ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 160–169
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-160-169

УДК 519.24

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

© 2022 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. В работе установлены экстремальные свойства нечетких ожиданий и ожиданий нечетко-случайных величин. Введена новая средняя характеристика — скалярная случайная величина, характеризующая данную нечетко-случайную величину, и доказаны ее экстремальные свойства. Изучены линейные регрессии нечетко-случайных величин, получена формула для оптимальной линейной нечеткой регрессии и показана максимальность ее корреляции с прогнозируемой величиной.

***Ключевые слова:*** нечетко-случайная величина, среднее значение, экстремальное свойство.

# EXTREMAL PROPERTIES OF MEANS OF FUZZY RANDOM VARIABLES

© 2022 **V. L. KHATSKEVICH**

Abstract. In this paper, we examine extremal properties of fuzzy expectations and expectations of fuzzy random variables. We introduce a new mean characteristic—a scalar random variable that characterizes a given fuzzy random variable—and prove its extremal properties. Also, we study linear regressions of fuzzy random variables, obtain a formula for the optimal linear fuzzy regression, and prove that its correlation with the predicted value is maximal.

***Keywords and phrases*:** fuzzy random variable, mean value, extremal property.

***AMS Subject Classification*:** 60K10

**1. Введение.** Нечетко случайные величины возникли как раздел нечеткой математики в [16, 17, 19]. Они находят широкое применение в финансовой математике, прогнозировании, теории принятия решений и др.. В частности, математическая модель случайного эксперимента с нечеткими исходами интерпретируется как нечетко-случайная величина. Современное состояние теории нечетко-случайных величин отражено в [7, 13, 20] и др. (см. также [8, гл. 6]).

В настоящей работе исследуются экстремальные свойства средних нечетко-случайных величин.

Как известно, математическое ожидание $EX$ случайной величины $X$ минимизирует среднеквадратическое отклонение $(E(X-a)^2)^{1/2}$ по всем действительным $a \in R$, т.е. является решением задачи

$$E(X-a)^2 \to \min \ (\forall a \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

(см., например, [11, гл. 5, § 30]).

В литературе изучаются два вида средних нечетко-случайных величин: ожидание и нечеткое ожидание (см., например, [7, 13], [8, гл. 6]). Однако их экстремальные свойства не устанавливаются.

Настоящая работа заполняет этот пробел. А именно, в данной статье рассматриваются нечетко-случайные величины $\tilde{X}$, для которых областью возможных значений являются нечеткие числа (строгие определения дадим ниже). Устанавливаются экстремальные свойства вида (1) для ожиданий и нечетких ожиданий нечетко-случайных величин при специально подобранном определении расстояния между нечеткими числами. Кроме того, показывается экстремальная взаимосвязь между ожиданиями и нечеткими ожиданиями нечетко-случайных величин. Вводится новое понятие усредненной (скалярной) случайной величины, характеризующей данную нечетко-случайную величину, и обсуждаются ее экстремальные свойства. Рассматриваются также средние систем нечетко-случайных величин, и обсуждаются их экстремальные свойства.

**2. Нечетко-случайные величины и их средние.** Ниже, под нечетким множеством $A$, заданном на универсальном пространстве $X$, будем понимать совокупность упорядоченных пар $(x, \mu_A(x))$, где функция принадлежности $\mu_A\colon X \to [0,1]$, определяет степень принадлежности $\forall x \in X$ множеству $A$.

Будем использовать следующее определение нечеткого числа (см., например, [6, гл. 2, 3], [1]). *Нечетким числом* $A$ называется нечеткое множество, универсальным множеством которого является множество действительных чисел, и которое дополнительно удовлетворяет следующим условиям:

(i) носитель нечеткого числа — замкнутое и ограниченное (компактное) множество действительных чисел: $\mathrm{Supp}(A) \subset \mathbb{R}$;
(ii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ выпукла;
(iii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ нормальна, т.е. $\sup\limits_x \mu_A(x) = 1$;
(iv) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху.

