ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 96–109
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-96-109

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ. III. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ГЛАДКИХ n-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа является третьей частью обзора по вопросам интегрируемости систем с любым числом n степеней свободы (первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *211.* — С. 41–74; вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212.* — С. 139–148). Обзор состоит из трех частей. В первой части подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. Во второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к n-мерной сфере. В данной третьей части рассматриваются динамические системы на касательных расслоениях к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система с большим числом степеней свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM: ANALYSIS AND INTEGRABILITY. III. SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLES OF SMOOTH n-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is the third part of a survey on the integrability of systems with a large number n of degrees of freedom (the first part: *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **211** (2022), pp. 41–74; the second part: *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **212** (2022), pp. 139–148). The review consists of three parts. In the first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field is described in detail. The second part is devoted to more general dynamical systems on the tangent bundles to the n-dimensional sphere. In this third part, we discuss dynamical systems on the tangent bundles to smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

Keywords and phrases: dynamical system with a large number of degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзорной по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с n степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы по системам с четырьмя и пятью степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое n-мерное многообразие, то его касательное (кокасательное) расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи (см. [6, 22, 30, 33]).

Работа состоит из трех частей. В первой части (см. [71]) проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики n-мерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении $(n-1)$-мерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

Во второй части (см. [72]) рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к n-мерной сфере. Указанные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по n-мерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В данной третьей части рассмотрены рассмотрены динамические системы на касательных расслоениях к достаточно обширным классам гладких n-мерных многообразий; для таких систем также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

3. Системы на касательных расслоениях к гладкому n-мерному многообразию

Выше было показано, что изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выше был также введен класс задач о движении точки по гладкой $(n-1)$-мерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего n-мерного пространства. В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В данном разделе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому n-мерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3 и 4 см. [66–68]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

3.1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы. Как известно, в случае n-мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^n\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_{n-1}; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, …, $\beta_{n-1} = x^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1.1}$$

Изучим структуру уравнений (3.1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^n. Рассмотрим обратимую почти всюду замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} R^{ij}(x)z_j, \quad z_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ji}(x)\dot{x}^i; \tag{3.1.2}$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i,j = 1,\ldots,n,$ — функции от $x^1,\ldots,x^n$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (3.1.2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^n.

Справедливы следующие тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{n} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{n} T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{n} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{3.1.3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j,i,k = 1,\ldots,n.$$

Подставляя в (3.1.3) уравнения (3.1.1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{n} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{n} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{3.1.4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1,\ldots,n$, надо подставить формулы (3.1.2), в результате чего в правой части последнего равенства будет стоять квадратичная форма по переменным z_j. Другими словами, равенство (3.1.4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{n} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k\Big|_{(3.1.2)} = 0, \tag{3.1.5}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{n} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{3.1.6}$$

Предложение 3.1.1. *Система* (3.1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$*, эквивалентна составной системе* (3.1.2)*,* (3.1.4)*.*

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (3.1.1) к эквивалентной системе уравнений (3.1.2), (3.1.4) зависит как от замены переменных (3.1.2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

3.2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -z_n, \tag{3.2.1a}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{3.2.1b}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{3.2.1c}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{3.2.1d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}), \tag{3.2.1e}$$

где $f_k(\alpha)$, $k=1,\dots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1,\dots,z_n$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических (в частности, на многомерных поверхностях вращения) с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \tag{3.2.2a}$$

$$\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \tag{3.2.2b}$$

$$\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \tag{3.2.2c}$$

$$\begin{gathered}\ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 + \\ + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\end{gathered} \tag{3.2.2d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{gathered}\ddot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \ldots \\ \ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\end{gathered} \tag{3.2.2e}$$

$$\ddot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots + \ + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0, \tag{3.2.2f}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (3.2.1) уравнения (3.1.4) примут вид

$$\begin{gathered}\dot z_1 = \Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big] z_1 z_n - \Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\ - \Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ - \Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big] f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\end{gathered} \tag{3.2.3a}$$

$$\begin{gathered}\dot z_2 = \Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\Big] z_2 z_n - \Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\Big] f_1(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ - \Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\Big] f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \ldots s_1(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\ - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \ldots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\end{gathered} \tag{3.2.3b}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{gathered}\dot z_{n-1} = \Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big] z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_{n-2}^2 - \ldots - \\ - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\end{gathered} \tag{3.2.3c}$$

$$\begin{gathered}\dot z_n = \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots + \\ + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1} f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2;\end{gathered} \tag{3.2.3d}$$

здесь $DQ(q) = d\ln|Q(q)|/dq$, и уравнения (3.2.2) почти всюду эквивалентны составной системе (3.2.1), (3.2.3) на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\dots,z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (3.2.1), (3.2.3) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно знать меньше, что будет показано ниже.

