ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 89–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-89-95

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2022 г. **Д. О. ТРУНИН**

Аннотация. В классе линейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями рассматривается задача нелокального улучшения допустимого управления с сохранением всех терминальных ограничений. К решению данной задачи улучшения применяется подход, основанный на решении специальной системы функциональных уравнений. Соответствующая система интерпретируется как задача о неподвижной точке, к решению которой применяется аппарат теории неподвижных точек.

***Ключевые слова*:** задача оптимального управления, нелокальное улучшение, терминальное ограничение, функциональное уравнение, задача о неподвижной точке.

ON ONE APPROACH TO THE OPTIMIZATION OF STATE-LINEAR CONTROLLED SYSTEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

© 2022 **D. O. TRUNIN**

Abstract. In the class of state-linear optimal control problems with terminal constraints, we consider the problem of nonlocal improvement of an admissible control preserving all terminal constraints. We apply an approach based on solving a special system of functional equations. The corresponding system is interpreted as a fixed-point problem; to the solution of this problem we apply the theory of fixed points.

***Keywords and phrases*:** optimal control problem, nonlocal improvement, terminal constraint, functional equation, fixed-point problem.

***AMS Subject Classification*:** 49M20

1. Введение. Задачи оптимизации линейных по состоянию систем являются актуальными при моделировании многих управляемых естественно-научных и социальных процессов [3, 6, 8–10]. Прикладные задачи обычно приводят к постановкам задач оптимального управления с дополнительными ограничениями на управляемые системы. Здесь помимо прямых поточечных ограничений на управление возникают ограничения на фазовую траекторию, в том числе терминального типа.

Локальные численные методы оптимального управления, в частности, градиентные методы [2] характеризуются процедурой локального варьирования управлений для обеспечения улучшения

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-030005-р-а) и Бурятского государственного университета (проект 2021 г.).

целевого функционала задачи. При этом процедура игольчатого варьирования управлений может приводить к получению труднореализуемого на практике управления (например, наличие участков частого переключения управления с минимального на максимальное значение). Сходимость указанных методов по невязке принципа максимума делает невозможным улучшение управлений, удовлетворяющих принципу максимума.

В классе задач оптимизации линейных по состоянию систем успешно развиваются и применяются нелокальные подходы и методы. В частности, глобальный метод Кротова [9, 10], методы, основанные на принципе расширения [3, 8], методы параметризации [6].

В работе [5] разработаны процедуры нелокального улучшения управлений в классе линейных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом с линейным по состоянию целевым функционалом. Эти процедуры основаны на точных формулах приращения целевого функционала и не содержат операцию параметрического варьирования, что является существенным фактором повышения эффективности данных процедур. Нелокальность улучшения управления в классе линейных по состоянию задач оптимального управления достигается ценой решения специальной задачи Коши.

В работе [7] процедуры нелокального улучшения обобщаются на класс линейных по состоянию задач оптимального управления с частично закрепленным правым концом. Для нелокального улучшения допустимого управления с сохранением всех терминальных ограничений требуется решить специальную краевую задачу с разрывной и многозначной правой частью в общем случае.

В данной работе к нелокальному улучшению допустимых управлений в рассматриваемом классе задач оптимального управления предлагается подход, основанный на решении специальной системы функциональных уравнений, эквивалентной краевой задаче улучшения. Эта система функциональных уравнений может быть интерпретирована как специальная задача о неподвижной точке с дополнительным алгебраическим уравнением, что позволяет применить к ее решению известный [4] аппарат теории и методов неподвижных точек, аналогично работе [1] в задачах без ограничений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную по состоянию задачу оптимального управления с одним терминальным ограничением

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \tag{2}$$

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} [\langle d(u,t), x\rangle + g(u,t)]dt \to \min, \tag{3}$$

$$x_1(t_1) = x_1^1. \tag{4}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор управления, функции $A(u,t)$, $b(u,t)$, $d(u,t)$ и $g(u,t)$ непрерывны по (u,t) на $\mathbb{R}^r \times T$, U — компактное множество в $\mathbb{R}^r$, $c \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор, причем $c_1 = 0$; начальное состояние $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и действительное число x_1^1 заданы, интервал T фиксирован.

К виду (1)—(4) с одним терминальным ограничением могут быть приведены многие линейные по состоянию задачи с фазовыми, терминальными и смешанными ограничениями методом наложения штрафов за нарушение ограничений.