Мы будем использовать интервальное представление нечетких чисел. А именно, каждому нечеткому числу поставим в соответствие совокупность его $\alpha$-интервалов.

Как известно, множество $\alpha$-уровня нечеткого числа $A$ с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ определяется соотношением

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\} \quad (\alpha \in (0,1]), \quad A_0 = \mathrm{supp}(A).$$

Согласно предположениям (i)—(iv) все $\alpha$-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую (нижнюю) границу интервала $a^-(\alpha)$, а правую (верхнюю) — $a^+(\alpha)$, т. о. $A_\alpha = [a^-(\alpha), a^+(\alpha)]$. Иногда $a^-(\alpha)$ и $a^+(\alpha)$ называют левым и правым индексами нечеткого числа соответственно.

Обозначим через $J_0$ множество нечетких чисел, в интервальном представлении которых функции $a^-(\alpha)$ и $a^+(\alpha)$ квадратично суммируемы на $[0,1]$.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояние Хаусдорфа между множествами $\alpha$-уровня нечетких чисел (см., например, [8, гл. 2, § 2.5]). Рассматриваются и некоторые другие расстояния (см. [1, 13]). Однако хотелось бы рассмотреть такое определение расстояния, чтобы рассматриваемое среднее минимизировало некоторую среднеквадратическую ошибку. В качестве такого расстояния на множестве $J_0$ удобно рассмотреть следующее.

Пусть $\tilde z$ и $\tilde u$ два нечетких числа из $J_0$. Расстояние $\rho(\tilde z, \tilde u)$ между ними зададим формулой

$$\rho(\tilde z, \tilde u) = \left( \int\limits_0^1 \bigl(z^-(\alpha) - u^-(\alpha)\bigr)^2 + \bigl(z^+(\alpha) - u^+(\alpha)\bigr)^2 d\alpha \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы $\alpha$-уровней нечетких чисел $\tilde z$ и $\tilde u$, соответственно. Такого рода расстояние ранее использовалось, например, в [2, 9] по нечетким регрессиям.

Пусть $(\Omega, \Sigma, P)$ — вероятностное пространство, где $\Omega$ — множество элементарных событий, $\Sigma$ — $\sigma$-алгебра, состоящая из подмножеств множества $\Omega$, $P$ — вероятностная мера. Измеримое отображение $\tilde X : \Omega \to J_0$ будем называть *нечетко-случайной величиной*, если при любом $\omega \in \Omega$ множество $\tilde X(\omega)$ является нечетким числом из $J_0$.

Рассмотрим интервалы $\alpha$-уровней нечетко-случайной величины $\tilde X$ при фиксированном $\omega$. А именно, $X_\alpha(\omega) = \{t \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde X(\omega)} \geqslant \alpha\}$, где $\mu_{\tilde X(\omega)}$ — функция принадлежности нечеткого числа

$\tilde{X}(\omega)$, а $\alpha \in (0,1]$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega,\alpha), X^+(\omega,\alpha)]$, где границы $X^-(\omega,\alpha)$ и $X^+(\omega,\alpha)$ — случайные величины. Они называются соответственно левым и правым индексом нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

В дальнейшем будем рассматривать класс $\mathfrak{X}$ нечетко-случайных величин $\tilde{X}$, для которых выполнено следующее условие.

**Условие 1.** Для каждой нечетко-случайной величины $\tilde{X} \in \mathfrak{X}$ индексы $X^-(\omega,\alpha)$ и $X^+(\omega,\alpha)$ являются квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0,1]$ функциями.

