ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 80–88
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-80-88

УДК 517.9

О КОРРЕКТНОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА—НЕРСЕСЯНА

© 2022 г. **М. В. ПЛЕХАНОВА, Е. М. ИЖБЕРДЕЕВА**

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия корректности линейных обратных коэффициентных задач для вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной Джрбашяна—Нерсесяна в банаховых пространствах. Исследована обратная задача с обобщенными условиями Шоуолтера—Сидорова и с постоянным неизвестным коэффициентом в уравнении при условии p-ограниченности пары операторов в нем. Общий результат использован для исследования обратной задачи для системы уравнений динамики вязкоупругой жидкости Кельвина—Фойгта с дробной производной Джрбашяна—Нерсесяна по времени.

***Ключевые слова*:** дробное дифференциальное уравнение, дробная производная Джрбашяна—Нерсесяна, вырожденное эволюционное уравнение, обратная коэффициентная задача.

ON THE WELL-POSEDNESS OF AN INVERSE PROBLEM FOR A DEGENERATE EVOLUTIONARY EQUATION WITH THE DZHRBASHYAN–NERSESYAN FRACTIONAL DERIVATIVE

© 2022 **M. V. PLEKHANOVA, E. M. IZHBERDEEVA**

Abstract. In this paper, we find necessary and sufficient conditions for the well-posedness of linear inverse coefficient problems for degenerate evolutionary equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative in Banach spaces. We examine an inverse problem with a constant unknown coefficient under the generalized Showalter–Sidorov conditions and the condition of p-boundedness of a pair of operators in it. The general result is applied to the inverse problem for the system of dynamics of a viscoelastic Kelvin–Voigt fluid with the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative in time.

***Keywords and phrases*:** fractional differential equation, fractional Dzhrbashyan–Nersesyan derivative, degenerate evolution equation, inverse coefficient problem.

***AMS Subject Classification*:** 35R11, 35R30, 34G10

1. Введение. В банаховых пространствах $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ рассмотрим обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D^{\sigma_k}(Px)(0) = x_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Вьетнамской академией наук и технологий (проект № 21-51-54003).

и условием переопределения

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T. \tag{3}$$

Здесь $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — линейный непрерывный оператор из $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ с нетривиальным ядром, т.е. $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — линейный замкнутый плотно определенный в $\mathcal{X}$ оператор, действующий в $\mathcal{Y}$, D^{σ_k} — дробные производные Джрбашяна—Нерсесяна, определяемые набором чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$, x_k, $k = 0, \ldots, n-1$, x_T — заданные векторы, $u \in \mathcal{Y}$ неизвестен, P — проектор на подпространство без вырождения. Предполагается, что скалярная функция μ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$. Интеграл в условии (3) понимается как векторный интеграл Римана—Стилтьеса. Под решением обратной задачи понимается пара (x, u), найденная из соотношений (1)—(3).

Обратные задачи находят свое применение во многих прикладных областях исследования, например, в астрономии, геофизике и др. [20]. В то же время развитие дробного исчисления в последние десятилетия обусловлено созданием новых математических моделей систем со сложными свойствами (см., например, [9]). Обратные задачи для дробных уравнений в последние годы привлекают интерес исследователей, в основном исследуются уравнения с единичным или обратимым оператором при производной Герасимова—Капуто или Римана—Лиувилля [1,2,18,19]. Отдельно отметим работы В. Е. Федорова и его соавторов, в которых исследуются обратные коэффициентные задачи как для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка, так и для уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной [10–16].

Понятие производной Джрбашяна—Нерсесяна, введенное в работе [3], включает в себя в качестве частных случаев производные Герасимова—Капуто и Римана—Лиувилля. В работе [3] исследованы вопросы разрешимости начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами при производных Джрбашяна—Нерсесяна. Различные задачи для дифференциальных уравнений с такими производными рассматривались в работах А. В. Псху [7, 8].

