ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 146–159
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-146-159

УДК 517.956.4

О ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2022 г. **К. Д. ФЕДОРОВ**

Аннотация. Рассмотрена первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной области Ω с криволинейными боковыми границами. Доказано существование решения этой задачи в классе $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ с помощью метода граничных интегральных уравнений.

***Ключевые слова*:** первая начально-краевая задача, параболическое уравнение, негладкая боковая граница, метод граничных интегральных уравнений.

ON THE FIRST INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HEAT CONDUCTION IN A DOMAIN WITH CURVILINEAR LATERAL BOUNDARIES

© 2022 **K. D. FEDOROV**

Abstract. We consider the first initial-boundary-value problem for the heat equation in a bounded domain Ω with curvilinear lateral boundaries. Using the method of boundary integral equations, we prove the existence of a solution to this problem in the class $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$.

***Keywords and phrases*:** first initial-boundary-value problem, parabolic equation, nonsmooth lateral boundary, method of boundary integral equations.

***AMS Subject Classification*:** 35A01

Предметом исследования является первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с непрерывным коэффициентом, зависящим от времени t, в плоской области с криволинейными боковыми границами. Условия на коэффициент в уравнении и на боковые границы области не позволяют воспользоваться известными до сих пор результатами о классической разрешимости параболических задач как в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ (в областях с негладкими боковыми границами, см. [1, 4, 8]), так и в пространствах $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ (в областях с гладкими боковыми границами, см. [5, с. 361—368], [7]).

Несмотря на достаточно слабые условие на коэффициент уравнения и на характер гладкости боковых границ, в работе устанавливается разрешимость задачи в классе $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$.

Статья состоит из четырех пунктов. В пункте 1 вводятся необходимые определения и формулируется основной результат. В разделе 2 рассматривается специальный параболический потенциал и доказываются его свойства. В разделе 3 устанавливается однозначная разрешимость системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода, к которой редуцируются граничные условия поставленной задачи. В разделе 4 доказывается основная теорема.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата. Пусть $T > 0$ фиксировано. Обозначим через $C[0,T]$ пространство непрерывных функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|\psi;[0,T]\|^0 := \max_{t\in[0,T]} |\psi(t)|$$

и рассмотрим подпространство $C_0[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi(0) = 0\}$. Введем также пространство

$$C^1[0,T] = \big\{\psi \in C[0,T] : \psi' \in C[0,T]\big\}$$

с нормой

$$\|\psi;[0,T]\|^1 := \max_{t\in[0,T]} |\psi(t)| + \max_{t\in[0,T]} |\psi'(t)|$$

и подпространство

$$C^1_0[0,T] = \big\{\psi \in C^1[0,T] : \psi(0) = \psi'(0) = 0\big\}.$$

На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t рассмотрим полосу

$$D := \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T\big\}.$$

Пусть Ω — произвольная ограниченная область из D. Через $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство функций u, непрерывных вместе со своими первыми по x, t и второй производной по x в $\overline{\Omega}$, с нормой

$$\|u;\Omega\|^{2,1} := \|u\|^0 + \|u_x\|^0 + \|u_{xx}\|^0 + \|u_t\|^0.$$

Положим

$$C^{2,1}_0(\overline{\Omega}) = \big\{u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) : u(x,0) = u_x(x,0) = u_{xx}(x,0) = u_t(x,0) = 0\big\}.$$

Под значениями функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения изнутри области. Рассмотрим область Ω следующего вида:

$$\Omega := \big\{(x,t) \in D \mid g_1(t) < x < g_2(t)\big\}$$

с боковыми границами

$$\Sigma_k := \big\{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\big\},$$

где

$$g_k \in C[0,T] \cap C^1(0,T], \quad |g_k'(t)| \leqslant \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad 0 < t \leqslant T, \quad k = 1,2; \tag{1}$$

здесь ω — некоторый модуль непрерывности, и

$$|g_1(t) - g_2(t)| \geqslant d > 0. \tag{2}$$

Модулем непрерывности согласно [2, с. 150] будем называть функцию $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, обладающую следующими свойствами:

(i) $\omega(0) = 0$;
(ii) ω не убывает на $[0,+\infty)$;
(iii) ω непрерывна на $[0,+\infty)$;
(iv) ω полуаддитивна, а именно, $\omega(z_1 + z_2) \leqslant \omega(z_1) + \omega(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in [0,+\infty)$.

Напомним следующие известные свойства модуля непрерывности (см. [2, с. 152—154]).

A. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $\omega(nz) \leqslant n\omega(z)$, где $z > 0$.

B. Отношение $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает, а именно,

$$\frac{\omega(z_2)}{z_2} \leqslant 2\frac{\omega(z_1)}{z_1},$$

если $z_2 \geqslant z_1 > 0$.

C. Для любого $c > 0$ существует такое $C > 0$, что

$$\omega(x)\exp\left\{-\frac{cx^2}{t}\right\} \leqslant C\omega(t^{\frac{1}{2}})\exp\left\{-\frac{cx^2}{2t}\right\}$$

для $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Рассмотрим оператор теплопроводности

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где a — вещественная и непрерывная на $[0,T]$ функция, удовлетворяющая условию $a(t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $t \in [0,T]$.

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$Lu = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{4}$$

$$u|_{\Sigma_k} = \psi_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2. \tag{5}$$

Пусть

$$Y(x,t;\tau) := \int\limits_0^\infty Z(x+r,t;\tau)dr, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < t, \tag{6}$$

где

$$Z(x,t;\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \int\limits_\tau^t a(z)dz}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\int\limits_\tau^t a(z)dz}\right\}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (1), (2). *Тогда для любых* $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0,T]$ (*единственным*) *решением задачи* (3)—(5) *является сумма потенциалов*:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^2 \int\limits_0^t Y(x - g_k(\tau), t; \tau)\varphi_k(\tau)d\tau, \tag{7}$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0[0,T]$ — *единственное в* $C[0,T]$ *решение системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода*:

$$\sum_{k=1}^2 \int\limits_0^t Y\big(g_l(t) - g_k(\tau), t; \tau\big)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_l(t), \quad l = 1,2, \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

При этом $u \in C_0^{2,1}(\overline{\Omega})$ *и справедлива оценка*

$$\|u;\Omega\|^{2,1} \leqslant C\big(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1\big).$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от T, a, Σ_k, конкретный вид которых нас не интересует.

Замечания.

1. Единственность решения задачи (4)—(6) следует из принципа максимума (см., например, [3]).
2. Пусть ω_0 — модуль непрерывности коэффициента a на $[0,T]$. Если

$$\omega_0(t) \leqslant Ct^{\frac{\alpha}{2}}, \quad g_k \in H^{1+\alpha/2}[0,T], \quad k = 1,2, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то для любых $\psi_k \in H_0^{1+\alpha/2}[0,T]$, $k = 1,2$, хорошо известна разрешимость задачи (3)—(5) в классе $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$ (см. [5, с. 361—368], [7]).
3. Если ω_0 удовлетворяет двойному условию Дини

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(x) = \int\limits_0^x \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_0^\tau \frac{\omega_0(z)}{z}dz < \infty, \quad x > 0,$$

и $g_k \in H^{1/2+\omega_1}[0,T]$, $k=1,2$, т.е.

$$\big|\Delta_t g_k(t)\big| \leqslant |\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \tag{9}$$

где ω_1 удовлетворяет условию Дини

$$\widetilde{\omega}_1(x) = \int\limits_0^x \frac{\omega_1(t)}{t}dt < \infty, \quad x > 0,$$

то хорошо известно, что для любых $\psi_k \in H_0^{1/2+\omega_1}[0,T]$ существует единственное решение задачи (3)—(5) в классе $H^{1+\omega_2,1/2+\omega_2}(\overline{\Omega})$, где $\omega_2 = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1$ (см. [4, 8]).

4. Если в условии (1) дополнительно предположить, что ω удовлетворяет условию Дини, то g_k удовлетворяют условию Дини—Гёльдера (9).

2. Специальный параболический потенциал.

Пусть

$$\Sigma \coloneqq \big\{(x,t) \in \overline{D} : x = g(t)\big\},$$

где

$$g \in C[0,T] \cap C^1(0,T], \quad |g'(t)| \leqslant \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{10}$$

Замечания.

1. Из (10) следует неравенство:

$$\Big|g(t+\Delta t) - g(t)\Big| \leqslant 2|\Delta t|^{1/2}\omega((|\Delta t|)^{1/2}), \quad 0 \leqslant t < t+\Delta t \leqslant T. \tag{11}$$

2. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$(a-b)^2 \geqslant \frac{a^2}{2} - 2b^2. \tag{12}$$

В самом деле, если $ab < 0$, то

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 > a^2 + b^2 > \frac{a^2}{2} - 2b^2.$$

Если $ab \geqslant 0$, то:

$$a^2 - 2ab + b^2 - \frac{a^2}{2} + 2b^2 = \frac{a^2}{2} + 3b^2 - 2ab = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{3}b\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2\right)ab \geqslant 0.$$

3. Из (11), (12) вытекает оценка

$$\exp\left\{-c\frac{(r + (g(t) - g(\tau)))^2}{t-\tau}\right\} \leqslant C\exp\left\{-\frac{c}{2}\frac{r^2}{(t-\tau)}\right\}, \tag{13}$$

при любом $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$.

