad (12)$$

где $z = (z_0, z_1)^T$ и при обозначении $d_x = d/dx$

$$\hat L z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{p_2}d_x^2 & -\dfrac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix} z, \quad D_{\hat L} = \Big\{z \;\Big|\; z_0', z_1 \in L_1[0,1],\ U_i(z) = 0,\ i = 1,2\Big\},$$
$$U_1(z) := \alpha_1 z_0'(0) + \alpha_0 z_1(0), \quad U_2(z) := \beta_1 z_0'(1) + \beta_0 z_1(1).$$

Как показано в [18], собственные значения пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat L$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ совпадает с системой собственных вектор-функций $\hat L$.

Пусть $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda\hat{E})^{-1}$ есть резольвента оператора $\hat{L}$ или задачи (12) и $f = (f_0, f_1)^T$. Известно, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\gamma_\nu}\hat{R}_\lambda f d\lambda, \tag{13}$$

где γ_ν есть простой замкнутый контур, окружающий только одну точку λ_ν, есть разложение вектор-функции f в биортогональный ряд Фурье по собственным вектор-функциям оператора $\hat{L}$ или, что одно и то же, производным цепочкам пучка $L(\lambda)$, построенным по системе его собственных функций.

Введем обозначение

$$\hat{R}_\lambda f = (z_0(x, \lambda; f), z_1(x, \lambda; f))^T,$$

где $z_1(x, \lambda; f) = \lambda z_0(x, \lambda; f) + f_0(x)$. Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\gamma_\nu} e^{\lambda t} z_0(x, \lambda; f) d\lambda, \tag{14}$$

которая является формальным решением задачи (1)—(2), если не заботиться о сходимости ряда (14). Далее будут найдены условия на функции f_0 и f_1, при которых ряд (14), а также ряд, продифференцированный почленно дважды по x и t, сходится равномерно в области $Q_T = \big\{(x, t) \mid x \in [0, 1],\ t \in [0, T]\big\}$, где $T > 0$ — произвольное фиксированное число. В этом случае функция $u(x, t)$ будет удовлетворять уравнению (1) и краевым условиям (2) всюду в Q.

Положим $t = 0$ в ряде (14) и в почленно продифференцированном ряде по t. Учитывая равномерную сходимость полученных рядов, получим, что для того, чтобы выполнялись начальные условия (3), достаточно выполнения следующих равенств при $x \in [0, 1]$

$$u(x, 0) = f_0(x) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\gamma_\nu} z_0(x, \lambda; f) d\lambda, \tag{15}$$

$$u'_t(x, 0) = f_1(x) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\gamma_\nu}\lambda z_0(x, \lambda; f) d\lambda \equiv -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int\limits_{\gamma_\nu} z_1(x, \lambda; f) d\lambda. \tag{16}$$

С учетом (13) это приводит к необходимости нахождения условий разложимости вектор-функции $(f_0, f_1)^T$ по собственным вектор-функциям оператора $\hat{L}$ или, что то же самое, нахождение условий двукратного разложения вектор-функции $(f_0, f_1)^T$ по собственным функциям пучка $L(\lambda)$. То, что этот пучок является нерегулярным и отсутствует двукратная полнота собственных функций, существенно усложняет дело.

3. Теорема о двукратном разложении по собственным функциям. Рассмотрим задачу нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, определяемого формулами (7)—(8), и на вектор-функцию $f = (f_0, f_1)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость f в биортогональный ряд Фурье по собственным функциям этого пучка, т.е. имеют место формулы (15)—(16).

Эта задача представляет интерес только для нерегулярного пучка $L(\lambda)$, так как в регулярном случае задача о разложении решается без проблем (например, аналогично [5, с. 124—129]).

