ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 47–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-47-53

УДК 517.977

ОПЕРАТОРНЫЕ ФОРМЫ И МЕТОДЫ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2022 г. **А. С. БУЛДАЕВ, В. А. ДУМНОВ**

Аннотация. Рассматриваются новые конструктивные формы известных условий оптимальности управления в управляемых системах с ограничениями в форме задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Построенные формы условий оптимальности позволяют применить теорию и методы неподвижных точек для разработки новых итерационных алгоритмов поиска экстремальных управлений в рассматриваемом классе задач оптимального управления с ограничениями.

Ключевые слова: управляемая система с ограничениями, принцип максимума, оператор управления, задача о неподвижной точке, итерационный алгоритм.

OPERATOR FORMS AND METHODS OF THE MAXIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CONSTRAINTS

© 2022 **A. S. BULDAEV, V. A. DUMNOV**

Abstract. New constructive forms of well-known optimality conditions for constrained controlled systems in the form of fixed point problems in the control space are considered. Optimality conditions proposed allows one to apply the theory and methods of fixed points to develop new iterative algorithms for finding extremal controls in the class of constrained optimal control problems.

Keywords and phrases: controlled system with constraints, maximum principle, control operator, fixed point problem, iterative algorithm.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Известные необходимые условия оптимальности управления в форме принципа максимума в задачах оптимального управления с ограничениями формулируются на основе перехода к вспомогательным задачам без ограничений с функционалами Лагранжа. При этом поиск экстремальных, то есть удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, управлений, существенно осложняется вопросом подбора соответствующих множителей Лагранжа. Классический подход в задачах с ограничениями, основанный на решении краевой задачи принципа максимума в пространстве состояний, имеет теоретическое значение и редко применяется в расчетах прикладных задач. Основной подход состоит в построении релаксационных последовательностей управлений на базе конструируемых условий улучшения управления, сходящихся при определенных условиях к экстремальным управлениям. В частности, широкую известность получили градиентные методы и их модификации [3, 4], являющиеся локальными методами улучшения управления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-030005) и Бурятского госуниверситета (проект 2021 г.).

Нелокальные методы улучшения управления в задачах оптимального управления в последние десятилетия активно развивались в иркутской школе методов оптимизации и оптимального управления под руководством профессоров В. И. Гурмана и В. А Срочко [5,7], а также в Москве под руководством профессора В. Ф. Кротова [11].

В [1, 2, 9, 10] были разработаны новые методы нелокального улучшения управления на основе представления условий улучшения управления в форме задач о неподвижной точке операторов управления в пространстве управлений в различных классах задач оптимального управления, в [1] — в классе полиномиальных по состоянию задач, в [2] — в классе задач со смешанными управляющими функциями и параметрами, в [9, 10] — в классах задач с ограничениями, в том числе с нефиксированным временем. Эти подходы неподвижных точек в пространстве управлений основываются на построении нестандартных формул приращения функционалов задачи, не содержащих остаточных членов разложений, и являются развитием подхода нелокального улучшения управления в пространстве состояний, первоначально разработанного в линейных и линейно-квадратичных по состоянию задачах оптимального управления без ограничений [7].

В настоящей работе рассматривается новый подход к поиску экстремальных управлений в задачах с ограничениями, который основывается на представлении необходимых условий оптимальности в форме задач о неподвижной точке операторов управления в пространстве управлений в отличие от известной краевой задачи принципа максимума в пространстве фазовых и сопряженных состояний. Предлагаемый подход неподвижных точек дает возможность применить и модифицировать хорошо развитые методы неподвижных точек для решения систем необходимых условий оптимальности в задачах с ограничениями. Предлагаемые формы и методы принципа максимума являются расширением и обобщением рассмотренных моделей и методов принципа максимума в задачах без ограничений [8].

