ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-3-10

УДК 517.925.52

О ВЕТВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. **В. В. АБРАМОВ, Е. Ю. ЛИСКИНА**

Аннотация. Исследована нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Получены условия существования и устойчивости периодического решения, которое при нулевом значении параметра удовлетворяет линейной однородной системе. В основе рассуждений лежит анализ свойств правого оператора монодромии.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, малый параметр, оператор монодромии.

ON BRANCHING OF PERIODIC SOLUTIONS OF QUASILINEAR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2022 **V. V. ABRAMOV, E. Yu. LISKINA**

Abstract. In this paper, a normal system of ordinary differential equations with a small parameter is examined. We obtain conditions for the existence and stability of a periodic solution, which, at the zero value of the parameter, satisfies a linear homogeneous system. The reasoning is based on the analysis of properties of the monodromy operator.

Keywords and phrases: differential equation, periodic solution, small parameter, monodromy operator.

AMS Subject Classification: 34C25

1. Введение. В монографии И. Г. Малкина [7] изложены классические результаты по проблеме существования и устойчивости периодических решений системы вида $\dot{x} = Ax + f(t) + \mu F(t, x, \mu)$, зависящей от малого вещественного параметра μ. Рассматривались как резонансный, так и нерезонансный случаи по линейному приближению. В частности, условия существования периодического решения устанавливались с помощью теоремы о неявной функции. Аналогичные результаты приведены Е. А. Гребениковым и Ю. А. Рябовым в [3], где акцент сделан на вычислении решений.

В данной работе предлагается развитие подхода, предложенного И. Г. Малкиным, на основе результатов, полученных в [1, 2, 4, 5].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \tag{1}$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, правая часть ω-периодическая интегрируемая по t при всех x и μ, функция $f(t,x,\mu)$ гладко зависит от x и от μ, а также удовлетворяет условию

$$f(t,x,0_m) \equiv 0_n \tag{2}$$

(0_l — нулевой l-мерный вектор).

Задача. Найти условия существования и устойчивости ω-периодического решения $x(t,a,\mu)$, $x(0,a,\mu)=a$ системы (1) в терминах свойств первого приближения для усреднения на периоде функции $f(t,x,\mu)$ вдоль решений соответствующей линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3}$$

причем $x(t,a,0_m)$ — ненулевое решение системы (3).

Решение задачи в такой постановке целесообразно для формулировки коэффициентных признаков, пригодных для проверки с помощью компьютерных вычислений.

2. Необходимые условия существования периодического решения. При малых значениях параметра правая часть системы (1) близка к линейной. Поэтому для решений системы (1) с помощью оператора монодромии можно определить сдвиг начальной точки на период. Установим структуру этого оператора, чтобы построить недифференциальное уравнение относительно начального значения и параметра, определяющих периодическое решение. Кроме того, на основе свойств возмущений оператора сдвига по траекториям можно исследовать проблему устойчивости периодического решения (см. [6]).

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (3), нормированная условием $X(0)=E$. Решение системы (1) имеет вид

$$x(t,a,\mu) = X(t)a + \tilde{x}(t,a,\mu), \tag{4}$$

в котором

$$\tilde{x}(t,a,\mu) = X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau,x(\tau,a,\mu),\mu)d\tau.$$

По условию (2) справедливо тождество

$$\tilde{x}(t,a,0_m) \equiv X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau,x(\tau,a,0_m),0_m)d\tau \equiv 0_n, \tag{5}$$

из которого следует, что равенство (4) можно представить в виде

$$x(t,a,\mu) = X(t)a + \tilde{x}_1(t,a,\mu) + \tilde{x}_2(t,a,\mu), \tag{6}$$

где

$$\tilde{x}_1(t,a,\mu) = X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau,X(\tau)a,\mu)d\tau, \quad \tilde{x}_2(t,a,\mu) = \tilde{x}(t,a,\mu) - \tilde{x}_1(t,a,\mu).$$

В силу равенства (4) по формуле Лагранжа вычислим

$$\tilde{x}_2(t,a,\mu) = X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)(f(\tau,X(\tau)a+\tilde{x}(\tau,a,\mu),\mu) - \tilde{x}(\tau,X(\tau)a,\mu))d\tau = \frac{\partial \tilde{x}_1(t,\tilde{a},\mu)}{\partial a}\tilde{x}(t,a,\mu).$$

Значит, из тождества (5) следует, что справедливо условие

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} \frac{\|\tilde{x}_2(t,a,\mu)\|}{\|\tilde{x}_1(t,a,\mu)\|} \equiv 0$$

(здесь и далее тождественное равенство применяем для обозначения равномерной сходимости).