Задачи о разложении для простейших нерегулярных дифференциальных операторов первого и второго порядка со знакопеременной весовой функцией были решены в [3]. В случае оператора первого порядка на разлагаемую функцию накладывались условия непрерывности, ограниченности вариации и выполнения двух простых функциональных соотношений. В случае же дифференциального оператора второго порядка на разлагаемую функцию, помимо условий гладкости на основном отрезке, накладывались условия аналитической продолжимости в некоторые треугольники и выполнения там функциональных соотношений.

В случае простейшего нерегулярного дифференциального оператора третьего порядка, когда корни ω_j, $j = \overline{1, 3}$, характеристического уравнения лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в [15]. При этом на разлагаемую функцию накладывались условия аналитичности в некоторых многоугольниках комплексной плоскости и выполнения там некоторых функциональных соотношений. Обобщение этого результата на случай дифференциального оператора произвольного порядка $n = 4k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$, было сделано в [4].

В случае пучка $L(\lambda)$, определяемого дифференциальным выражением (7) и краевыми условиями

$$\alpha_{i1}y'(0) + \lambda\alpha_{i0}y(0) + \beta_{i1}y'(1) + \lambda\beta_{i0}y(1) = 0, \quad i = 1, 2,$$

где коэффициенты краевых форм удовлетворяют условиям

$$a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} \neq 0, \quad a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0,$$

и выполняется условие (5), что обеспечивает нерегулярность пучка $L(\lambda)$, теорема о разложении доказана в [11].

В случае пучка $L(\lambda)$, определяемого формулами (7)—(8), возникшего при рассмотрении задачи (1)—(3) при условиях (5), (10) теорема о разложении анонсирована в [13]. Приведем без доказательства некоторые факты, которые позволили получить результат из [13] и которые необходимы для дальнейшего изложения. Введем для краткости обозначение $\theta = 1/(\omega_2 - \omega_1)$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $f_0', f_1 \in L_1[0, 1]$,

$$\tilde{f}(x) \coloneqq -p_2 f_1(x) - p_1 f_0'(x), \quad f_\lambda(x) \coloneqq \tilde{f}(x) - \lambda p_2 f_0(x), \tag{17}$$

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0, \tag{18}$$

то

$$z_0(x, \lambda; f) =$$

$$= \frac{\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)} \int\limits_0^1 \Big(a_{1\bar{2}}e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} - a_{2\bar{2}}e^{\lambda(\omega_1 x+\omega_2(1-\xi))} + a_{\bar{1}1}e^{\lambda(\omega_1(1-\xi)+\omega_2 x)} - a_{\bar{1}2}e^{\lambda\omega_2(x+1-\xi)}\Big) f_\lambda(\xi)d\xi +$$

$$+ \frac{\theta}{\lambda}\int\limits_0^x \Big(-e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} f_\lambda(\xi)d\xi\Big) \eqqcolon A(x, \lambda; f_\lambda) + a(x, \lambda; f_\lambda), \tag{19}$$

где $z_1(x, \lambda; f) = \lambda z_0(x, \lambda; f) + f_0(x)$.

Пусть $K_\delta(\lambda)$ — круг радиуса $\delta > 0$ с центром в точке λ и

$$\mathbb{C}_\delta = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\delta(\lambda)\right).$$

Обозначим через $\mathbb{C}_\delta^+$ и $\mathbb{C}_\delta^-$ части множества $\mathbb{C}_\delta$, лежащие в правой и левой полуплоскости соответственно.