2. Задача с ограничениями. Рассматривается класс задач оптимального управления с ограничениями, приводимых к следующему каноническому виду:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$
$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$\Phi_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) + \int_T F_0(x(t), u(t), t) \to \inf_{u \in V}, \tag{2}$$

$$\Phi_1(u) = \varphi_1(x(t_1)) = 0, \tag{3}$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)))$ — вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ — вектор управляющих функций, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ — замкнутое выпуклое множество. Интервал T фиксирован. В качестве доступных управляющих функций рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в множестве $U : V = \{v \in PC(T) : v(t) \in U, \ t \in T\}$. Функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$, функции $F_0(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ и их частные производные по x, u непрерывны по совокупности аргументов на множестве $\mathbb{R}^n \times U \times T$. Функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $\mathbb{R}^n \times U \times T$ с константой $L > 0$:

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

К виду (1)—(3) стандартными способами штрафования за нарушение ограничений могут быть сведены многие задачи оптимального управления с фазовыми и терминальными ограничениями.

Доступное управление $u \in V$ называется допустимым, если выполняется функциональное ограничение (3). Множество допустимых управлений обозначим

$$D = \{v \in V : \Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1)) = 0\}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу без ограничений на основе функционала Лагранжа:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{4}$$
$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$L^{\lambda}(u) = \lambda_0 \Phi_0(u) + \lambda_1 \Phi_1(u) \to \inf_{u \in V}, \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \neq 0. \tag{5}$$

Функция Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in \mathbb{R}^n$ и стандартная сопряженная система в задаче Лагранжа (4)—(5) имеют вид

$$H^\lambda(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle - \lambda_0 F_0(x,u,t),$$
$$\dot\psi(t) = -H_x^\lambda(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \tag{6}$$
$$\psi(t_1) = -\varphi_x^\lambda(x(t_1)), \quad \varphi^\lambda(x) = \lambda_0\varphi_0(x) + \lambda_1\varphi_1(x).$$

Для доступного управления $v \in V$ обозначим через $x(t,v)$, $t \in T$, решение системы (1) при $u(t) = v(t)$, а через $\psi^\lambda(t,v)$, $t \in T$, — решение стандартной сопряженной системы (6) при $x(t) = x(t,v)$ и $u(t) = v(t)$.

Известное необходимое условие оптимальности (принцип максимума) для допустимого управления $v \in V$ в задаче (1)—(3) при некотором $\lambda \neq 0$ в введенных обозначениях записывается в виде:

$$v(t) = \arg\max_{w \in U} H^\lambda(\psi^\lambda(t,v), x(t,v), w, t), \quad t \in T. \tag{7}$$

В качестве следствия отсюда следует известное ослабленное необходимое условие (дифференциальный принцип максимума), которое в проекционной форме представляется в виде:

$$v(t) = P_U(v(t) + \alpha H_u^\lambda(\psi^\lambda(t,v), x(t,v), v(t), t)), \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

Здесь вводится обозначение P_U для оператора проектирования на множество $U \subset \mathbb{R}^m$ в евклидовой норме.

Отметим, что условие (8) достаточно проверить хотя бы для одного $\alpha > 0$. В линейной по управлению задаче (1)—(3) (функции $f(x,u,t)$, $F_0(x,u,t)$ линейны по аргументу u) условия (7) и (8) являются эквивалентными.

Используя отображение

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{w \in U} H^\lambda(\psi, x, w, t), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T,$$

условие (7) может быть представлено в следующем виде:

$$v(t) = u^*(\psi^\lambda(t,v), x(t,v), t), \quad t \in T.$$

Вводя отображение для $\alpha > 0$

$$w^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(u + \alpha H_u^\lambda(\psi, x, w, t)), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in U, \quad t \in T,$$

условие (8) можно записать в форме

$$v(t) = w^\alpha(\psi^\lambda(t,v), x(t,v), v(t), t), \quad t \in T, \quad \alpha > 0.$$

Вырожденный случай ($\lambda_0 = 0$) необходимых условий оптимальности в конкретных задачах оптимального управления, как правило, исследуется аналитически с учетом ограничения (3). В регулярном случае ($\lambda_0 = 1$) для поиска экстремальных управлений к указанным необходимым условиям оптимальности присоединяется условие ограничения (3), и полученные системы уравнений (3), (7) и (3), (8) относительно пары неизвестных $(v, \lambda_1) \in V \times \mathbb{R}$ решаются численными методами.

В данной работе для регулярного случая предлагается новый подход для поиска экстремальных управлений на основе конструируемых условий принципа максимума в форме операторных задач о неподвижной точке.