Итак, подставив $t=\omega$ в равенство (6), получим для системы (1) вид оператора монодромии

$$x(\omega,a,\mu) = Xa + p(a,\mu) + \varphi(a,\mu), \tag{7}$$

в котором $X = X(\omega)$ — матрица монодромии системы (3); $p(a,\mu)$ — первое приближение функции $\tilde{x}_1(\omega,a,\mu)$ при $\|\mu\| \to 0$, то есть $\tilde{x}_1(\omega,a,\mu) = p(a,\mu) + \tilde{p}(a,\mu)$ и

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} \frac{\|\tilde{p}(a,\mu)\|}{\|p(a,\mu)\|} \equiv 0; \quad \varphi(a,\mu) = \tilde{p}(a,\mu) + \tilde{x}_2(\omega,a,\mu).$$

Из равенства (7) следует, что для системы (1) определяющее уравнение (уравнение относительно начального значения и параметра, определяющих периодическое решение) имеет вид

$$Ba + p(a,\mu) + \varphi(a,\mu) = 0_n, \tag{8}$$

где $B = X - E$.

Установим необходимые условия существования периодического решения.

Пусть $\|Ba\| \neq 0$. Так как

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} \|p(a,\mu) + \varphi(a,\mu)\| \equiv 0,$$

то существует такое $\delta > 0$, что для всех значений μ: $\|\mu\| < \delta$ справедлива оценка

$$\|x(\omega,a,\mu) - a\| \geqslant \|Ba\| - \|p(a,\mu) + \varphi(a,\mu)\| > \frac{\|Ba\|}{2} > 0.$$

При этом пара (a,μ) не удовлетворяет уравнению (8) и решение $x(t,a,\mu)$ не является периодическим. Итак, для существования периодического решения системы (1) необходимо чтобы выполнялось условие

$$Ba_0 = 0_n. \tag{9}$$

Тогда $x(t,a_0,0_m) = X(t)a_0$ в силу равенства (6). Поэтому далее будем предполагать, что имеет место критический случай по линейному приближению

$$\det(X - E) = 0, \tag{10}$$

и рассматривать случай ветвления периодического решения системы (1) от ненулевого периодического решения системы (3).

Допустим, что вектор-функция $p(a,\mu)$ в уравнении (8) при любых значениях a, μ и $\alpha > 0$ удовлетворяет условию

$$p(a,\alpha\mu) = \alpha^k p(a,\mu), \quad k > 0. \tag{11}$$

При условии (10) система (9) имеет фундаментальную $(n \times r)$-матрицу решений K, где

$$r = \dim\ker(X - E).$$

Подставим в определяющее уравнение (8) значения

$$a = a_0 + Kz, \quad \mu = \alpha(\mu_0 + \lambda),$$

где $a_0 \neq 0_n$ — какое-либо фиксированное решение системы (9), μ_0 — направление ветвления параметра системы (1), $z \in \mathbb{R}^r$ и $\lambda \in \mathbb{R}^m$ — произвольные векторы, $\alpha > 0$ — малый параметр. Так как $B(a_0 + Kz) \equiv 0_n$, то в силу равенства (11) определяющее уравнение имеет вид

$$p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) + \alpha^{-k}\varphi(a_0 + Kz, \alpha(\mu_0 + \lambda)) = 0_n. \tag{12}$$

Так как

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} \frac{\|\varphi(a,\mu)\|}{\|p(a,\mu)\|} \equiv 0,$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-k}\varphi(a_0 + Kz, \alpha(\mu_0 + \lambda)) \equiv 0_n.$$

При условии $p(a_0,\mu_0) \neq 0_n$ существует такое $\delta > 0$, что для всех значений z: $\|z\| < \delta$, λ: $\|\lambda\| < \delta$ и α: $\alpha < \delta$ справедлива оценка

$$\|x(\omega,a,\mu) - a\| \geqslant \alpha^k \Big| \|p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda)\| + \|\alpha^{-k}\varphi(a_0 + Kz, \alpha(\mu_0 + \lambda))\| \Big| > \alpha^k \frac{\|p(a_0,\mu_0)\|}{2} > 0.$$

Значит, условие (12) не выполняется, то есть система (1) не имеет периодического решения. Поэтому направление ветвление параметра и начальное значение порождающего периодического решения системы (3) должны удовлетворять условию