Лемма 2. *Существует такая положительная константа* C_δ, *что*

$$\forall\lambda \in \mathbb{C}_\delta^- : \ \Big|\Delta_0(\lambda)\Big| \geqslant C_\delta|e^{\lambda\omega_1}|; \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C}_\delta^+ : \ \Big|\Delta_0(\lambda)\Big| \geqslant C_\delta|e^{\lambda\omega_2}|. \tag{20}$$

Для формулировки теоремы о двукратном разложении по собственным функциям пучка $L(\lambda)$, определяемого формулами (7)—(8), введем необходимые обозначения:

$$e_1 = -\frac{v_1}{v_2}, \quad e_2 = \frac{w_2}{w_1}, \quad d_1 = e_1 e_2, \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

$$\alpha_x = 1 - \frac{1-x}{\tau}, \quad \beta_x = \tau x, \quad \gamma_x = x + 1 - \frac{1}{\tau},$$

$$\tilde{\alpha}_x = 1 - \tau(1-x), \quad \tilde{\beta}_x = \frac{x}{\tau}, \quad \tilde{\gamma}_x = x - 1 + \frac{1}{\tau},$$

$$I_{j\nu} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\gamma_\nu} z_j(x, \lambda; f)d\lambda, \quad j = 0, 1.$$

Пусть

$$F_1(x) := \int\limits_0^x f_1(t)dt.$$

Положим

$$H_1(x, F_1) := -2F_1(x) + e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta_x) + d_1F_1(\gamma_x) + \frac{1}{e_2}F_1(\tilde{\alpha}_x) - \frac{1}{e_1}F_1(\tilde{\beta}_x) + \frac{1}{d_1}F_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_2(x, f_0) := 2\omega_1 f_0(x) - e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) + e_1\omega_1 f_0(\beta_x) - d_1\omega_2 f_0(\gamma_x) - \frac{\omega_1}{e_2}f_0(\tilde{\alpha}_x) + \frac{\omega_2}{e_1}f_0(\tilde{\beta}_x) - \frac{\omega_2}{d_1}f_0(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_3(x, f_1) := -\frac{2}{\omega_1}f_1(x) + \frac{e_2}{\omega_2}f_1(\alpha_x) - \frac{e_1}{\omega_1}f_1(\beta_x) + \frac{d_1}{\omega_2}f_1(\gamma_x) + \\ + \frac{1}{\omega_1 e_2}f_1(\tilde{\alpha}_x) - \frac{1}{\omega_2 e_1}f_1(\tilde{\beta}_x) + \frac{1}{\omega_2 d_1}f_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_4(x, f_0') := 2f_0'(x) - e_2f_0'(\alpha_x) + e_1f_0'(\beta_x) - d_1f_0'(\gamma_x) - \frac{1}{e_2}f_0'(\tilde{\alpha}_x) + \frac{1}{e_1}f_0'(\tilde{\beta}_x) - \frac{1}{d_1}f_0'(\tilde{\gamma}_x).$$

Имеет место следующая теорема о разложении для нерегулярного пучка $L(\lambda)$.

Теорема 1. *Если* $f_0'', f_1' \in L_p[0,1]$, $p > 1$, *а также выполняются условия* (5), (10), (18),

$$F_1(1) = 0 \tag{21}$$

и

$$2\omega_1 < \omega_2, \tag{22}$$

то имеет место равномерная сходимость по $x \in [0,1]$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f d\lambda = f(x) + h(x, f), \tag{23}$$

где $h(x, f) = (h_0(x, f), h_1(x, f))^T$,

$$h_0(x, f) := p_2\theta H_1(x, F_1) + \theta H_2(x, f_0) \tag{24}$$

$$h_1(x, f) := p_2\theta H_3(x, f_1) + \theta H_2(x, f_0'), \tag{25}$$

В формулах (24)—(25) *функции полагаются продолженными нулем, если их аргументы выходят за отрезок* $[0,1]$.

Наличие слагаемого $h(x, f)$ в (23) объясняется нерегулярностью пучка (7)—(8) и, как следствие, отсутствием двукратной полноты системы его собственных функций.

Важным для дальнейшего изложения является следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Для того, чтобы имели место равномерная по* $x \in [0,1]$ *сходимость*

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f d\lambda = f(x), \tag{26}$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(x)$ *удовлетворяла уравнению* $h(x, f) \equiv 0$.