В задаче (1)—(4) определим множество доступных управлений

$$V = \big\{u \in PC^r(T) : u(t) \in U,\ t \in T\big\}.$$

Для управления $u \in V$ обозначим через $x(t,u)$, $t \in T$ решение задачи Коши (1), (2) при $u = u(t)$. Введем множество допустимых управлений:

$$W = \big\{u \in V : x_1(t_1,u) = x_1^1\big\}.$$

Определим функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in \mathbb{R}^n$:

$$H(\psi, x, u, t) = \big\langle \psi, A(u,t)x + b(u,t)\big\rangle - \big\langle d(u,t), x\big\rangle - g(u,t).$$

Рассмотрим сопряженную систему:

$$\dot{\psi} = -A(u,t)^T\psi + d(u,t), \tag{5}$$

$$\psi_1(t_1) = -\lambda, \tag{6}$$

$$\psi_i(t_1) = -c_i, i = \overline{2,n}. \tag{7}$$

Обозначим через $\psi(t,u,\lambda)$, $t \in T$ решение сопряженной системы (5)—(7) при $u = u(t)$.

Рассмотрим регулярный функционал Лагранжа

$$L(u,\lambda) = \Phi(u) + \lambda(x_1(t_1) - x_1^1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с [5] имеют место точные формулы приращения функционала Лагранжа:

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u^0,\lambda), x(t,v), u^0(t), t)dt, \tag{8}$$

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi(t,v,\lambda), x(t,u^0), u^0(t), t)dt. \tag{9}$$

Аналогично [5] введем в рассмотрение отображение

$$u^*(\psi,x,t) = \arg\max_{v\in U} H(\psi,x,v,t), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T. \tag{10}$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством

$$\Phi(v) \leqslant \Phi(u^0).$$

3. Процедуры улучшения. Точные формулы приращения (8), (9) открывают возможность для нелокального улучшения допустимого управления u^0. Условия улучшения могут быть сформулированы как системы функциональных уравнений с использованием отображения (10).

На основе формулы приращения (8) для нелокального улучшения допустимого управления u^0 достаточно решить систему функциональных уравнений

$$\begin{gathered} v(t) = u^*(\psi(t,u^0,\lambda), x(t,v), t), \\ x_1(t_1,v) = x_1^1. \end{gathered} \tag{11}$$

Аналогично на основе формулы приращения (9) достаточно решить систему функциональных уравнений

$$\begin{gathered} v(t) = u^*(\psi(t,v,\lambda), x(t,u^0), t), \\ x_1(t_1,v) = x_1^1. \end{gathered} \tag{12}$$

Для решения систем функциональных уравнений (11), (12), интерпретируемых как задачи о неподвижной точке с дополнительным уравнением, предлагаются итерационные процессы

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t,u^0,\lambda), x(t,v^k), t), \quad x_1(t_1,v^{k+1}) = x_1^1, \tag{13}$$

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t,v^k,\lambda), x(t,u^0), t), \quad x_1(t_1,v^{k+1}) = x_1^1, \tag{14}$$

где на каждой итерации процессов (13), (14) множитель Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$ выбирается из условия выполнения терминального ограничения. Итерационный процесс (13) рассматривается для решения системы (11), итерационный процесс (14) — для решения системы (12).

Для реализации итерационного процесса (13) предлагается следующий подход.

Положим $\psi_1(t_1) = -\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — неизвестный параметр (множитель Лагранжа), подлежащий определению. Обозначим через $\psi^\lambda(t)$, $t \in T$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{\psi} = -A(u^0(t),t)^T\psi + d(u^0(t),t), \\ &\psi_1(t_1) = -\lambda, \\ &\psi_i(t_1) = -c_i, \quad i = \overline{2,n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим управление

$$v^\lambda(t) = u^*(\psi^\lambda(t), x(t, v^k), t), \quad t \in T.$$

Для полученного управления найдем решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$, обычной задачи Коши

$$\dot{x} = A(v^\lambda(t), t)x + b(v^\lambda(t), t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x^0.$$

Множитель Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$ на каждой итерации процесса (13) выбирается из условия выполнения терминального ограничения:

$$x_1(t_1, v^\lambda) = x_1^1. \tag{15}$$

Для полученного решения $\lambda^k \in \mathbb{R}$ уравнения (15) определяется следующее приближение управления:

$$v^{k+1}(t) = v^{\lambda^k}(t), \quad t \in T.$$

Для реализации итерационного процесса (14) предлагается аналогичный подход. Положим $\psi_1(t_1) = -\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — неизвестный параметр (множитель Лагранжа), подлежащий определению. Обозначим через $\psi^\lambda(t)$, $t \in T$, решение задачи Коши