Положим

$$x^-(\alpha) = \int_\Omega X^-(\omega,\alpha)dP, \quad x^+(\alpha) = \int_\Omega X^+(\omega,\alpha)dP. \tag{3}$$

Нечеткое число $\tilde{x}$ с индексами, определяемыми формулой (3), называется нечетким ожиданием нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

Ожиданием $E(\tilde{X})$ нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ называется число, определяемое формулой

$$E(\tilde{X}) = 0{,}5 \int_0^1 \int_\Omega (X^-(\omega,r) + X^+(\omega,r))dPdr. \tag{4}$$

Определим расстояние между случайными величинами $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ из класса $\mathfrak{X}$ формулой

$$d(\tilde{X},\tilde{Y}) = \left( \int_0^1 \int_\Omega \left( \left[X^-(\omega,\alpha) - Y^-(\omega,\alpha)\right]^2 + \left[X^+(\omega,\alpha) - Y^+(\omega,\alpha)\right]^2 \right) dP\, d\alpha \right)^{1/2}. \tag{5}$$

**3. Экстремальные свойства ожиданий и нечетких ожиданий.** Рассмотрим экстремальные свойства ожиданий и нечетких ожиданий нечетко-случайных величин.

**Утверждение 1.** *Для заданной нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ с индексами $X^-(\omega,\alpha)$, $X^+(\omega,\alpha)$ ее ожидание $E(\tilde{X})$ является решением, причем единственным, экстремальной задачи*

$$d(\tilde{X},y) \to \min(y \in \mathbb{R}), \tag{6}$$

*где расстояние $d(\tilde{X},y)$ определяется формулой* (5).

*Доказательство.* Действительно, фиксируем $y \in \mathbb{R}$ и положим

$$\Delta(y) = d^2(\tilde{X},y) = \int_0^1 \int_\Omega \left( \left[X^-(\omega,\alpha) - y\right]^2 + \left[X^+(\omega,\alpha) - y\right]^2 \right) dP\, d\alpha.$$

Рассмотрим производную

$$\Delta'(y) = \int_0^1 \int_\Omega \frac{d}{dy}\Big( \left[X^-(\omega,\alpha) - y\right]^2 + \left[X^+(\omega,\alpha) - y\right]^2 \Big) dP\, d\alpha =$$

$$= -2 \int_0^1 \int_\Omega \Big( \big(X^-(\omega,\alpha) - y\big) + \big(X^+(\omega,\alpha) - y\big) \Big) dP\, d\alpha. \tag{7}$$

Такое представление законно, поскольку $\tilde{X} \in \mathfrak{X}$. Выражение (7) обращается в нуль при

$$y_* = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_\Omega B\Big( X^-(\omega,\alpha) + X^+(\omega,\alpha) \Big) dP\, d\alpha.$$

Таким образом, в соответствии с (4), $y_* = E(\tilde{X})$. При этом $\Delta''(y) = 4$; поэтому в точке $y_*$ выполнено достаточное условие минимума. Единственность обеспечивается сильной выпуклостью функции $\Delta(y)$. $\square$

Рассмотрим нечетко-случайную величину $\tilde{X}$ и пусть $\tilde{x}$ — ее нечеткое ожидание, с интервалами $\alpha$-уровня $[x^-(\alpha), x^+(\alpha)]$, где $x^-(\alpha)$ и $x^+(\alpha)$ определяются формулами (3).

**Утверждение 2.** *Ожидание $E(\tilde{X})$ является решением, причем единственным, следующей экстремальной задачи*:

$$\rho(\tilde{x}, y) \to \min \ (\forall y \in \mathbb{R}). \tag{8}$$

*Доказательство.* Пусть $y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим величину

$$\delta(y) = \rho^2(\tilde{x}, y) = \int\limits_0^1 \Big( \big(x^-(\alpha) - y\big)^2 + \big(x^+(\alpha) - y\big)^2 \Big) d\alpha.$$

Производная $\delta'(y)$ равна

$$\delta'_y = -2 \int\limits_0^1 \Big( x^-(\alpha) + x^+(\alpha) - 2y \Big) d\alpha.$$

Она обращается в нуль при $y_*$, когда

$$y_* = \int\limits_0^1 \frac{x^-(\alpha) + x^+(\alpha)}{2} d\alpha.$$

Согласно (3) это дает $y_* = E(\tilde{X})$; при этом $\delta''(y) = 4$. Отсюда следует утверждение теоремы. Единственность обеспечивается сильной выпуклостью функции $\delta(y)$. $\square$

Отметим, что доказательства утверждений 1 и 2 элементарны, однако имеют специфику, связанную с определением ожиданий и нечетких ожиданий нечетко-случайных величин.