4. При $x > 0$ справедливо равенство:

$$I \coloneqq \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\tau^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\tau}\right\} d\tau = \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Следуя [6], определим для плотности $\varphi \in C[0,T]$ *специальный параболический потенциал* $S\varphi$ формулой:

$$S\varphi(x,t) \coloneqq \int\limits_0^t Y(x - g(\tau), t; \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{D},$$

где функция $Y(x,t;\tau)$ определена формулой (3).

Лемма 1. *Пусть $\varphi, g \in C[0,T]$. Тогда для $t \in (0,T]$ имеем*

$$\lim_{x \to g(t)+0} \left(-\int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t; \tau)\varphi(\tau)d\tau \right) = \frac{\varphi(t)}{2a(t)},$$

причем сходимость равномерна на $[t_1, T]$ для любого$t_1 \in (0,T)$.

Замечание. Утверждение леммы хорошо известно (см., например, [4]), если модуль непрерывности ω_0 для функции a дополнительно удовлетворяет условию Дини.

Доказательство. Пусть $0 < t_1 < T$ произвольно. Достаточно доказать, что

$$-\int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x, t; \tau)\varphi(\tau)d\tau \to \frac{\varphi(t)}{2a(t)} \text{ при } x \to +0,$$

равномерно по $t \in [t_1, T]$. Имеем:

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{\left(\int_\tau^t a(z)dz\right)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{4\left(\int_\tau^t a(z)dz\right)} \right\} \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(a(t)(t-\tau))^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{4a(t)(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{\left(\int_\tau^t a(z)dz\right)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{4\left(\int_\tau^t a(z)dz\right)} \right\} \varphi(\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(a(t)(t-\tau))^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{4a(t)(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau)d\tau \right\} =$$

$$= I_1(x,t) + \int_0^t \frac{1}{4\sqrt{\pi}} K(x,t;\tau)\varphi(\tau)d\tau = I_1(x,t) + I_2(x,t).$$

Согласно [4]

$$I_1(x,t) \to \frac{\varphi(t)}{2a(t)} \text{ при } x \to +0,$$

причем сходимость равномерна на $[t_1, T]$. Рассмотрим $I_2(x,t)$. Из представления

$$\int_\tau^t a(z)dz - a(t)(t-\tau) = \int_\tau^t (a(z) - a(t))dz$$

вытекает оценка

$$\left| K(x,t;\tau) \right| \leqslant C \exp\left\{ -c\frac{x^2}{(t-\tau)} \right\} \frac{x\omega_0(t-\tau)}{(t-\tau)^{3/2}},$$

где ω_0 — модуль непрерывности функции a на $[0,T]$. Поэтому (не ограничивая общности, считаем, что $0<x<t_1$)

$$|I_2(x,t)| \leqslant C\left(\int\limits_0^{t-x}+\int\limits_{t-x}^{t}\right)\exp\left\{-c\frac{x^2}{(t-\tau)}\right\}\frac{x\omega_0(t-\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\varphi(\tau)d\tau = I_{21}(x,t)+I_{22}(x,t).$$

Оценим $I_{21}(x,t)$:

$$|I_{21}(x,t)| \leqslant C_\varphi\omega_0(x)\int\limits_0^{t-x}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau \leqslant C_\varphi\omega_0(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to+0,$$

где $C_\varphi = C\|\varphi\|^0$. Оценим $I_{22}(x,t)$:

$$|I_{22}(x,t)| \leqslant C_\varphi\omega_0(x)\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-y^2\}dy \leqslant C_\varphi\omega_0(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to+0.$$

Лемма доказана. □

Заметим, что для любых $\varphi, g\in C[0,T]$ имеем

$$S\varphi\in C^{2,1}(D\setminus\Sigma), \quad L(S\varphi)=0 \text{ в } D\setminus\Sigma. \tag{15}$$

Определим области

$$D_+ := \{(x,t)\in D : x>g(t)\}, \quad D_- := \{(x,t)\in D : x<g(t)\}.$$

Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых $\varphi, g\in C[0,T]$ справедливы следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^k S\varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in\overline{D}, \quad k=0,1, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in D_\pm. \tag{17}$$