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi} = -A(v^k(t), t)^T \psi + d(v^k(t), t),\\
&\psi_1(t_1) = -\lambda,\\
&\psi_i(t_1) = -c_i, \quad i = \overline{2, n}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим управление

$$v^\lambda(t) = u^*(\psi^\lambda(t), x(t, u^0), t), \quad t \in T.$$

Для полученного управления найдем решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$ обычной задачи Коши

$$\dot{x} = A(v^\lambda(t), t)x + b(v^\lambda(t), t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x^0.$$

Множитель Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$ на каждой итерации процесса (14) выбирается из условия выполнения терминального ограничения

$$x_1(t_1, v^\lambda) = x_1^1. \tag{16}$$

Для полученного решения $\lambda^k \in \mathbb{R}$ уравнения (16) определяется следующее приближение управления:

$$v^{k+1}(t) = v^{\lambda^k}(t), \quad t \in T.$$

В качестве начального приближения итерационных процессов (13), (14) выбирается управление $v^0 \in V$. Отметим, что начальное приближение v^0 может не быть допустимым управлением, что является важным для практической реализации алгоритмов. Также отметим, что на итерациях процессов (13), (14) решаются обычные задачи Коши с предварительно вычисленным управлением. Итак, в отличие от процедуры улучшения управления, рассмотренной в [7], нет необходимости в решении специальных краевых задач с разрывной и многозначной правой частью.

Итерационные процессы (13), (14) продолжаются до первого улучшения управления u^0. Далее строится новая задача улучшения для полученного управления и процесс повторяется. Критерием остановки итераций улучшения управления является отсутствие улучшения управления по целевому функционалу.

Таким образом, формируются итерационные методы построения релаксационных последовательностей допустимых управлений.

Предлагаемые процедуры позволяют строго улучшать неоптимальные экстремальные управления, т.е. удовлетворяющие принципу максимума в рассматриваемом классе задач с ограничениями. Градиентные процедуры такой возможностью не обладают.

4. Примеры.

Пример 1 (улучшение управления, не удовлетворяющего принципу максимума)**.**

$$\dot{x} = u, \quad t \in T = [0,1], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T,$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = \frac{2}{3},$$

$$\Phi(u) = \int_0^1 x(u-1)dt \to \min .$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv -\frac{1}{3}$, $t \in T$, которому соответствует фазовая траектория $x(t, u^0) = -\frac{1}{3}t + 1$, $t \in T$, и значение целевого функционала $\Phi(u^0) = -\frac{10}{9}$.

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид

$$H = \psi u - x(u-1) = (\psi - x)u + x, \quad \dot{\psi} = u - 1, \quad \psi(1) = -\lambda.$$

Экстремальное отображение (10) задается формулой

$$u^*(\psi, x) = \operatorname{sign}(\psi - x).$$

В качестве начального приближения итерационного процесса (13) возьмем управление $v^0(t) \equiv 0$, $t \in T$. Соответствующая ему фазовая траектория — $x(t, v^0) \equiv 1$, $t \in T$. Соответствующая сопряженная система принимает вид

$$\dot{\psi} = -\frac{4}{3}, \quad \psi(1) = -\lambda.$$

Ее решение

$$\psi^\lambda(t) = -\frac{4}{3}t - \lambda + \frac{4}{3}, \quad t \in T.$$

Сформируем управление

$$v^\lambda(t) = \operatorname{sign}\left(-\frac{4}{3}t - \lambda + \frac{1}{3}\right), \quad t \in T.$$

Найдем решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$ задачи Коши

$$\dot{x} = \operatorname{sign}\left(-\frac{4}{3}t - \lambda + \frac{1}{3}\right), \quad x(0) = 1, \quad t \in T.$$

Условие

$$x(1, v^\lambda) = \frac{2}{3}$$

определяет значение множителя Лагранжа

$$\lambda = -\frac{1}{9}.$$

Соответствующее выходное управление имеет вид

$$v(t) = \begin{cases} 1, t \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right), \\ -1, t \in \left[\dfrac{1}{3}, 1\right], \end{cases}$$