4. Теорема о разрешимости смешанной задачи. Справедлива следующая основная теорема настоящей статьи.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (5), (10), (21), (22),

$$f_0^{(4)}, f_1^{(3)} \in L_1[0,1], \quad f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0, \quad j = 0,1, \quad s = \overline{0, 3-j}, \tag{27}$$

и, кроме того, функция $f = (f_0, f_1)^T$ *удовлетворяет соотношению* $h(x,f) = 0$ *при* $x \in [0,1]$, *где компоненты* $h(x,f)$ *определяются формулами* (24)—(25) (*в этих соотношениях функции полагаются продолженными нулем, если их аргументы выходят за отрезок* $[0,1]$). *Тогда в области* Q *существует классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)—(3), *определяемое формулой* (14). *Ряд в* (14), *а также почленно продифференцированный ряд в* (14) *до второго порядка включительно по* x *и* t *являются равномерно сходящимися во всякой области* Q_T.

Доказательство. Из формул для собственных значений (11) следует, что в плоскости $\mathbb{C}$ существуют такие контуры Γ_ν, которые отстоят от λ_k на расстояние не меньшее некоторого фиксированного достаточно малого числа $\delta > 0$, а между соседними контурами лежит ровно одно λ_k. В качестве таких контуров удобно взять, например, контуры $A_\nu \widehat{B_\nu C_\nu D_\nu} A_\nu$ (обход контура начинается с нижней левой угловой точки и проводится против часовой стрелки), где $B_\nu C_\nu$ и $D_\nu A_\nu$ есть отрезки прямых $\operatorname{Re}\lambda = \pm H$ ($H > 0$ достаточно большое число), а дуги $\widehat{A_\nu B_\nu}$ и $\widehat{C_\nu D_\nu}$ лежат вне δ-окрестностей собственных значений, являются дугами окружностей радиусов r'_ν, r''_ν, соответственно, с центрами в начале координат, причем такими, что $c'_1\nu < r'_\nu < c'_2\nu$, $c''_1\nu < r''_\nu < c''_2\nu$, где $c'_1, c''_1, c'_2, c''_2 > 0$ фиксированные константы, и скользят по прямым $\operatorname{Re}\lambda = \pm H$. Обозначим через E_ν и F_ν точки пересечения дуг $\widehat{A_\nu B_\nu}$ и $\widehat{C_\nu D_\nu}$ с мнимой осью. Пусть Γ_ν^+ и Γ_ν^- части контура Γ_ν, лежащие в правой и левой комплексной полуплоскости соответственно. Таким образом, $\Gamma_\nu^+ = \widehat{F_\nu D_\nu A_\nu E_\nu}$, а $\Gamma_\nu^- = \widehat{E_\nu B_\nu C_\nu F_\nu}$.

Из теоремы Коши для аналитических функций следует, что для того, чтобы доказать равномерную сходимость ряда (14) в области Q_T, достаточно доказать равномерную сходимость в этой области последовательности $I_\nu(f)$ при $\nu \to \infty$, где

$$I_\nu(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} z_0(x,\lambda;f)\,d\lambda.$$

Воспользуемся формулой (19) из леммы 1, условия которой при сделанных предположениях выполнены. С учетом (18) получим представление

$$z_0(x,\lambda;f) = A(x,\lambda;\tilde f) + a(x,\lambda;\tilde f) - \lambda p_2 A(x,\lambda;f_0) - \lambda p_2 a(x,\lambda;f_0).$$

Здесь $\lambda p_2 a(x,\lambda;f_0)$ есть целая аналитическая функция, а $a(x,\lambda;\tilde f)$ есть аналитическая функция во всей комплексной плоскости за исключением точки $\lambda = 0$, в которой она имеет формально полюс первого порядка, а вычет равен нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_\nu(f) = &-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} A(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} a(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t}\lambda p_2 A(x,\lambda;f_0)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t}\lambda p_2 a(x,\lambda;f_0)\,d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} A(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t}\lambda p_2 A(x,\lambda;f_0)\,d\lambda. \end{aligned} \tag{28}$$

Для доказательства существования решения исходной задачи достаточно доказать, что выражения справа в (28) и выражения, получаемые из них почленным дифференцированием по x и t до второго порядка включительно, сходятся равномерно в Q_T при $\nu \to \infty$.