Доказательство. Оценка (16) сразу следует из определения потенциала (6). Докажем (17). Без ограничения общности предположим, что $(x,t)\in D_+$, тогда:

$$\frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \int\limits_0^t\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x-g(\tau),t;\tau)\varphi(\tau)d\tau = -\int\limits_0^t\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t;\tau)\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= -\int\limits_0^t\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(t),t;\tau)\varphi(\tau)d\tau - \int\limits_0^t\left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t;\tau)-\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(t),t;\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= I_1(x,t)+I_2(x,t). \tag{18}$$

Имеем в силу (14)

$$|I_1(x,t)| \leqslant C\|\varphi\|^0,$$

и, кроме того,

$$|I_2(x,t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t\frac{|g(t)-g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}} \leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t\frac{\omega(\tau^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2}\tau^{1/2}} = C\|\varphi\|^0.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in C_0[0,T]$, g удовлетворяет условию (10). Тогда для любого $t^0 \in [0,T]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{(x,t)\to(g(t^0),t^0)} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \pm\frac{\varphi(t^0)}{2a(t^0)} + \int\limits_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t^0)-g(\tau),t^0;\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t)\in D_\pm. \tag{19}$$

Без ограничения общности формулу (19) докажем для области D_+. Доказательство основано на следующих леммах 2—5.

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in C[0,T]$, g удовлетворяет условию (10), а $t_1 \in (0,T)$ произвольно. Тогда для любого $t \in [t_1,T]$*

$$\lim_{x\to g(t)+0} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\varphi(t)}{2a(t)} + \int\limits_0^{t} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t)-g(\tau),t;\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{20}$$

причем сходимость равномерна на $[t_1,T]$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (18):

$$\frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t) = -\int\limits_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(t),t;\tau)\varphi(\tau)d\tau -$$
$$-\int\limits_0^t \left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t;\tau) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(t),t;\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau = I_1(x,t)+I_2(x,t).$$

В силу леммы 1

$$\lim_{x\to g(t)+0} I_1(x,t) = \frac{\varphi(t)}{2a(t)},$$

причем сходимость равномерна на $[t_1,T]$. Рассмотрим $I_2(x,t)$. Положим

$$\begin{aligned} h(t,\tau) &= \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t)-g(\tau),t;\tau), \quad 0\leqslant\tau<t,\\ f(x,t,\tau) &= \left\{\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t;\tau) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(t),t;\tau)\right\}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t. \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что имеют место оценки

$$|h(t,\tau)| \leqslant C\frac{|g(t)-g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}} \leqslant C\frac{|g'(\tau+\theta(t-\tau))|}{(t-\tau)^{1/2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\omega((\tau+\theta(t-\tau))^{1/2})}{(\tau+\theta(t-\tau))^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}. \tag{22}$$

Интеграл

$$\int\limits_0^t f(x,t,\tau)d\tau$$

сходится равномерно по $x\in\mathbb{R}$, так как в силу условия (10) справедливы оценки

$$|f(x,t,\tau)| \leqslant C\frac{|g(t)-g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}} \leqslant C\frac{|t-\tau||g'(\tau+\theta(t-\tau))|}{(t-\tau)^{3/2}} \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2}\tau^{1/2}}.$$

Кроме того, $f(x,t,\tau)\to h(t,\tau)$ при $x\to g(t)+0$ равномерно по τ в каждом промежутке $[0,t-\varepsilon]$ в силу неравенств

$$\big|f(x,t,\tau)-h(t,\tau)\big| \leqslant \left|\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t;\tau) - \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t)-g(\tau),t;\tau)\right| + \left|\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(t),t;\tau)\right| \leqslant C\frac{|x-g(t)|}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Таким образом, все условия для перехода к пределу под знаком интеграла выполнены и, следовательно,

$$\lim_{x\to g(t)+0} I_2(x,t) = -\int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}\big(g(t)-g(\tau),t;\tau\big)\varphi(\tau)d\tau. \tag{23}$$

Докажем, что сходимость в (23) равномерна по $t\in[t_1,T]$. Пусть $\varepsilon_0>0$ фиксировано произвольно. Выберем такое $\varepsilon>0$, что $\varepsilon<t_1/2$; тогда $t-\varepsilon>t/2$. Положим

$$\int_0^t (f(x,t,\tau)-h(t,\tau))d\tau = \left(\int_{t-\varepsilon}^t + \int_0^{t-\varepsilon}\right)(f(x,t,\tau)-h(t,\tau))d\tau = J_1(x,t)+J_2(x,t).$$