а значение целевого функционала равно

$$\Phi(v) = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом, имеет место строгое улучшение исходного допустимого управления u^0

$$\Phi(v) < \Phi(u^0).$$

Пример 2 (улучшение управления, удовлетворяющего принципу максимума).

$$\dot{x} = (t-1)u, \quad t \in T = [0,2], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T,$$
$$x(0) = 0, \quad x(2) = 0,$$
$$\Phi(u) = \int\limits_0^2 x(u-1)dt \to \min .$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv 1$, $t \in T$, которому соответствует фазовая траектория $x(t,u^0) = \frac{1}{2}t^2 - t$, $t \in T$ и значение целевого функционала $\Phi(u^0) = 0$.

Функция Понтрягина и соответствующая сопряженная система имеют вид

$$H = \psi(t-1)u - x(u-1) = (\psi(t-1) - x)u + x, \quad \dot{\psi} = u - 1, \quad \psi(2) = -\lambda.$$

Экстремальное отображение (10) в рассматриваемом примере задается формулой

$$u^*(\psi, x, t) = \operatorname{sign}(\psi(t-1) - x).$$

В качестве начального приближения итерационного процесса (13) возьмем управление $v^0(t) \equiv 0$, $t \in T$. Соответствующая ему фазовая траектория $x(t,v^0) \equiv 0$, $t \in T$. Соответствующая сопряженная система принимает вид

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(2) = -\lambda;$$

ее решение —

$$\psi^\lambda(t) \equiv -\lambda, \quad t \in T.$$

Сформируем управление

$$v^\lambda(t) = \operatorname{sign}(\lambda(1-t)), \quad t \in T.$$

Найдем решение $x(t,v^\lambda)$, $t \in T$ задачи Коши

$$\dot{x} = (t-1)\operatorname{sign}(\lambda(1-t)), \quad x(0) = 0, \quad t \in T.$$

Условие

$$x(2, v^\lambda) = 0$$

определяет значение множителя Лагранжа

$$\lambda = 0.$$

Соответствующее выходное управление имеет вид

$$v(t) \equiv -1, \quad ,t \in T$$

а значение целевого функционала равно

$$\Phi(v) = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом, имеет место строгое улучшение удовлетворяющего регулярному принципу максимума исходного допустимого управления u^0:

$$\Phi(v) < \Phi(u^0).$$

5. Заключение. Выделим основные характерные особенности предлагаемого подхода к улучшению управления в рассматриваемом классе линейных по состоянию задач с ограничениями.

1. Нелокальность улучшения управления и отсутствие процедуры варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления в отличие от градиентных методов.
2. Выполнение терминального ограничения на каждой итерации улучшения управления.
3. Возможность строгого улучшения неоптимальных экстремальных управлений.
4. Решение обычных задач Коши с предварительно вычисленным управлением вместо решения специальных краевых задач с разрывной и многозначной правой частью.

Указанные свойства являются важными для повышения эффективности оптимизации управляемых систем с ограничениями.

Для линейной по состоянию и управлению (билинейная задача) задачи оптимального управления с одним терминальным ограничением с выпуклым множеством U предлагаемый подход может быть легко адаптирован с использованием отображения на основе операции проектирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булдаев А. С.* Методы неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *183*. — С. 22–34.
2. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: ИГУ, 1994.
3. *Гурман В. И., Матвеев Г. А., Трушкова Е. А.* Социо-эколого-экономическая модель региона в параллельных вычислениях// Управление большими системами. — 2011. — *32*. — С. 109–138.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
6. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — *30*. — С. 83–98.
7. *Buldaev A. S., Trunin D. O.* Nonlocal improvement of controls in state-linear systems with terminal constraints// Autom. Remote Control. — 2009. — *70*, № 5. — P. 743–749.
8. *Gurman V. I.* Turnpike solutions in optimal control problems for quantum mechanical systems// Autom. Remote Control. — 2011. — *72*, № 6. — P. 1248–1257.
9. *Krotov V. F.* Control of the quantum systems and some ideas of the optimal control theory// Autom. Remote Control. — 2009. — *70*, № 3. — P. 357–365.
10. *Krotov V. F., Bulatov A. V., Baturina O. V.* Optimization of linear systems with controllable coefficients// Autom. Remote Control. — 2011. — *72*, № 6. — P. 1199–1212.

Трунин Дмитрий Олегович
Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова, Улан-Удэ
E-mail: `tdobsu@yandex.ru`