Во втором разделе данной работы приведены основные определения и сформулированы теоремы об однозначной разрешимости прямой задачи (1), (2) при $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$, $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, исследованной ранее авторами в работе [17], и о корректности обратной задачи (1)—(3) с $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$, $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ из работы [6]. В третьем разделе найдены необходимые и достаточные условия корректности обратной задачи для вырожденного эволюционного уравнения (1)—(3) при условии (L, p)-ограниченности оператора M, $\ker L \neq \{0\}$. Наконец, четвертый раздел содержит приложение полученного абстрактного результата для исследования корректности обратной коэффициентной задачи для системы уравнений Осколкова с дробной производной Джрбашяна—Нерсесяна по времени.

2. Невырожденная обратная задача. При $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, введем в рассмотрение дифференциальные операции

$$D^{\sigma_0} z(t) = D_t^{\alpha_0 - 1} z(t), \tag{4}$$

$$D^{\sigma_k} z(t) = D_t^{\alpha_k - 1} D_t^{\alpha_{k-1}} D_t^{\alpha_{k-2}} \ldots D_t^{\alpha_0} z(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где $D_t^\beta := J_t^{-\beta}$ — дробный интеграл Римана—Лиувилля при $\beta < 0$, D_t^0 — тождественный оператор, $D_t^\beta := D_t^m J_t^{m-\beta}$ — дробная производная Римана—Лиувилля при $\beta > 0$, $m := \lceil \beta \rceil$. Дробная производная Джрбашяна—Нерсесяна [3] порядка σ_n, ассоциированная с последовательностью $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, определяется соотношениями (4), (5), ее частными случаями являются дробные производные Римана—Лиувилля ($\alpha_0 \in (0, 1)$, $\alpha_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$) и Герасимова—Капуто ($\alpha_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\alpha_n \in (0, 1)$).

Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0, T], \tag{6}$$

где $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна—Нерсесяна, σ_n определяется набором чисел $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, по формулам (4), (5), $T > 0$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Z}$.

Снабдим уравнение (6) условиями

$$D^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^T z(t)d\mu(t) = z_T. \tag{8}$$

Функция μ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,T]$, под интегралом в условии (8) понимается векторный интеграл Римана—Стилтьеса, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ известны.

Сначала рассмотрим задачу (6), (7), когда известен $u \in \mathcal{Z}$. Решением задачи (6), (7) будем называть функцию $z\colon (0,T] \to \mathcal{Z}$, для которой $D_t^{\sigma_k} z \in C([0,T];\mathcal{Z})$, $k = 0, \ldots, n-1$, $D_t^{\sigma_n} z \in C((0,T];\mathcal{Z})$, выполняется равенство (6) при всех $t \in (0,T]$ и условия (7).

Для $\alpha, \beta > 0$ будем использовать функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) \coloneqq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad z \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

Введем также обозначения

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Теорема 1 (см. [17]). *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Z}$. Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k + \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A)\varphi(s) u ds$$

является единственным решением задачи (6), (7).

Теперь рассмотрим задачу (6)—(8), предполагая, что элемент $u \in \mathcal{Z}$ неизвестен. Решением задачи (6)—(8) будем называть пару (z, u), где $z : (0,T] \to \mathcal{Z}$ является решением задачи (6), (7) с соответствующим $u \in \mathcal{Z}$ и удовлетворяет условию (8). Для краткости решением часто будем называть элемент $u \in \mathcal{Z}$.

Назовем задачу (6)—(8) корректной, если для любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, \ldots, n-1$, и $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $u \in \mathcal{Z}$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C\left(\sum_{k=0}^{n-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}}\right),$$

где $C > 0$ не зависит от z_k, $k = 0, \ldots, n-1$, и z_T.

Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A. Введем в рассмотрение

$$\psi(A) \coloneqq z_T - \int\limits_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k d\mu(t) \in \mathcal{Z}.$$

Характеристической функцией обратной задачи (6)—(8) назовем функцию

$$\chi(\lambda) \coloneqq \int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}\lambda)\varphi(s) ds, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2 (см. [6]). *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации. Тогда задача* (6)—(8) *корректна в том и только в том случае, когда* $\chi(\lambda) \neq 0$ *для всех* $\lambda \in \sigma(A)$. *Решение задачи* (6)—(8) *в случае его существования имеет вид* $u = (\chi(A))^{-1}\psi(A)$.