Оценим $J_1(x,t)$:

$$|J_1(x,t)| \leqslant C\frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}\int_{t-\varepsilon}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = C\frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}\varepsilon^{1/2} \leqslant C\frac{\omega(T^{1/2})}{t_1^{1/2}}\varepsilon^{1/2}.$$

Выбирая ε достаточно малым, получим

$$|J_1(x,t)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

для любых $x\geqslant g(t)$, $t\in[t_1,T]$. Оценим $J_2(x,t)$. Пусть

$$D_{t_1} = \{(x,t)\in D : t\geqslant t_1\}, \quad \Sigma_{t_1} = \{(x,t)\in\Sigma : t\geqslant t_1\}.$$

В силу непрерывности подынтегральной функции по x, t, τ собственный интеграл $J_2(x,t)$ непрерывен по своим аргументам и, следовательно, равномерно непрерывен на любом двумерном компакте, содержащем Σ_{t_1}. Поэтому существует такое $\delta=\delta(\varepsilon,\varepsilon_0)>0$, что

$$|J_2(x,t)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

при $|x-g(t)|<\delta$ для любых $t\in[t_1,T]$. Лемма доказана. $\square$

Определим оператор $A\colon C[0,T]\to C[0,T]$, действующий на функции $\varphi\in C[0,T]$ по формуле

$$A\varphi(t) = \int_0^t h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad t\in[0,T], \tag{24}$$

где функция h определена равенством (21).

Лемма 3. *Пусть для g выполнено условие* (10). *Тогда для любой функции $\varphi\in C[0,T]$ справедливы оценки*

$$|A\varphi(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\omega(t^{1/2}), \tag{25}$$

$$|\Delta_t A\varphi| = |A\varphi(t+\Delta t)-A\varphi(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\omega((\Delta t)^{1/2}), \tag{26}$$

где $0\leqslant t<t+\Delta t\leqslant T$.

Доказательство. Докажем (25). Из оценки (22) следует, что

$$|A\varphi(t)| \leqslant C\int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}|\varphi(\tau)|d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\omega(t^{1/2}).$$

Докажем (26). В случае $t \leqslant \Delta t$ эта оценка сразу следует из (25). Пусть $t > \Delta t$. Имеем

$$\Delta_t A\varphi = \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} K(t+\Delta t, \tau)\varphi(\tau)d\tau - \int\limits_{t-\Delta t}^{t} K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_{0}^{t-\Delta t} \Big\{K(t+\Delta t,\tau) - K(t,\tau)\Big\}\varphi(\tau)d\tau = I_1(t,\Delta t) + I_2(t,\Delta t) + I_3(t,\Delta t).$$

Интегралы $I_1(t,\Delta t)$ и $I_2(t,\Delta t)$ оцениваются аналогично. Оценим, например, $I_1(t,\Delta t)$:

$$|I_1(t,\Delta t)| \leqslant \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t+\Delta t-\tau)^{1/2}}|\varphi(\tau)|d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\omega((\Delta t)^{1/2}).$$

Оценим $I_3(t,\Delta t)$. Имеем

$$|\Delta_t h(t,\tau)| \leqslant \Big|Z_x\big(g(t+\Delta t) - g(\tau), t+\Delta t;\tau\big) - Z_x\big(g(t) - g(\tau), t+\Delta t;\tau\big)\Big| +$$
$$+ \Big|Z_x\big(g(t) - g(\tau), t+\Delta t;\tau\big) - Z_x\big(g(t) - g(\tau), t;\tau\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant C\bigg\{\frac{\omega((\Delta t)^{1/2})(\Delta t)^{1/2}}{(t-\tau)^{3/2}} + |\Delta t|\frac{\omega((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^2}\bigg\} \leqslant C\frac{\omega((\Delta t)^{1/2})(\Delta t)^{1/2}}{(t-\tau)^{3/2}},$$

если $t - \tau \geqslant \Delta t$. Поэтому

$$|I_3(t,\Delta t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\omega((\Delta t)^{1/2}).$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in C[0,T]$, а g удовлетворяет условию (10). Тогда для всех $t^0 > 0$ имеет место соотношение*

$$\lim_{(x,t)\to(g(t^0),t^0)} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\varphi(t^0)}{2a(t^0)} + \int\limits_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0;\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in D_+. \tag{27}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\left|\frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\varphi(t^0)}{2a(t^0)} - \int\limits_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0;\tau)\varphi(\tau)d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\varphi(t)}{2a(t)} - \int\limits_0^{t} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t) - g(\tau), t;\tau)\varphi(\tau)d\tau\right| +$$
$$+ |A\varphi(t) - A\varphi(t^0)| + \left|\frac{\varphi(t^0)}{2a(t^0)} - \frac{\varphi(t)}{2a(t)}\right|,$$