Основным утверждением в этом разделе, на наш взгляд, является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Нечеткое ожидание $\tilde{x}$ нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ является решением следующей экстремальной задачи*:

$$d(\tilde{X}, \tilde{y}) \to \min \ (\forall \tilde{y} \in J_0).$$

*Доказательство.* Пусть $\tilde{y}$ — произвольное нечеткое число из $J_0$. Имеем следующую цепочку равенств:

$$d^2(\tilde{X}, \tilde{y}) = \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big( \big(X^-(\omega,\alpha) - y^-(\alpha)\big)^2 + \big(X^+(\omega,\alpha) - y^+(\alpha)\big)^2 \Big)\, dP\, d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big( \big(X^-(\omega,\alpha) - x^-(\alpha) + x^-(\alpha) - y^-(\alpha)\big)^2 + \big(X^+(\omega,\alpha) - x^+(\alpha) + x^+(\alpha) - y^+(\alpha)\big)^2 \Big)\, dP\, d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big( \big(X^-(\omega,\alpha) - x^-(\alpha)\big)^2 + \big(x^-(\alpha) - y^-(\alpha)\big)^2 \Big)\, dP\, d\alpha +$$

$$+ \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big( \big(X^+(\omega,\alpha) - x^+(\alpha)\big)^2 + \big(x^+(\alpha) - y^+(\alpha)\big)^2 \Big)\, dP\, d\alpha +$$

$$+2 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \big(X^-(\omega,\alpha) - x^-(\alpha)\big)\big(x^-(\alpha) - y^-(\alpha)\big)\, dP\, d\alpha + 2 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \big(X^+(\omega,\alpha) - x^+(\alpha)\big)\big(x^+(\alpha) - y^+(\alpha)\big)\, dP\, d\alpha.$$

Представим последний интеграл в виде повторного

$$\int_0^1 \left( \int_\Omega (X^+(\omega,\alpha) - x^+(\alpha))dP \right) (x^+(\alpha) - y^+(\alpha))d\alpha$$

и заметим, что внутренний интеграл обращается в нуль согласно определению $x^+(\alpha)$ (3). Аналогично, обращается в нуль предпоследний интеграл. Тогда

$$d^2(\tilde{X}, \tilde{y}) = d^2(\tilde{X}, \tilde{x}) + \rho^2(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

откуда следует высказанное утверждение. □

Рассмотрим теперь другой подход. Будем аппроксимировать нечетко-случайную величину специально подобранной вещественной случайной величиной. Пусть $\tilde{X}$ — нечетко-случайная величина с левым и правым индексами $X^-(\omega,\alpha)$ и $X^+(\omega,\alpha)$. Введем в рассмотрение усредненную случайную величину

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^1 \big(X^-(\omega,\alpha) + X^+(\omega,\alpha)\big) d\alpha. \tag{9}$$

Заметим, что при фиксированном $\omega$ число $\hat{x}(\omega)$ является средним соответствующего нечеткого числа с индексами $x^-(\alpha)$ и $x^+(\alpha)$, определяемыми формулами (3).

Кроме того, при выполнении условия 1 функция $\hat{x}(\omega)$ корректно определена и является квадратично суммируемой на $\Omega$.