3. Вырожденная обратная задача. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{X}$, действующих в пространство $\mathcal{Y}$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_M — область определения оператора M, снабженная нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M\cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Определим L-резольвенту оператора M как

$$\rho^L(M) := \Big\{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\Big\},$$

L-спектр оператора M как $\sigma^L(M) := \mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$; также определим правую и левую L-резольвенты оператора M:

$$R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}.$$

Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Лемма 1 (см. [21]). *Пусть оператор* M *является* (L,σ)*-ограниченным и* $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. *Тогда операторы*

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$$

являются проекторами.

Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$; $\mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на подпространство $\mathcal{X}^k$ $(D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{X}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 3 (см. [21]). *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен.*

(i) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$.

Обозначим $G := M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен и $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

Лемма 2 (см. [17]). *Пусть* $G \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ *— нильпотентный оператор степени* $p \in \mathbb{N}_0$, *для* $l = 0, 1, \ldots, p$ *существуют* $(D^{\sigma_n}G)^l g \in C((0,T];\mathcal{X})$ *и для* $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *и* $l = 0, 1, \ldots, p$ *существуют* $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}G)^l g \in C([0,T];\mathcal{X})$. *Тогда существует единственное решение уравнения*

$$D^{\sigma_n}Gx(t) = x(t) + g(t)$$

и оно имеет вид

$$x(t) = -\sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}G)^l g(t).$$

Рассмотрим обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0,T], \tag{9}$$

$$D^{\sigma_k}(Px)(0) = x_k \in \mathcal{X}^1, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^T x(t)d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}. \tag{11}$$

в котором, как и прежде, D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна—Нерсесяна, которая определяется набором чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, элемент $u \in \mathcal{Y}$ неизвестен.

В силу (L,p)-ограниченности оператора M задача (9)—(11) эквивалентна системе двух задач на подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$:

$$D^{\sigma_n}Gx^0(t) = x^0(t) + \varphi(t)M_0^{-1}u^0, \tag{12}$$

$$\int_0^T x^0(t)d\mu(t) = x_T^0, \tag{13}$$

и

$$D^{\sigma_n}x^1(t) = L_1^{-1}M_1x^1(t) + \varphi(t)L_1^{-1}u^1, \tag{14}$$

$$D^{\sigma_k}x^1(0) = x_k, \quad k = 0,\ldots,n-1, \tag{15}$$

$$\int_0^T x^1(t)d\mu(t) = x_T^1, \tag{16}$$

где

$$x^0(t) = (I-P)x(t), \quad x^1(t) = Px(t), \quad x_T^0 = (I-P)x_T, \quad x_T^1 = Px_T, \quad u^0 = (I-Q)u, \quad u^1 = Qu.$$

Задачу (12), (13) назовем корректной, если для любого $x_T^0 \in \mathcal{X}^0$ существует единственное решение $u^0 \in \mathcal{Y}^0$, для которого справедлива оценка

$$\|u^0\|_{\mathcal{Y}^0} \leqslant C(\|x_T^0\|_{\mathcal{X}^0} + \|M_0x_T^0\|_{\mathcal{Y}^0}),$$

где $C > 0$ не зависит от x_T^0.

Пусть

$$f_l(s) = \int_0^s (D^{\sigma_n})^l\varphi(t)d\mu(t), \quad l = 0,\ldots,p,$$

$$F(s)v = M_0\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+1}\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{f_l(s)G^l}{f_0(s)}\right)^k\frac{v}{f_0(s)}, \quad s \in (0,T], \quad v \in \mathcal{X}^0.$$

Лемма 3. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$*,*

$$(D^{\sigma_n})^lG^l\varphi \in C((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)), \qquad l = 0,1,\ldots,p,$$
$$D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n})^lG^l\varphi \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)), \quad k = 0,1,\ldots,n-1,\ l = 0,1,\ldots,p,$$

$\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации. Задача* (12), (13) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0.$$

Решение задачи (12), (13) *в случае его существования имеет вид* $u^0 = F(T)x_T^0$.