3. Операторные формы принципа максимума. Определим отображение X с помощью соотношения

$$X(v) = x, \quad v \in V, \quad x(t) = x(t,v), \quad t \in T.$$

Второе отображение Ψ сконструируем аналогичным образом:

$$\Psi(v) = \psi, \quad v \in V, \quad \psi(t) = \psi^\lambda(t,v), \quad t \in T.$$

Третье отображение V^* построим в виде

$$V^*(\psi, x) = v^*, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T),$$

$$v^*(t) = u^*(\psi(t), x(t), t) = \arg\max_{w \in U} H^\lambda(\psi(t), x(t), w, t), \quad t \in T,$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций. Здесь зависимость отображения Ψ, V^* и других вводимых далее отображений от множителя Лагранжа явно не указывается, чтобы не загромождать вводимые обозначения.

В результате условие (7) можно представить как операторное уравнение в форме задачи о неподвижной точке в пространстве управлений:

$$v = V^*(\Psi(v), X(v)) = G_1^*(v), \quad v \in V. \tag{9}$$

Построим новые операторные уравнения, эквивалентные условию (7).

Введем отображение X^* следующим образом:

$$X^*(\psi) = x, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T),$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$v = V^*(\Psi(v), X^*(\Psi(v))) = G_2^*(v), \quad v \in V. \tag{10}$$

Построим следующее отображение:

$$\Psi^*(x) = \psi, \quad x \in C(T), \quad \psi \in C(T),$$

в котором $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x^\lambda(\psi(t), x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x^\lambda(x(t_1)).$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$v = V^*(\Psi^*(X(v)), X(v)) = G_3^*(v), \quad v \in V. \tag{11}$$

В соответствии с работой [8], операторные уравнения (9)—(11) в рассматриваемой регулярной задаче Лагранжа (4), (5) без ограничений являются эквивалентными на множестве доступных управлений. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнения* (9) — (11) *являются эквивалентными условию принципа максимума* (7).

Условие дифференциального принципа максимума в проекционной форме (8) можно также представить в виде эквивалентных операторных уравнений на множестве доступных управлений.

Введем вспомогательный оператор V^α, $\alpha > 0$ соотношением

$$V^\alpha(\psi, x, v) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v \in V,$$

$$v^\alpha(t) = w^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t) = P_U(v(t) + \alpha H_u^\lambda(\psi(t), x(t), v(t), t)), \quad t \in T.$$

Определим оператор X^α, $\alpha > 0$:

$$X^\alpha(\psi, v) = x^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad v \in V, \quad x^\alpha(t) = x^\alpha(t, \psi, v), \quad t \in T.$$

где $x^\alpha(t, \psi, v)$, $t \in T$ — решение задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Построим оператор Ψ^α, $\alpha > 0$:

$$\Psi^\alpha(x, v) = \psi^\alpha, \quad x \in C(T), \quad v \in V, \quad \psi^\alpha(t) = \psi^\alpha(t, x, v),$$

где $\psi^\alpha(t, x, v)$, $t \in T$ — решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x^\lambda(\psi(t), x(t), w^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x^\lambda(x(t_1)).$$

Рассмотрим три операторных уравнения:

$$v = V^\alpha(\Psi(v), X(v), v) = G_1^\alpha(v), \qquad v \in V, \quad \alpha > 0, \tag{12}$$

$$v = V^\alpha(\Psi(v), X^\alpha(\Psi(v), v), v) = G_2^\alpha(v), \quad v \in V, \quad \alpha > 0, \tag{13}$$

$$v = V^{\alpha}(\Psi^{\alpha}(X(v), v), X(v), v) = G_3^{\alpha}(v), \quad v \in V, \quad \alpha > 0. \tag{14}$$

Аналогично, в соответствии с работой [8], эти уравнения являются эквивалентными в регулярной задаче Лагранжа на множестве доступных управлений. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Уравнения* (12)—(14) *являются эквивалентными условию дифференциального принципа максимума* (8).