Предложение 3.2.1. *Если всюду на своей области определения выполняется система $n(n-1)/2$ равенств*

$$2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0, \tag{3.2.4a}$$

. . . .

$$2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \tag{3.2.4b}$$

$$\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\Big]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \tag{3.2.4c}$$

. . . .

$$\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]f_1^2(\alpha)+ \\ + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \tag{3.2.4d}$$

. . . .

$$\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big]f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3})+ \\ + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \tag{3.2.4e}$$

то система (3.2.1), (3.2.3) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_n,\dots,z_1) = z_1^2 + \dots + z_n^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{3.2.5}$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (3.2.5) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (3.2.4) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (3.2.4) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,\dots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ системы (3.2.4) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (3.2.5) для системы (3.2.1), (3.2.3) уравнений геодезических (3.2.2). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (3.2.4) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (3.2.1) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = \dots = f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{3.2.6}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (3.2.4):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \tag{3.2.7a}$$

. . . .

$$2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \tag{3.2.7b}$$

. . . .

$$2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3})+ \\ + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0. \tag{3.2.7c}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности через систему (3.2.7), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3.2.2. *Если выполнены свойства* (3.2.6), (3.2.7) *и справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \dots = \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{3.2.8}$$

то система (3.2.1), (3.2.3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha)=C_2=\mathrm{const},\tag{3.2.9}$$

$$\Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Предложение 3.2.3. *Если выполнены условия предложения* 3.2.2, *имеют место равенства*

$$g_1(\beta_1)=\ldots=g_{n-2}(\beta_1)=g(\beta_1),\tag{3.2.10}$$

$$\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)=\ldots=\Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1),\tag{3.2.11}$$

то система (3.2.1), (3.2.3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\mathrm{const},\tag{3.2.12}$$

$$\Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.2.4. *Если выполнены условия предложений* 3.2.2, 3.2.3, … *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}),\tag{3.2.13}$$

то система (3.2.1), (3.2.3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=C_n=\mathrm{const},\tag{3.2.14}$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\},\quad i(\beta_{n-2})=i_1(\beta_{n-2}).\tag{3.2.15}$$

Предложение 3.2.5. *Если выполнены условия предложений* 3.2.2, 3.2.3, …, 3.2.4, *то система* (3.2.1), (3.2.3) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_{n+1}(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta)=\beta_{n-1}\pm\int\limits_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_ni(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Phi_{n-2}^2(b)-C_n^2}}db=C_{n+1}=\mathrm{const}.\tag{3.2.16}$$

Набор первых интегралов (3.2.5), (3.2.9), (3.2.12), …, (3.2.14), (3.2.16) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.2.1), (3.2.3) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (3.2.16) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.2.16) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

3.3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы. Теперь несколько модифицируем систему (3.2.1), (3.2.3) при условиях (3.2.6)–(3.2.8), (3.2.10), (3.2.11), …, (3.2.13), получив систему консервативную. А именно наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (3.3.1). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\dot\alpha=-z_n,\tag{3.3.1a}$$

$$\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z^2_{n-1} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z^2_2 + \ldots + \\ + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z^2_1, \quad (3.3.1b)$$

$$\dot z_{n-1} = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z^2_{n-2} - \ldots - \\ - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z^2_1, \quad (3.3.1c)$$

. . . .

$$\dot z_2 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big]z_2z_n - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\Big]f(\alpha)z_2z_{n-1} - \ldots - \\ - \Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\Big]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})z_2z_3 - \\ - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z^2_1, \quad (3.3.1d)$$

$$\dot z_1 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big]z_1z_n - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\Big]f_1(\alpha)z_1z_{n-1} - \\ - \Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\Big]f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2} - \ldots - \\ - \Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\Big]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})z_1z_2, \quad (3.3.1e)$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f(\alpha), \quad (3.3.1f)$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \quad (3.3.1g)$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \quad (3.3.1h)$$

. . . .

$$\dot\beta_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \quad (3.3.1i)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_1 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$
$$\ddot\beta_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$
$$\ddot\beta_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + +\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_3 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$
$$\ddot\beta_3 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_4 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$

. . . .

$$\ddot\beta_{n-2} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$
$$\ddot\beta_{n-1} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0.$$

Предложение 3.3.1. *Если выполнены условия предложения* 3.2.1, *то система* (3.3.1) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1;\alpha) = z^2_1 + \ldots + z^2_n + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db. \quad (3.3.2)$$

Предложение 3.3.2. *Если выполнены условия предложений* 3.2.2, 3.2.3, …, 3.2.4, *то система* (3.3.1) *имеет гладкие первые интегралы вида* (3.2.9), (3.2.12), …, (3.2.14).

Предложение 3.3.3. *Если выполнены условия предложения* 3.2.5, *то система* (3.3.1) *имеет первый интеграл вида* (3.2.16).

Набор первых интегралов (3.3.2), (3.2.9), (3.2.12), ..., (3.2.14), (3.2.16) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.3.1) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (3.2.16) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.2.16) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [29]).