лемм 2, 3 и непрерывности функций φ, a на $[0,T]$. □

Из лемм 2—4 следует утверждение теоремы 2 для $t^0 > 0$. Справедливость этого утверждения для $t^0 = 0$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 5. *Для любой функции $\varphi \in C_0[0,T]$ имеем*

$$\lim_{(x,t)\to(g(0),0)} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_+. \tag{28}$$

Доказательство. Пусть ω_φ — модуль непрерывности функции φ на $[0,T]$. Утверждение леммы вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\left|\int_0^t \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x-g(\tau),t;\tau)\varphi(\tau)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \left|\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x-g(\tau),t;\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))\right|d\tau \leqslant C\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{|x-g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-c\frac{(x-g(\tau))^2}{(t-\tau)}\right\}\omega_\varphi(\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_\varphi(t)\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{|x-g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-c\frac{(x-g(\tau))^2}{(t-\tau)}\right\}d\tau \leqslant C\omega_\varphi(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0. \quad \square$$

Из теорем 1, 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (10)*. Тогда для любой функции* $\varphi \in C_0[0,T]$ *потенциал* $\varphi \in C_0^{2,1}(\overline{D}_\pm)$ *и имеет место оценка*

$$\left\|S\varphi; D_\pm\right\|^{2,1} \leqslant C\|\varphi;[0,T]\|^0. \tag{29}$$

3. Система граничных интегральных уравнений.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1), (2)*. Тогда для любых* $\psi_1,\psi_2 \in C_0^1[0,T]$ *система интегральных уравнений Вольтерры первого рода*

$$\sum_{k=1}^{2}\int_0^t Y(g_l(t)-g_k(\tau),t;\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_l(t), \quad l=1,2, \quad t\in[0,T], \tag{30}$$

имеет единственное в $C[0,T]$ *решение* $\varphi_1,\varphi_2 \in C_0[0,T]$*, и справедливы оценки*

$$\|\varphi_l\|^0 \leqslant C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1), l=1,2. \tag{31}$$

Доказательство. Учитывая определение (6), применим к обеим частям первого уравнения системы (30) оператор дифференцирования по t:

$$\lim_{\tau\to t-0}\varphi_1(t)\int_0^{+\infty} Z\big(g_1(t)-g_1(\tau)+r,t;\tau\big)dr+$$

$$+\int_0^t \varphi_1(\tau)d\tau\int_0^{+\infty}\Big(Z_x\big(g_1(t)-g_1(\tau)+r,t;\tau\big)g_1'(t) + Z_t\big(g_1(t)-g_1(\tau)+r,t;\tau\big)\Big)dr+$$

$$+\lim_{\tau\to t-0}\varphi_2(t)\int_0^{+\infty} Z\big(g_1(t)-g_2(\tau)+r,t;\tau\big)dr+$$

$$+\int_0^t \varphi_2(\tau)d\tau\int_0^{+\infty}\Big(Z_x\big(g_1(t)-g_2(\tau)+r,t;\tau\big)g_1'(t) + Z_t\big(g_1(t)-g_2(\tau)+r,t;\tau\big)\Big)dr = \psi_1'(t),$$

где $0\leqslant t\leqslant T$. Заметим, что

$$\int_0^{+\infty} Z(r,t;\tau)dr = \frac{1}{2},$$

и в силу (11), (13)

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}\Big\{Z\big(g_1(t)-g_1(\tau)+r,t;\tau\big)-Z(r,t;\tau)\Big\}dr\right|\leqslant C\omega((t-\tau)^{1/2})\to 0,\quad \tau\to t-0.$$

Кроме того, в силу условия (2) и оценок (11), (13)

$$\Big|Z(g_1(t)-g_2(\tau)+r,t;\tau)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|Z\big(g_1(t)-g_2(t)+r,t;\tau\big)\Big|+\Big|Z\big(g_1(t)-g_2(\tau)+r,t;\tau\big)-Z\big(g_1(t)-g_2(t)+r,t;\tau\big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant C\left(1+\frac{|g_2(t)-g_2(\tau)|}{t-\tau}\right)\exp\left\{-c\frac{r^2}{t-\tau}\right\}\leqslant C\frac{\omega((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-c\frac{r^2}{t-\tau}\right\},$$