**Утверждение 3.** *Пусть для нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ выполнено условие* 1. *Тогда математическое ожидание усредненной случайной величины $\hat{x}(\omega)$, определяемой формулой* (9), *совпадает с ожиданием $E(\tilde{X})$ нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.*

*Доказательство.* Действительно, математическое ожидание для $\hat{x}(\omega)$ имеет вид

$$E(\hat{x}(\omega)) = \int_\Omega \hat{x}(\omega)dP = \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^1 \big(X^-(\omega,\alpha) + X^+(\omega,\alpha)\big) d\alpha\, dP.$$

Поменяв здесь порядок интегрирования на основании теоремы Фубини (см., например, [5, гл. V, § 6]), получим $E(\tilde{X})$ (см. формулу (4)). □

**Утверждение 4.** *Для нечетко-случайной величины $\tilde{X}$, удовлетворяющей условию* 1, *ожидание $E(\tilde{X})$ является решением экстремальной задачи*

$$E\big|\hat{x}(\omega) - y\big|^2 \to \min\ (\forall y \in \mathbb{R}),$$

*причем единственным.*

Это следует из утверждения 3 и известного экстремального свойства математического ожидания для (скалярных) случайных величин (ср. с (1)).

Ниже удобно для (скалярных) случайных величин $x$ и $y$ ввести обозначение скалярного произведения $(x,y) = Exy$ и нормы $\|x\|_0^2 = (x,x)^{1/2}$. При этом будем предполагать, что рассматриваемые случайные величины принадлежат гильбертову пространству $\mathfrak{H}$ случайных величин с конечным вторым моментом.

Приведем теперь характеристическое свойство усредненной (скалярной) случайной величины $\hat{x}(\omega)$ как оценки для нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

**Теорема 2.** *Для заданной нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ задача*

$$d(\tilde{X}, y) \to \min\ (\forall y \in \mathfrak{H}) \tag{10}$$

*имеет решение, определяемое формулой* (9), *причем единственное.*

*Доказательство.* Действительно, фиксируем $y \in \mathfrak{H}$ и рассмотрим величину

$$d^2(\tilde{X}, y) = \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big( \big(X^-(\omega,\alpha) - y(\omega)\big)^2 + \big(X^+(\omega,\alpha) - y(\omega)\big)^2 \Big)\, dP\, d\alpha.$$

Преобразуем подынтегральное выражение, используя представление

$$\big(X^-(\omega,\alpha) - y(\omega)\big)^2 = \big(X^-(\omega,\alpha) - \hat{x}(\omega) + \hat{x}(\omega) - y(\omega)\big)^2 =$$
$$= \big(X^-(\omega,\alpha) - \hat{x}(\omega)\big)^2 + \big(\hat{x}(\omega) - y(\omega)\big)^2 + 2\big(X^-(\omega,\alpha) - \hat{x}(\omega)\big)\big(\hat{x}(\omega) - y(\omega)\big).$$

Тогда с учетом аналогичного представления для второго слагаемого под интегралом получим

$$d^2(\tilde{X}, y) = \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big( \big(X^-(\omega,\alpha) - \hat{x}(\omega)\big)^2 + \big(X^+(\omega,\alpha) - \hat{x}(\omega)\big)^2 \Big)\, dP\, d\alpha +$$
$$+ 2\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \big(\hat{x}(\omega) - y(\omega)\big)^2 dP\, d\alpha + 2\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \big(X^-(\omega,\alpha) + X^+(\omega,\alpha) - 2\hat{x}(\omega)\big)\big(\hat{x}(\omega) - y(\omega)\big)\, dP\, d\alpha.$$

Заметим, что второе слагаемое равно $2\|\hat{x}(\omega) - y(\omega)\|_0^2$, где $\|\cdot\|_0$ — норма в пространстве $\mathfrak{H}$. Третье слагаемое, меняя порядок интегрирования, можно представить в виде повторного интеграла

$$2\int\limits_\Omega \big(\hat{x}(\omega) - y(\omega)\big) \int\limits_0^1 \big(X^-(\omega,\alpha) + X^+(\omega,\alpha) - 2\hat{x}(\omega)\big)\, d\alpha\, dP.$$