4. Операторные методы принципа максимума. Для численного решения задачи о неподвижной точке оператора $G\colon V_E \to V_E$, действующего на множестве V_E в полном нормированном пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E$,

$$v = G(v), \quad v \in V_E,$$

можно применить метод простой итерации с индексом $k \geqslant 0$, имеющий форму итерационного процесса:

$$v^{k+1} = G(v^k), \quad v^0 \in V_E.$$

Сходимость процесса простой итерации в полном нормированном пространстве можно анализировать с помощью известного принципа сжимающих отображений [6].

Каждое операторное уравнение из соотношений (9)—(14), дополненное условием ограничения (3), можно рассматривать как специальную задачу о неподвижной точке на множестве доступных управлений с дополнительным алгебраическим уравнением следующего вида:

$$v = G(v), \quad v \in V, \tag{15}$$

$$\Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1, v)) = 0. \tag{16}$$

Для решения задачи (15), (16) предлагается итерационный процесс с индексом $k \geqslant 0$:

$$v^{k+1} = G(v^k), \quad v^0 \in V, \tag{17}$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0. \tag{18}$$

Таким образом, в регулярной задаче оптимального управления ($\lambda_0 = 1$) на каждой итерации предлагаемого процесса решается неявно заданное уравнение (18) относительно скалярного множителя Лагранжа $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Предполагается, что такое решение существует. В результате, итерационные приближения процесса (17), (18), начиная с индекса $k = 1$, принадлежат множеству допустимых управлений. При этом начальное приближение процесса $v^0 \in V$ при $k = 0$ может выбираться недопустимым. Указанные свойства предлагаемого итерационного процесса являются важными для практической реализации поиска экстремальных управлений. В частности, итерационный процесс (17), (18) можно использовать для поиска приемлемых на практике допустимых управлений для достижения заданных значений критерия оптимальности.

В соответствии с [8] в качестве примеров предлагаемого вида (17), (18), выпишем итерационные процессы для решения соответствующих задач о неподвижной точке на основе уравнений (13) и (14).

Для решения задачи о неподвижной точке

$$v = V^{\alpha}(\Psi(v), X^{\alpha}(\Psi(v), v), v) = G_2^{\alpha}(v), \quad v \in V, \quad \alpha > 0,$$
$$\Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1, v)) = 0,$$

применяется итерационный процесс

$$v^{k+1} = V^{\alpha}(\Psi(v^k), X^{\alpha}(\Psi(v^k), v^k), v^k) = G_2^{\alpha}(v^k), \quad v^0 \in V, \quad \alpha > 0, \quad t \in T, \tag{19}$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0. \tag{20}$$

Для решения задачи о неподвижной точке

$$v = V^{\alpha}(\Psi^{\alpha}(X(v), v), X(v), v) = G_3^{\alpha}(v), \quad v \in V, \quad \alpha > 0,$$
$$\Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1, v)) = 0,$$

применяется итерационный процесс:

$$v^{k+1} = V^{\alpha}(\Psi^{\alpha}(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k) = G_3^{\alpha}(v^k), \quad v^0 \in V, \quad \alpha > 0, \quad t \in T, \tag{21}$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0. \tag{22}$$

Для оценки вычислительной эффективности указанных итерационных процессов важно отметить, что трудоемкость решения уравнений (19) и (21) относительно управления $v^{k+1}(t)$, $t \in T$ составляет две задачи Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Действительно, на k-й итерации при $k \geqslant 0$ процесса (19) после вычисления решения задачи Коши $\psi(t, v^k)$, $t \in T$ находится решение $x(t)$, $t \in T$ специальной задачи Коши для фазовой системы:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w^{\alpha}(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Затем строится выходное управление по правилу:

$$v^{k+1}(t) = w^{\alpha}(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T.$$

При этом, по построению, выполняется соотношение:

$$x(t) = x(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

В силу этого равенства итерационный процесс (19), (20) в поточечной форме можно записать в следующем неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = w^{\alpha}(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0.$$

Аналогично, на k-й итерации процесса (21) после вычисления $x(t, v^k)$, $t \in T$ находится решение $\psi(t)$, $t \in T$ специальной задачи Коши для сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), w^{\alpha}(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)).$$

Затем строится выходное управление по правилу:

$$v^{k+1}(t) = w^{\alpha}(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T.$$