и поэтому

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}Z(g_1(t)-g_2(\tau)+r,t;\tau)dr\right|\leqslant C\omega((t-\tau)^{1/2})\to 0,\quad \tau\to t-0.$$

В результате после дифференцирования первое уравнение системы (30) приобретает вид

$$\varphi_1(t)+2\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t K_{1j}(t,\tau)\varphi_j(\tau)d\tau=2\psi_1'(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где

$$K_{11}(t,\tau)=\int\limits_0^{+\infty}\Big(Z_x\big(g_1(t)-g_1(\tau)+r,t;\tau\big)g_1'(t)+Z_t\big(g_1(t)-g_1(\tau)+r,t;\tau\big)\Big)dr=I_1(t,\tau)+I_2(t,\tau),$$

$$K_{12}(t,\tau)=\int\limits_0^{+\infty}\Big(Z_x\big(g_1(t)-g_2(\tau)+r,t;\tau\big)g_1'(t)+Z_t\big(g_1(t)-g_2(\tau)+r,t;\tau\big)\Big)dr=I_3(t,\tau)+I_4(t,\tau).$$

Для ядер $K_{1j}(t,\tau)$, $j=1,2$, справедливы оценки

$$\big|K_{1j}(t,\tau)\big|\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}},\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad j=1,2.$$

Действительно, оценим $I_1(t,\tau)$:

$$\big|I_1(t,\tau)\big|=Z\big(g_1(t)-g_1(\tau),t;\tau\big)|g_1'(t)|\leqslant C\frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Оценим $I_2(t,\tau)$:

$$\big|I_2(t,\tau)\big|=\Big|a(t)Z_x\big(g_1(t)-g_1(\tau),t;\tau\big)\Big|\leqslant C\frac{|g_1(t)-g_1(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Оценим $I_3(t,\tau)$:

$$\big|I_3(t,\tau)\big|=Z\big(g_1(t)-g_2(\tau),t;\tau\big)\big|g_1'(t)\big|\leqslant C\frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Оценим $I_4(t,\tau)$:

$$\big|I_4(t,\tau)\big|=\Big|a(t)Z_x\big(g_1(t)-g_2(\tau),t;\tau\big)\Big|\leqslant C\left\{\frac{|g_1(t)-g_1(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}+\frac{|g_1(\tau)-g_2(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant C\left\{\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}+\frac{C}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{d^2}{t-\tau}\right\}\right\}\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Аналогично, дифференцируя обе части второго уравнения системы (30), получаем:

$$\varphi_2(t) + 2\sum_{j=1}^{2}\int_0^t K_{2j}(t,\tau)\varphi_j(\tau)d\tau = 2\psi_2'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где

$$K_{21}(t,\tau) = \int_0^{+\infty} \Big(Z_x\big(g_2(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau\big) g_2'(t) + Z_t\big(g_2(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau\big)\Big) dr,$$

$$K_{22}(t,\tau) = \int_0^{+\infty} \Big(Z_x\big(g_2(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau\big) g_2'(t) + Z_t\big(g_2(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau\big)\Big) dr,$$

причем справедливы оценки

$$\big|K_{2j}(t,\tau)\big| \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad j = 1, 2.$$

В результате в силу условия $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0,T]$ получаем эквивалентную систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода:

$$\varphi_l(t) + 2\sum_{j=1}^{2}\int_0^t K_{lj}(t,\tau)\varphi_j(\tau)d\tau = 2\psi_l'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad l = 1, 2. \tag{32}$$

При этом для ядер интегральных операторов имеет место оценка

$$\big|K_{ij}(t,\tau)\big| \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}, \quad i,j = 1, 2, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T. \tag{33}$$

Умножая каждое из уравнений системы (32) на $e^{-\lambda t}$, где $\lambda > 0$ будет выбрано ниже, получаем эквивалентную систему:

$$\varphi_l^*(t) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^t K_{lj}^*(t,\tau)\varphi_j^*(\tau)d\tau = \psi_l^*(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad l = 1, 2,$$

где $\varphi_i^*(t) := \varphi_i(t)e^{-\lambda t}$, $\psi_i^*(t) := 2\psi_i'(t)e^{-\lambda t}$, $K_{ij}^*(t,\tau) = 2K_{ij}(t,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$. Введем обозначения

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* \end{pmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix},$$

где

$$B_{ij}^*\varphi_i^*(t) = \int_0^t K_{ij}^*(t,\tau)\varphi_i^*(\tau)d\tau.$$

Пользуясь данными обозначениями, запишем систему (32) в операторном виде:

$$\varphi^* + B_\lambda\varphi^* = \psi^*. \tag{34}$$

Покажем, что $\lambda > 0$ можно выбрать достаточно большим, так что оператор $B_\lambda\colon \widetilde{C}[0,T] \to \widetilde{C}[0,T]$ будет сжимающим. Под $\widetilde{C}[0,T]$ понимаем пространство вектор-функций, каждая компонента которой является элементом пространства $C[0,T]$, с нормой $\|\varphi^*\|^0 = \max\big\{\|\varphi_1^*\|^0,\ \|\varphi_2^*\|^0\big\}$.