При этом внутренний интеграл по $\alpha$ обращается в нуль в силу определения (9). Таким образом, выражение в (10) имеет вид

$$d^2(\tilde{X}, y) = d^2(\tilde{X}, \hat{x}) + 2\|\hat{x} - y\|_0^2,$$

откуда и следует требуемый факт. □

**4. Средние систем нечетко-случайных величин.** Рассмотрим нечетко-случайную выборку $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$, которая является математической моделью набора нечетких наблюдений. В ряде работ (см., например, [13, 18, 21]) в качестве оценки неизвестной средней нечетко-случайной выборки предлагается среднее арифметическое

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_n). \tag{11}$$

Нами установлено следующее предложение.

**Теорема 3.** *Пусть* $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ *— нечетко-случайные величины, удовлетворяющие условию* 1. *Тогда среднее* $\bar{X}_n$*, определяемое формулой* (11)*, является решением экстремальной задачи*

$$\sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) \to \min\ (\tilde{Y} \in \mathfrak{X}). \tag{12}$$

*Доказательство.* Пусть $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}$. По определению

$$\sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) = \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \Big( \big(X_i^-(\omega,\alpha) - Y^-(\omega,\alpha)\big)^2 + \big(X_i^+(\omega,\alpha) - Y^+(\omega,\alpha)\big)^2 \Big)\, dP\, d\alpha. \tag{13}$$

Фиксируем номер $i$ и рассмотрим

$$d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) = \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big( \big(X_i^-(\omega,\alpha) - Y^-(\omega,\alpha)\big)^2 + \big(X_i^+(\omega,\alpha) - Y^+(\omega,\alpha)\big)^2 \Big)\, dP\, d\alpha. \tag{14}$$

Представим первое подынтегральное слагаемое в правой части (14) (опуская аргументы $\omega$ и $\alpha$) в виде

$$(X_i^- - \bar{X}_n^-)^2 + (\bar{X}_n^- - Y^-)^2 + 2(X_i^- - \bar{X}_n^-)(\bar{X}_n^- - Y^-),$$

где $\bar{X}_n^-$ и $\bar{X}_n^+$ — левый и правый индексы среднего $\bar{X}_n$. Аналогично поступим и для второго слагаемого.

Суммируя преобразованное подынтегральное выражение в (14) по $i$ от 1 до $n$, получим под интегралом в правой части (13) выражение

$$\sum_{i=1}^n (X_i^- - \bar{X}_n^-)^2 + \sum_{i=1}^n (X_i^+ - \bar{X}_n^+)^2 + n((\bar{X}_n^- - Y^-)^2 + (\bar{X}_n^+ - Y^+)^2) + \\ + 2(\bar{X}_n^- - Y^-)\sum_{i=1}^n (X_i^- - \bar{X}_n^-) + 2(\bar{X}_n^+ - Y^+)\sum_{i=1}^n (X_i^+ - \bar{X}_n^+). \quad (15)$$

По определению и согласно правилам интервального сложения и умножения на число среднее $\bar{X}_n$ имеет левый и правый индексы

$$\bar{X}_n^- = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^-, \quad \bar{X}_n^+ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^+$$

соответственно, поэтому обращаются в нуль суммы

$$\sum_{i=1}^n (X_i^- - \bar{X}_n^-) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (X_i^+ - \bar{X}_n^+) = 0.$$

Таким образом, подынтегральное выражение в правой части (13) содержит только первые три слагаемых из формулы (15). Следовательно, равенство (13) имеет вид

$$\sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \bar{X}_n) + nd^2(\bar{X}_n, \tilde{Y}),$$

откуда и следует высказанное утверждение. □

Рассмотрим нечеткое ожидание $\bar{x}_n$ среднего $\bar{X}_n$, определяемого формулой (11). В силу линейности нечеткого ожидания оно представимо в виде