Отметим, что в линейной по состоянию задаче (1)—(3) (функции $f(x, u, t)$, $F_0(x, u, t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ линейны по переменной x) решение специальной задачи Коши $\psi(t)$, $t \in T$ удовлетворяет соотношению:

$$\psi(t) = \psi(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Следовательно, в этом линейном по состоянию случае процесс (21), (22) можно записать в следующем неявном поточечном виде:

$$v^{k+1}(t) = w^{\alpha}(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0.$$

Также отметим, что только на начальной итерации процесса (19) при $k = 0$ при вычислении решения $\psi(t, v^0)$, $t \in T$ требуется решить дополнительную задачу Коши для получения $x(t, v^0)$, $t \in T$.

Условия сходимости итерационных процессов (19), (20) и (21), (22) при достаточно малых параметрах проектирования $\alpha > 0$ можно обосновать в полном пространстве непрерывных или измеримых функций аналогично работе [1] на основе определения требований, обеспечивающих известное свойство «сжимания» для оператора правой части соответствующих задач о неподвижной точке.

В построенных проекционных методах неподвижных точек, в отличие от стандартного метода проекции градиента, параметр проектирования $\alpha > 0$ фиксируется в итерационном процессе последовательных приближений управления. Таким образом, на каждой итерации предлагаемых методов релаксация по целевому функционалу не гарантируется. Свойство релаксации компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления; отсутствием операции варьирования управления в окрестности текущего приближения для обеспечения улучшения управления, характерной для градиентных методов; возможностью получения экстремальных управлений при достаточно малых параметрах проектирования, обеспечивающих принципиальную сходимость итерационных процессов.

В задачах с ограничениями предлагаемые методы неподвижных точек для поиска экстремальных управлений обеспечивают удовлетворение ограничений задачи на каждой итерации последовательных приближений управления за счет выбора множителя Лагранжа. Это позволяет решить принципиальную проблему выбора множителей Лагранжа в задачах с ограничениями и сузить размерность пространства поиска экстремальных управлений в задачах с ограничениями до пространства допустимых управлений.

5. Заключение. В рассматриваемом классе задач оптимального управления с ограничениями предложены новые операторные формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке в пространстве управлений, которые позволяют эффективно применить и модифицировать известный аппарат теории и методов неподвижных точек для конструирования итерационных алгоритмов поиска экстремальных управлений.

Разработанные итерационные операторные методы поиска экстремальных управлений характеризуются свойствами нелокальности и допустимости последовательных приближений управления; отсутствием трудоемкой процедуры игольчатого или выпуклого варьирования управления в малой окрестности рассматриваемого приближения, характерной для градиентных методов; наличием в проекционных методах одного основного настроечного проекционного параметра, регулирующего сходимость итерационного процесса.

Указанные свойства предлагаемого подхода поиска экстремальных управлений являются важными факторами для повышения эффективности численного решения задач оптимального управления с ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булдаев А. С.* Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. ун-та, 2008.
2. *Булдаев А. С., Хишектуева И.-Х. Д.* Метод неподвижных точек в задачах оптимизации нелинейных систем по управляющим функциям и параметрам// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2017. — *19.* — С. 89–104.
3. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994.
4. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
5. *Гурман В. И., Батурин В. А., Данилина Е. В. и др.* Новые методы улучшения управляемых процессов. — Новосибирск: Наука, 1987.
6. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
7. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
8. *Buldaev A. S.* Operator forms of the maximum principle and iterative algorithms in optimal control problems// Commun. Comput. Inform. Syst. — 2020. — *1340.* — P. 101–112.
9. *Buldaev A. S., Burlakov I. D.* About one approach to numerical solution of nonlinear optimal speed problems// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2018. — *11*, № 4. — С. 55–66.
10. *Buldaev A. S., Burlakov I. D.* On a method for finding extremal controls in systems with constraints// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — *30.* — С. 16–30.
11. *Krotov V. F.* Global Methods in Optimal Control. — New York: Marcel Dekker, 1996.

Булдаев Александр Сергеевич
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
E-mail: buldaev@mail.ru

Думнов Владислав Александрович
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
E-mail: uuvladdum@gmail.com