Доказательство. По лемме 2 уравнение (12) имеет единственное решение вида

$$x^0(t) = -\sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}G)^l\varphi(t)M_0^{-1}u^0. \tag{17}$$

Найдем u^0. Если $f_0(T) \neq 0$, подставляя (17) в (13), имеем

$$\left(I + \sum_{l=1}^{p}\frac{f_l(T)G^l}{f_0(T)}\right)M_0^{-1}u^0 = -\frac{x_T^0}{f_0(T)}.$$

Из нильпотентности оператора G получим

$$u^0 = M_0 \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \left(\sum_{l=1}^{p} \frac{f_l(T) G^l}{f_0(T)} \right)^k \frac{x_T^0}{f_0(T)} = F(T) x_T^0.$$

Отсюда же следует единственность решения задачи (12), (13). Корректность задачи следует из вида решения.

Пусть

$$f_0(T) \coloneqq \int_0^T \varphi(t) d\mu(t) = 0,$$

тогда

$$\left(\sum_{l=1}^{p} f_l(T) G^{l-1} \right) G M_0^{-1} u^0 = -x_T^0.$$

Поскольку оператор M является (L,p)-ограниченным, то $\ker L \cap \ker M = \{0\}$. Возьмем элемент $v \in M_0[\ker L \setminus \{0\}]$. Тогда

$$\left(\sum_{l=1}^{p} f_l(T) G^{l-1} \right) G M_0^{-1} (u^0 + v) = -x_T^0.$$

Следовательно, решение задачи (12), (13) не единственно. □

При условии (L,σ)-ограниченности оператора M введем обозначение $S \coloneqq L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$,

$$\psi(S) \coloneqq x_T^1 - \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) x_k d\mu(t) \in \mathcal{X}^1.$$

Теорема 4. *Пусть оператор M является (L,p)-ограниченным, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$,*

$$(D^{\sigma_n})^l G^l \varphi \in C((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)), \qquad l = 0,1,\dots,p,$$
$$D^{\sigma_k} (D^{\sigma_n})^l G^l \varphi \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)), \quad k = 0,1,\dots,n-1, \ l = 0,1,\dots,p,$$

$\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Задача (9)—(11) корректна в том и только в том случае, когда $\chi(\lambda) \neq 0$ при всех $\lambda \in \sigma^L(M)$,

$$\int_0^T \varphi(t) d\mu(t) \neq 0.$$

Решение задачи (9)—(11) в случае его существования имеет вид

$$u = (\chi(S))^{-1} \psi(S) + F(T)(I-P) x_T.$$

Доказательство. Задача (9)—(11), как упоминалось ранее, эквивалентна совокупности задач (12), (13) и (14)—(16). Условия разрешимости задачи (12), (13) сформулированы в лемме 3, а для разрешимости задачи (14)—(16) — в теореме 2. Необходимо только отметить, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ существует оператор $(\lambda L_0 - M_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ в силу нильпотентности оператора G и равенства

$$(\lambda L_0 - M_0)^{-1} = (\lambda G - I)^{-1} M_0^{-1} = -\sum_{k=0}^{p} \lambda^k G^k M_0^{-1}.$$

Следовательно, $\sigma^{L_0}(M_0) = \emptyset$ и $\sigma^L(M) = \sigma^{L_1}(M_1) = \sigma(L_1^{-1} M_1)$. В итоге

$$u = u^0 + u^1 = (\chi(S))^{-1} \psi(S) + F(T)(I-P) x_T.$$ □

4. Обратная задача для системы уравнений в частных производных. Рассмотрим обратную задачу для линеаризованной системы уравнений динамики вязкоупругой жидкости Кельвина—Фойгта [5] с производной Джрбашяна—Нерсесяна по времени

$$D_t^{\sigma_k} v(\xi,0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0,1,\dots,n-1, \tag{18}$$

$$v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{19}$$

$$D_t^{\sigma_n}(1-\beta\Delta)v(\xi,t) = c\Delta v(\xi,t) - r(\xi,t) + \varphi(t)u(\xi), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{20}$$

$$\nabla \cdot v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{21}$$

$$\int_0^T v(\xi,t)d\mu(t) = v_T(\xi), \quad \xi \in \Omega. \tag{22}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\beta, c \in \mathbb{R}$, $D_t^{\sigma_k}$ — производные Джрбашяна—Нерсесяна по переменной t, $k = 0,1,\dots,n$, вектор-функция $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ — скорость жидкости, $r = (r_1, r_2, \dots, r_d)$ — градиент давления; неизвестные вектор-функции v, r, $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$.