Если $0 < t \leqslant \varepsilon^2$, то в силу (33)

$$\big|B_\lambda\varphi^*(t)\big| \leqslant C\|\varphi^*\|^0\int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}d\tau \leqslant C\omega(\varepsilon)\|\varphi^*\|^0\int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \leqslant C\omega(\varepsilon)\|\varphi^*\|^0.$$

Выбираем $\varepsilon > 0$ так, что

$$C\omega(\varepsilon) < \frac{1}{4}. \tag{35}$$

Если $t > \varepsilon^2$, то

$$\begin{aligned}\big|B_\lambda\varphi^*(t)\big| \leqslant C\|\varphi^*\|^0 \int\limits_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \leqslant \\ \leqslant C\|\varphi^*\|^0 \left\{ \int\limits_0^{\varepsilon^2} \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} d\tau + \int\limits_{\varepsilon^2}^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \right\} \leqslant \\ \leqslant C\|\varphi^*\|^0 (I_1(t) + I_2(t,\lambda)).\end{aligned}$$

В силу (35)

$$\big|I_1(t)\big| \leqslant C\omega(\varepsilon) < \frac{1}{4}.$$

Оценим $I_2(t,\lambda)$:

$$\big|I_2(t,\lambda)\big| \leqslant C\frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \int\limits_0^t \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \leqslant C\frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{1}{\lambda^{1/2}}.$$

Выберем $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ так, что $C\omega(\varepsilon) < 1/2$. В итоге для выбранного λ получаем

$$\|B_\lambda\| \leqslant \frac{3}{4}.$$

Следовательно, уравнение (34) имеет единственное решение $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in C[0,T]$ и справедливы оценки

$$\|\varphi_i^*\|^0 \leqslant C\big(\|\psi_1^*\|^1 + \|\psi_2^*\|^1\big), \quad i = 1, 2.$$

Наконец, из вида системы (32) и условий $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0,T]$ делаем вывод, что $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in C_0[0,T]$. Возвращаясь к первоначальным функциям φ_1, φ_2 окончательно получаем утверждение теоремы. Теорема доказана. □

4. Доказательство основной теоремы. Решение задачи (3)—(5) ищем в виде суммы потенциалов (7). Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in C[0,T]$ функция u удовлетворяет уравнению (3) и начальному условию (4). Подставляя (7) в граничные условия (5), получаем систему интегральных уравнений Вольтерры первого рода (8) для определения неизвестных плотностей φ_k, $k = 1, 2$. Из теоремы 4 следует, что система (8) имеет единственное решение $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0[0,T]$, и справедливы оценки

$$\|\varphi_l\|^0 \leqslant C\big(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1\big), \quad l = 1, 2. \tag{36}$$

Подставляя найденные плотности φ_1, φ_2 в сумму потенциалов (7), получаем, что функция u из (7) является решением задачи (3)—(5). Кроме того, из теоремы 3 и неравенства (36) делаем вывод, что найденное решение $u \in C_0^{2,1}(\overline{\Omega})$, и верна оценка

$$\|u; \Omega\|^{2,1} \leqslant C\big(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1\big).$$

Теорема доказана.

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность профессору Е. А. Бадерко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 2. — С. 198–208.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.
3. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Усп. мат. наук. — 1962. — *17*, № 3 (105). — С. 3-–146.
4. *Камынин Л. И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка// 4 — 1974. — *15*. — С. 806–834.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
6. *Семаан Х.* О решении второй краевой задачи для параболических систем в областях на плоскости с негладкой боковой границей Деп. ВИНИТИ РАН. — 26.02.99. №567–В99..
7. *Солонников В. А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа// Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. — 1964. — *70*. — С. 133–212.
8. *Baderko E. A., Cherepova M. F.* Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients// Compl. Var. Ellipt. Equ. — 2019. — *64*, № 5. — P. 753–765.

Федоров Константин Дмитриевич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
E-mail: konstantin-dubna@mail.ru