Учитывая (28), представим $I_\nu(f)$ следующим образом:

$$I_\nu(f) = -\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{\Gamma_\nu^+} + \int\limits_{\Gamma_\nu^-}\right] e^{\lambda t} A(x,\lambda;\tilde f)d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{\Gamma_\nu^+} + \int\limits_{\Gamma_\nu^-}\right] e^{\lambda t}\lambda p_2 A(x,\lambda;f_0)d\lambda =: \sum_{j=1}^{4} I_\nu^j(f) \qquad (29)$$

Покажем, что каждое из этих четырех слагаемых равномерно сходится в Q_T при $\nu \to \infty$. С учетом наличия множителя λ в слагаемых $I_\nu^j(f)$ при $j = 3, 4$, рассуждения при рассмотрении первых двух слагаемых в (29) и последних двух слагаемых будут отличаться.

Рассмотрим сначала первые два слагаемых в (29). Рассуждения для них аналогичны. Для примера рассмотрим $I_\nu^1(f)$. Справедливо равенство

$$I_\nu^1(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+} e^{\lambda t} A(x,\lambda;\tilde f)d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+} e^{\lambda t}\frac{\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)}\int\limits_0^1 (a_{1\bar 2}e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} - a_{2\bar 2}e^{\lambda(\omega_1 x+\omega_2(1-\xi))} + a_{\bar 1 1}e^{\lambda(\omega_1(1-\xi)+\omega_2 x)} -$$

$$- a_{\bar 1 2}e^{\lambda\omega_2(x+1-\xi)})\tilde f(\xi)d\xi d\lambda =: \sum_{s=1}^{4} I_{\nu s}^1(f). \qquad (30)$$

Дальнейшие рассуждения для каждого слагаемого аналогичны. Рассмотрим для примера слагаемое $I_{\nu 1}^1(f)$. Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{I_{\nu 1}^1(f)\}_{\nu=1}^\infty$ в области Q_T воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим при $\mu < \nu$ разность:

$$I_{\mu 1}^1(f) - I_{\nu 1}^1(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widehat{F_\nu C_\nu C_\mu F_\mu}} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widehat{E_\mu B_\mu B_\nu E_\nu}} := I_{\mu\nu 1}^1(f) + I_{\mu\nu 2}^1(f). \qquad (31)$$

Рассуждения для этих двух слагаемых аналогичны. Для примера рассмотрим $I_{\mu\nu 1}^1(f)$. Проведем в этом интеграле один раз интегрирование по частям по ξ. Получим

$$I_{\mu\nu 1}^1(f) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\widehat{F_\nu C_\nu}} + \int\limits_{\widehat{C_\nu C_\mu}} + \int\limits_{\widehat{C_\mu F_\mu}}\right)\frac{e^{\lambda t}\theta a_{1\bar 2}}{\lambda^2\omega_1\Delta_0(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)}\tilde f'(\xi)d\xi d\lambda =:$$