Пусть $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^d$ и $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^d$. Замыкание множества

$$\mathcal{L} = \Big\{ v \in (C_0^\infty(\Omega))^d : \nabla \cdot v = 0 \Big\}$$

в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а его замыкание в норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Также будем использовать обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma\colon \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$ и $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортогональные проекторы.

Оператор $A = \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ (см. [4]). Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора A, занумерованные в порядке невозрастания с учетом их кратностей, и обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную в $\mathbb{H}_\sigma$ систему соответствующих собственных функций, образующую базис в $\mathbb{H}_\sigma$.

Учитывая граничное условие (19) и уравнение несжимаемости (21), положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \tag{23}$$

$$L = \begin{pmatrix} I-\beta A & \mathbb{O} \\ -\beta\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} cA & \mathbb{O} \\ c\Pi\Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \tag{24}$$

$\mathcal{X}$ состоит из пар вектор-функций $x = (v, r)$, где $v \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $r \in \mathbb{H}_\pi$ (см. уравнения (20), (21)).

Лемма 4 (см. [16]). *Пусть $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \notin \sigma(A)$, пространства имеют вид* (23), *а операторы L и M определены формулами* (24). *Тогда оператор M является $(L,0)$-ограниченным. Более того,*

$$\sigma^L(M) = \Big\{ c\lambda_k/(1-\beta\lambda_k) : k \in \mathbb{N} \Big\},$$

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ c\Pi\Delta(I-\beta A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\beta\Pi\Delta(I-\beta A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная задача (18)—(22) имеет вид (9)—(11). Принимая во внимание, что $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_{M_1} = \mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P$ изоморфно $\mathbb{H}_\sigma^2$, корректность задачи (18)—(22) означает существование решения $u \in \mathbb{L}_2$ для всех $v_k \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $k = 0,1,\dots,m-1$, $v_T \in \mathbb{H}_\sigma^2$, удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant C\bigg(\sum_{k=0}^{m-1} \|v_k\|_{\mathbb{H}^2} + \|v_T\|_{\mathbb{H}^2} \bigg).$$

Теорема 5. *Пусть $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \notin \sigma(A)$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $D^{\sigma_k}\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Задача* (18)—(22) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0$$

и неравенство $\chi(c\lambda_k/(1-\beta\lambda_k)) \neq 0$ *выполнено для всех* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из вида проекций P и Q следует, что $\mathcal{X}^0 = \ker P = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$ и $\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$. Следовательно, условие (18) равносильно условию вида (10). По лемме 4 оператор M в задаче (18)—(22) является $(L,0)$-ограниченным в условиях данной теоремы. Таким образом, утверждение следует из теоремы 4. □

Теперь пусть $\beta^{-1} \in \sigma(A)$. Обозначим через $\mathbb{M}_0$ множество таких индексов $k \in \mathbb{N}$, что $\lambda_k = \beta^{-1}$, и через $\mathbb{M}_1$ — множество $\mathbb{N} \setminus \mathbb{M}_0$.