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i,$$

где $\tilde{x}_i$ — нечеткие средние нечетко-случайных величин $\tilde{X}_i$. На основании этого имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 5.** *Нечеткое ожидание* $\bar{x}_n$ *среднего* (11) *является единственным решением экстремальной задачи*

$$\sum_{i=1}^n \rho^2(\tilde{x}_i, \tilde{y}) \to \min\ (\tilde{y} \in J_0).$$

Доказательство почти дословно повторяет рассуждения теоремы 3, с заменой заглавных букв $\tilde{X}_i$, $\tilde{Y}$ на строчные и двойного интеграла $\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega$ на $\int\limits_0^1$.

Теорема 3 и утверждение 5 суть аналоги характеристического экстремального свойства числовых средних арифметических (см. [4, гл. I, § 5]) для нечеткого случая.

**Замечание 1.** Ожидание $E(\bar{X}_n)$ среднего $\bar{X}_n$ является решением, причем единственным, следующей экстремальной задачи:

$$\sum_{i=1}^n \left|E(\tilde{X}_i) - y\right|^2 \to \min\ (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Действительно, по определению и в силу линейности ожидания имеем

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\tilde{X}_i).$$

Поэтому требуемый результат следует из соответствующего экстремального свойства для числовых средних (см., например, [4, гл. I, § 5]).

Рассмотрим взвешенное среднее

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{X}_i, \tag{16}$$

где числовые коэффициенты удовлетворяют условиям $\beta_i \geqslant 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1.$$

Такого рода суммы возникают, например, при нечетком портфельном инвестировании. Аналогично теореме 3 можно доказать, что взвешенная сумма (16) является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) \to \min\ (\tilde{Y} \in \mathfrak{X}).$$

Рассмотрим опять нечетко-случайную выборку $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$. Определим усредненные случайные величины $\hat{x}_i(\omega)$ для каждой нечетко-случайной величины $\tilde{X}_i$ по формуле (12) и рассмотрим среднюю арифметическую

$$\bar{x}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i(\omega). \tag{17}$$

**Утверждение 6.** *Предположим, все нечетко-случайные величины $\tilde{X}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условию* 1 *и имеют одинаковые ожидания $E\tilde{X}_i = m$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда случайная величина $\bar{x}_n(\omega)$, определенная формулой* (17)*, есть несмещенная оценка для $m$.*

*Доказательство.* Действительно, согласно нашим предположениям и в силу утверждения 3 математическое ожидание $E\hat{x}_i = m$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда согласно свойствам математического ожидания $E\hat{x}_n = m$, что и требовалось доказать. □

**Утверждение 7.** *Пусть все случайные величины $\hat{x}_i(\omega)$ $(i = 1, 2\ldots)$ попарно независимы и одинаково распределены, причем $E\hat{x}_i(\omega) = m$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\bar{x}_n(\omega)$ — состоятельная оценка для $m$.*

Утверждение 7 есть следствие закона больших чисел (см., например, [11, гл. 6, § 34]).

Отметим, что выражение вида (17) привлекалось в [7] для оценки математических ожиданий нечетко-случайных величин. Однако усредненные случайные величины вида (9) не выделялись и их свойства не рассматривались.

**5. Заключение.** Подчеркнем, что важность средних для приложений состоит в том, что они выражают тенденции соответствующих процессов. Средние нечетких чисел и их систем достаточно хорошо изучены (см., например, [7,12,14,18]). Однако даже для них экстремальные свойства не обсуждаются в литературе. Средние нечетко-случайных величин с точки зрения экстремального подхода тем более ранее не обсуждались. Основным моментом нашего успеха в этом направлении является удачный (с этой точки зрения) выбор расстояния между нечеткими числами.

Утверждения 1—4 и 6, 7 элементарны. Мы их привели для полноты изложения. Основными результатами статьи следует считать теоремы 1—3.