3.4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Теперь усложним систему (3.3.1) и получим систему с диссипацией. А именно наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha), \tag{3.4.1a}$$

$$\begin{aligned}\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \ldots +\\ + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\end{aligned} \tag{3.4.1b}$$

$$\begin{aligned}\dot z_{n-1} = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z^2_{n-2} - \ldots -\\ - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\end{aligned} \tag{3.4.1c}$$

....

$$\begin{aligned}\dot z_2 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big]z_2z_n - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\Big]f(\alpha)z_2z_{n-1} - \ldots -\\ - \Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\Big]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})z_2z_3 -\\ - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\end{aligned} \tag{3.4.1d}$$

$$\begin{aligned}\dot z_1 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big]z_1z_n - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\Big]f_1(\alpha)z_1z_{n-1} -\\ - \Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\Big]f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2} - \ldots -\\ - \Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\Big]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})z_1z_2,\end{aligned} \tag{3.4.1e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f(\alpha), \tag{3.4.1f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \tag{3.4.1g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \tag{3.4.1h}$$

....

$$\dot\beta_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{3.4.1i}$$

которая почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$

$$\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$

$$\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$

$$\begin{aligned}\ddot\beta_3 - b\dot\beta_3\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 +\\ + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,\end{aligned}$$

. . . .

$$\ddot\beta_{n-2} - b\dot\beta_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \ldots + \\ + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$

$$\ddot\beta_{n-1} - b\dot\beta_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0;$$

здесь $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (3.4.1) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \tag{3.4.2}$$

Введем также (по аналогии с (3.2.7)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (3.2.4):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{3.4.3}$$

Для полного интегрирования системы (3.4.1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_n = z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \quad w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},$$
$$w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}, \quad \ldots, \quad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_2^{n-2}}}$$

система (3.4.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -w_n + b\delta(\alpha), \\ \dot w_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w^2_{n-1}, \\ \dot w_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_{n-1}w_n, \end{cases} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{cases} \dot w_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\ \dot\beta_s = \pm\dfrac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots, \ s = 1,\ldots,n-2, \end{cases} \tag{3.4.5}$$

$$\dot\beta_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w^2_{n-2}}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{3.4.6}$$

где в системе (3.4.5) символом «. . .» показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.4.4)–(3.4.6) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.4.4), по одному — для систем (3.4.5) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.6) (т.е. всего $n+1$).

Теорема 3.4.1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{3.4.7}$$

Тогда при выполнении условий (3.4.2), (3.4.3) *система* (3.4.1) *обладает полным набором* $(n+1)$ *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Поставим в соответствие системе третьего порядка (3.4.4) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_n}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2}{-w_n + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] w_{n-1} w_n}{-w_n + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.4.8}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_n = u_n \delta(\alpha), \quad w_{n-1} = u_{n-1}\delta(\alpha),$$

приводим систему (3.4.8) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_n}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_{n-1}^2 + \delta'(\alpha) u_n^2 - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_{n-1} u_n + \delta'(\alpha) u_{n-1} u_n - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \end{cases} \tag{3.4.9}$$

$$F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.$$

При выполнении условий (3.4.7) система (3.4.9) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_n}{du_{n-1}} = \frac{\lambda + \kappa u_{n-1}^2 + u_n^2 - bu_n}{(1-\kappa) u_{n-1} u_n - bu_n}. \tag{3.4.10}$$

Уравнение (3.4.10) имеет вид уравнения Абеля (см. [29]). В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - bu_n + \lambda}{u_{n-1}} = C_1 = \text{const}, \tag{3.4.11}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{3.4.12}$$

Далее найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.4.4) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.4.11) при $u_{n-1} \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_n - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_{n-1} - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{3.4.13}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{3.4.14}$$

и фазовое пространство системы (3.3.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.4.13).

Таким образом, в силу соотношения (3.4.11) первое уравнение системы (3.4.9) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_n}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_n + u_4^2) - C_1 U_1(C_1, u_n)}{-u_n + b},$$

$$U_1(C_1, u_n) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.4.14). Дополнительный первый интеграл для системы (3.4.4) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{3.4.15}$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b-u_n)du_n}{2(\lambda - bu_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\}/2}, \quad u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (3.4.12). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (3.4.12), (3.4.15) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (3.4.5) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \dots, n-2, \tag{3.4.16}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n-2$, см. (3.2.12), ..., (3.2.14). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.6), находится по аналогии с (3.2.16):

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить соответствующие левые части равенства (3.4.16).

3.5. Замечания о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.4.4) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (3.3.2), (3.2.9). В силу (3.4.7)

$$\Phi_1(z_n, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db \cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{3.5.1}$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (3.4.3) и (3.4.7)

$$\Phi_2(z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\, f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\} \cong w_{n-1}\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.5.2}$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.5.1), (3.5.2) (или (3.3.2), (3.2.9)) также является первым интегралом системы (3.4.4) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{3.5.3}$$

и (3.5.2) по отдельности не является первым интегралом системы (3.4.4). Однако отношение функций (3.5.3), (3.5.2) является первым интегралом системы (3.4.4) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23*. — С. 46–51.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23*. — С. 71–86.

3. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
4. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
15. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
16. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
17. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
18. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
28. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.

31. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
32. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
33. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
34. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
35. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
36. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
37. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
38. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
39. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
40. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
41. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
42. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
43. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
48. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
49. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
50. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
51. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
53. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.

56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
57. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
70. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
71. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *211*. — С. xx–xx.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *212*. — С. xx–xx.
73. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
74. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
75. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
76. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru`, `shamolin@imec.msu.ru`