Лемма 5 (см. [16])**.** *Пусть* $c\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \in \sigma(A)$, *пространства имеют вид* (23), *а операторы* L *и* M *определены формулами* (24). *Тогда оператор* M $(L,1)$*-ограничен. Более того,*

$$\sigma^L(M) = \Big\{c\lambda_k/(1-\beta\lambda_k) : k \in \mathbb{M}_1\Big\},$$

$$P = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ c\Pi\Delta \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ -\beta\Pi\Delta \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что в силу найденного вида проектора P начальные условия (10) эквивалентны условиям

$$D_t^{\sigma_k}(1-\beta\Delta)v(\xi,0) = y_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{25}$$

Имеем

$$D_t^{\sigma_l}(1-\beta\Delta)v(\cdot,0) = \sum_{k\in\mathbb{M}_1}(1-\beta\lambda_k)\big\langle D_t^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\big\rangle\varphi_k = \sum_{k\in\mathbb{M}_1}\big\langle y_l,\varphi_k\big\rangle\varphi_k,$$

поэтому

$$\big\langle D_t^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\big\rangle = \frac{\big\langle y_l,\varphi_k\big\rangle}{1-\beta\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{M}_1, \quad l = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$c\Pi\Delta\sum_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\big\langle D_t^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\big\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} = c\Pi\Delta\sum_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\big\langle y_l,\varphi_k\big\rangle}{(1-\beta\lambda_k)^2}, \quad l = 0,1,\ldots,n-1.$$

Таким образом, с помощью условий (25) определены выражения $D_t^{\sigma_l}Px(\cdot,0)$, $l = 0,1,\ldots,n-1$.

Теорема 6. *Пусть* $c\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \in \sigma(A)$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $D^{\sigma_k}\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации. Задача* (19)—(22), (25) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int\limits_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0$$

и неравенство $\chi(c\lambda_k/(1-\beta\lambda_k)) \neq 0$ *выполнено для всех* $k \in \mathbb{M}_1$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что оператор M для задачи (19)—(22), (25) является $(L,1)$-ограниченным и $\mathcal{X}^0 = \ker P = \mathrm{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{X}^1 = \mathrm{im}\, P = (\mathrm{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_1\} \cap \mathbb{H}_\sigma^2) \times \{0\}$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q = \mathrm{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y}^1 = \mathrm{im}\, Q = \mathrm{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_1\} \times \{0\}$. Следовательно, утверждение данной теоремы следует из теоремы 4 и леммы 5. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушак А. В.* Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Совр. мат. Фундам. напр. — 2006. — *15*. — С. 126–141.
2. *Глушак А. В.* Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 5. — С. 684–693.
3. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка// Изв. АН Арм. ССР. — 1968. — *3*, № 4. — С. 1–28.
4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: ГИФМЛ, 1961.

5. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта// Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — *179.* — С. 126–164.
6. *Плеханова М. В., Ижбердеева Е. М.* Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Джрбашяна—Нерсесяна// Мат. 3 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (Иркутск, 2021). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2021. — С. 52–53.
7. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка// Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — *73*, № 2. — С. 141–182.
8. *Псху А. В.* Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования// Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — *13.* — С. 1078–1098.
9. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
10. *Федоров В. Е., КостичМ.* Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова—Капуто// Диффер. уравн. — 2021. — *57*, № 1. — С. 100–113.
11. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова—Капуто в секториальном случае// Изв. Иркут. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — *28.* — С. 123–137.
12. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *167.* — С. 97–111.
13. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Линейные обратные задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Герасимова—Капуто в секториальном случае// Мат. заметки СВФУ. — 2020. — *27*, № 2. — С. 54–76.
14. *Fedorov V. E., Ivanova N. D.* Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — *20*, № 3. — P. 706–721.
15. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S.* A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — *44*, № 15. — P. 11961–11969.
16. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostic M.* A class of inverse problems for fractional-order degenerate evolution equations// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2021. — *29*, № 2. — P. 173–184.
17. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M.* Initial-value problems for linear equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative in Banach spaces// Symmetry. — 2021. — *13*, № 6. — P. 1058.
18. *Liu Y., Rundell W., Yamamoto M.* Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2016. — *19*, № 4. — P. 888–906.
19. *Orlovsky D. G.* Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space// J. Sib. Univ. Math. Phys. — 2015. — *8*, № 1. — P. 55–63.
20. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York–Basel: Marcel Dekker, 2000.
21. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — VSP, 2003.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский государственный университет, Челябинск;
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), Челябинск
E-mail: `mariner79@mail.ru`

Ижбердеева Елизавета Монировна
Челябинский государственный университет
E-mail: `elizaveta.izhberdeeva@gmail.com`