Отметим возможные направления развития рассматриваемой тематики: экстремальные свойства нелинейных средних и медиан. Поясним сказанное.

Пусть $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — заданная непрерывная строго монотонная функция. Тогда можно определить нелинейное среднее нечетко-случайной величины равенством

$$E_\phi(\tilde{X}) = \phi^{-1}\left(\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \phi\left(\frac{X^-(\omega,r)+X^-(\omega,r)}{2}\right) dPdr\right).$$

Аналогично работе автора [15] можно показать, что $E_\phi(\tilde{X})$ является решением следующей экстремальной задачи

$$\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \phi\left(\frac{X^-(\omega,r)+X^-(\omega,r)}{2} - y\right)^2 dPdr \to \min\ (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Используя принцип сохранения формальных свойств, естественно определить квазимедиану как решение следующей экстремальной задачи

$$\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big(\big|X^-(\omega,\alpha) - y\big| + \big|X^+(\omega,\alpha) - y\big|\Big)\, dP\, d\alpha \to \min(\forall y \in \mathbb{R})$$

(см., например, [4, гл. I, § 5] для чисел). Другие определения нечетких медиан, не опирающиеся на экстремальные свойства, рассматриваются, например, в [18, гл. 7], [10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Борисов В. В., Федулов А. С., Зернов М. М.* Основы нечеткой арифметики. — М.: Горячая линия-Телеком, 2019.
2. *Вельдяксов В. Н., Шведов А. С.* О методе наименьших квадратов при регрессии с нечеткими данными// Экон. ж. ВШЭ. — 2014. — № 2. — С. 328–344.
3. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Книжный дом Либроком, 2011.
4. *Джини К.* Средние величины. — М.: Статистика, 1970.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: УРСС, 2019.
6. *Пегат А.* Нечеткое математическое моделирование и управление. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.
7. *Шведов А. С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин// Прикл. эконометрика. — 2016. — *42*. — С. 121–138.
8. *Язенин А. В.* Основные понятия теории возможностей: математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. — М.: Физматлит, 2016.
9. *Bargiela A., Pedrycz W., Nakashima T.* Multiple regression with fuzzy data// Fuzzy Sets Syst. — 2007. — *158*. — P. 2169–2188.
10. *Calvo T., Mesiar R.* Generalized median// Fuzzy Sets Syst. — 2001. — *124*. — P. 59–61.
11. *Colubi A.* Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applica analysis of fuzzy-and real-valued data// Fuzzy Sets Syst. — 2009. — *160*. — P. 344–356.
12. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — *24*, № 3. — P. 279–300.
13. *Feng Y., Hu L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables// Fuzzy Sets Syst. — 2001. — *120*, № 3. — P. 487–497.
14. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers// Fuzzy Sets Syst. — 2003. — *136*. — P. 363–374.
15. *Khatskevich V. L.* On some class of nonlinear mean random values// J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — *1479*. — 012087.
16. *Kwakernaak H.* Fuzzy random variables. I. Definitions and theorems// Inform. Sci. — 1978. — *15*, № 1. — P. 1–29.
17. *Nahmias S.* Fuzzy variables// Fuzzy Sets Syst. — 1978. — *1*. — P. 97–110.
18. *Nguyen H. T., Wu B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
19. *Puri M. L., Ralesku D. A.* Fuzzy random variables// J. Math. Anal. Appl. — 1986. — *114*. — P. 409–422.
20. *Shapiro A. F.* Fuzzy random variables// Insur. Math. Econ. — 2009. — *44*, № 2. — P. 307–314.

21. *Wang D.* A note on constitency and unbiasedness of point estimation with fuzzy data// Metrika. Int. J. Theor. Appl. Stat.. — *60*, № 1. — P. 93–104.

Хацкевич Владимир Львович
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж
E-mail: `vlkhats@mail.ru`