$$=: K_\nu(f) + M_{\nu\mu}(f) + N_\mu(f). \qquad (32)$$

С учетом леммы 2 получим оценку

$$|K_\nu(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\widehat{F_\nu C_\nu}} \frac{|e^{\lambda t}||\theta||a_{1\bar 2}|}{|\lambda|^2|\omega_2|C_\delta\omega_1}\int\limits_0^1 |e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi)-\omega_2)}||\tilde f'(\xi)||d\xi||d\lambda|\right| \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta)e^{H(T+2\omega_1-\omega_2)}\|\tilde f'\|_{L_1[0,1]}\left|\int\limits_{\widehat{F_\nu C_\nu}}\frac{1}{|\lambda|^2}|d\lambda|\right| \leqslant C(H,T,\delta)\|\tilde f'\|_{L_1[0,1]}\frac{1}{(r''_\nu)^2}\text{дл.}\widehat{F_\nu C_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant C(H,T,\delta)\|\tilde f'\|_{L_1[0,1]}\frac{\pi r''_\nu}{(r''_\nu)^2} \leqslant C(H,T,\delta)\|\tilde f'\|_{L_1[0,1]}\frac{1}{r''_\nu} \to 0, \quad \nu\to\infty, \qquad (33)$$

равномерно по $(x,t) \in Q_T$. Здесь и далее через $C(\cdot,\cdot,\dots)$ обозначаются различные константы, возможно зависящие от аргументов в круглых скобках.

Аналогично доказывается, что

$$|N_\mu(f)| \leqslant C(H,T,\delta)\|\tilde f'\|_{L_1[0,1]}\frac{1}{r''_\mu} \to 0, \quad \mu\to\infty, \qquad (34)$$

равномерно по $(x,t) \in Q_T$.

Оценим оставшееся слагаемое $M_{\nu\mu}(f)$ в (32). После интегрирования по частям интеграла по ξ получим оценку

$$|M_{\nu\mu}(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\widetilde{C_\nu C_\mu}} \frac{|e^{\lambda t}||\theta||a_{1\bar{2}}|}{|\lambda|^2|\omega_2|C_\delta\omega_1}\int\limits_0^1 |e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi)-\omega_2)}||\tilde{f}'(\xi)||d\xi||d\lambda|\right| \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta)e^{H(T+2\omega_1-\omega_2)}\|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]}\left|\int\limits_{C_\nu}^{C_\mu}\frac{1}{|\lambda|^2}|d\lambda|\right|.$$

Делая замену $\lambda = H + iy$ в интеграле, получим

$$|M_{\nu\mu}(f)| \leqslant C(H,T,\delta)\|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]}\int\limits_{\sqrt{(r''_\nu)^2-H^2}}^{\sqrt{(r''_\mu)^2-H^2}}\frac{dy}{H^2+y^2} \leqslant$$

$$\leqslant C(H,T,\delta)\|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]}\int\limits_{r''_\nu/2}^{r''_\mu}\frac{dy}{H^2+y^2} = C(H,T,\delta)\|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]}\frac{2}{H}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{H}\right)\Big|_{r''_\nu/2}^{r''_\mu} =$$

$$= C(H,T,\delta)\|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]}\left(\operatorname{arctg}\frac{r''_\mu}{H} - \operatorname{arctg}\frac{r''_\nu}{2H}\right) \to 0, \quad \nu,\mu\to\infty, \quad (35)$$

равномерно по $(x,t)\in Q_T$.

На основании (32)—(35) получим, что

$$I^1_{\mu\nu 1}(f) \to 0, \quad \mu,\nu\to\infty, \quad (36)$$

равномерно по $(x,t)\in Q_T$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$I^1_{\mu\nu 2}(f) \to 0, \quad \mu,\nu\to\infty, \quad (37)$$

равномерно по $(x,t)\in Q_T$.

Таким образом, из (31), (36), (37) получим

$$I^1_{\mu 1}(f) - I^1_{\nu 1}(f) \to 0, \quad \mu,\nu\to\infty, \quad (38)$$

равномерно по $(x,t)\in Q_T$, а следовательно, по критерию Коши последовательность $\{I^1_{\nu 1}(f)\}$ при $\nu\to\infty$ сходится равномерно по $(x,t)\in Q_T$. Аналогично устанавливается, что и последовательность $\{I^1_{\nu s}(f)\}$ при $\nu\to\infty$ сходится равномерно по $(x,t)\in Q_T$ для $s = 2,3,4$.

Следовательно, из вышеизложенного получим, что последовательность $\{I^1_\nu(f)\}$ при $\nu\to\infty$ сходится равномерно по $(x,t)\in Q_T$. Аналогичные рассуждения приводят к справедливости этого утверждения для последовательности $\{I^2_\nu(f)\}$: последовательность $\{I^2_\nu(f)\}$ при $\nu\to\infty$ сходится равномерно по $(x,t)\in Q_T$.

Для доказательства равномерной сходимости последовательностей $\{I^j_\nu(f)\}$ при $j = 3,4$ нужно предварительно провести в этих слагаемых дважды интегрирование по частям интегралов по переменной ξ (чтобы получить в знаменателях слагаемых множитель λ^2), воспользоваться предположением (27) и провести рассуждения аналогичные тем, что были проведены выше. В результате установим, что последовательности $\{I^j_\nu(f)\}$ при $\nu\to\infty$ сходится равномерно по $(x,t)\in Q_T$ для $j = 3,4$.

Из полученных результатов и представления (29) следует равномерная по $(x,t)\in Q_T$ сходимость последовательности $\{I_\nu(f)\}$ при $\nu\to\infty$. А из этой равномерной сходимости, как было отмечено ранее, следует выполнение для предельной функции $u(x,t)$, т.е. решения уравнения (1), граничных условий (2) и начальных условий (3). Теорема 2 полностью доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагабов А. И.* Условия корректности одномерных смешанных задач для гиперболических систем// Докл. АН СССР. — 1964. — *155*, № 6. — С. 1247–1249.
2. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1994.
3. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией// Мат. заметки. — 1994. — *56*, № 1. — С. 3–15.
4. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2007. — *7*, № 2. — С. 10–14.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
6. *Расулов М. Л.* Исследование вычетного метода решения некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1952. — *30 (72)*, № 3. — С. 509–528.
7. *Расулов М. Л.* Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром// Мат. сб. — 1959. — *48 (90)*, № 3. — С. 277–310.
8. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
9. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов// Изв. вузов. Мат. — 1992. — № 3. — С. 35–44.
10. *Рыхлов В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов// в кн.: Математика. Механика. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. — Т. 3. — С. 114–117.
11. *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2013. — *13*, № 1. — С. 21–26.
12. *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Таврич. вестн. информ. мат. — 2015. — № 1 (26). — С. 69–86.
13. *Рыхлов В. С.* О разрешимости смешанной задачи для некоторых гиперболических уравнений при отсутствии полноты собственных функций// Мат. Всеросс. конф. «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXI. Современные методы теории краевых задач» (4–7 мая 2020 г., Воронеж). — Воронеж: ВГУ, 2020. — С. 184–187.
14. *Тамаркин Я. В.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды. — Петроград, 1917.
15. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка// в кн.: Исследования по теории операторов. — Уфа: Изд-во БНЦ УрО АН СССР, 1988. — С. 182–193.
16. *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2019. — *19*, № 3. — С. 280–288.
17. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Докл. РАН. — 2019. — *484*, № 1. — С. 18–20.
18. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1983. — *9*. — С. 190–229.
19. *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*. — P. 373–395.
20. *Cauchy A. L.* Mémoire sur l'application du calcal des résidus a la solution des problêmes de physique mathématique. — Paris, 1827.
21. *Cauchy A. L.* Oeuvres compleétes d'Augustin Cauchy (II Sér.). Tome VII. — Paris, 1827.
22. *Poincaré M. H.* Sur les équations de la physique mathḿatique// Rend. Circ. Mat. — 1894. — *8*. — P. 57–155.

23. *Tamarkin J. D.* Some general problems of theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions// Math. Z. — 1927. — *27.* — P. 1–54.

Рыхлов Виктор Сергеевич
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: rykhlovvs@yandex.ru