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n. \tag{13}$$

3. Достаточные условия существования периодического решения. При условии (13) получим разложение

$$p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) = p'_a(a_0, \mu_0)Kz + p'_\mu(a_0, \mu_0)\lambda + q(z, \lambda),$$

в котором

$$\lim_{\gamma \to 0} \|q(\gamma z, \gamma\lambda)\| \equiv 0.$$

Допустим, что выполняется условие

$$\operatorname{rang} P = n \leqslant r + m, \tag{14}$$

в котором

$$P = \begin{bmatrix} p'_a(a_0, \mu_0)K & p'_\mu(a_0, \mu_0) \end{bmatrix}.$$

При этом можно выполнить разложение

$$p'_a(a_0, \mu_0)Kz + p'_\mu(a_0, \mu_0)\lambda = Dv + D_1 v_1,$$

где матрица D составлена из n линейно независимых столбцов матрицы P. Выберем $v_1 = 0_{n-m-r}$. Тогда $p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) = Dv + q(v)$,

$$\lim_{\gamma \to 0} \gamma^{-1} \|q(\gamma v)\| \equiv 0.$$

При сделанных предположениях обозначим $\tilde{\varphi}(\alpha, v) = \alpha^{-k}\varphi(a_0 + Kz, \alpha(\mu_0 + \lambda))$. Получим, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \|\tilde{\varphi}(\alpha, v)\| \equiv 0.$$

Поэтому, применив условие $\tilde{\varphi}(0, v) \equiv 0_n$, устраним разрыв функции $\tilde{\varphi}(\alpha, v)$ при $\alpha = 0$. Таким образом, определяющее уравнение преобразовано к виду

$$g(\alpha, v) = Dv + \tilde{q}(v) + \tilde{\varphi}(\alpha, v) = 0_r. \tag{15}$$

Так как $g(0, 0_n) = 0_n$, $g'_v(0, 0_n) = D$ и $\det D \neq 0$, то по теореме о неявной функции уравнение (15) определяет функцию $v = v(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha < \Delta$, для которой $g(\alpha, v(\alpha)) \equiv 0_n$ и $v(0) \equiv 0_n$. Тогда существуют функции $z = z(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\alpha)$, удовлетворяющие уравнению (12). Значит, пара (a^*, μ^*), в которой $a^* = a_0 + Kz(\alpha)$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda(\alpha))$, является решением уравнения (8), то есть определяет ω-периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1).

4. Устойчивость периодического решения. Допустим, что выполняются условия (9), (11), (13) и (14). Тогда согласно установленному в пункте 3 система (1) имеет периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$. Составим для этого решения систему в вариациях, которая в силу равенств (7) и (11) имеет матрицу монодромии

$$x'_a(\omega, a^*, \mu^*) = X + p'_a(a^*, \mu^*) + \varphi'_a(a^*, \mu^*) = X + \alpha^k P_1 + W(\alpha), \tag{16}$$

в которой $P_1 = p'_a(a_0, \mu_0)$,

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-k} W(\alpha) = 0_{nn}$$

(0_{ll} — нулевая $l \times l$-матрица).

Предположим, что при любом достаточно малом $\gamma > 0$ имеет место неравенство

$$\|X + \gamma P_1\| \leqslant 1 - \gamma b, \tag{17}$$

в котором $\| * \|$ — какая-либо матричная норма, $b > 0$ — некоторое число. Тогда из равенства (15) следует, что при всех достаточно малых $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| \leqslant \|X + \alpha^k P_1(a_0, \mu_0)\| + \|W(\alpha)\| \leqslant 1 - \frac{\alpha^k b}{2}. \tag{18}$$

Так как спектральный радиус любой матрицы H равен нижней грани множества ее матричных норм $\rho(H) = \inf\{\|H\|\}$ (см. [8]), то из оценки (18) следует условие

$$\rho(x'_a(\omega, a^*, \mu^*)) \leqslant \|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| < 1,$$

при котором периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ асимптотически устойчиво по линейному приближению (см. [6]).

5. Основной результат. Итак, на основе выводов, полученных в пунктах 3 и 4, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (9), (11), (13), (14) *и* (17), *то система* (1)–(2) *имеет асимптотически устойчивое ω-периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, в котором $a^* = a_0 + Kz(\alpha)$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda(\alpha))$,*

$$\lim_{\alpha\to 0} z(\alpha) = 0_r, \quad \lim_{\alpha\to 0} \lambda(\alpha) = 0_m.$$

На основе проведенных рассуждений можно сделать выводы о структуре периодического решения. Допустим, что правая часть системы (1) удовлетворяет условию

$$f(t, x, \mu) = f_1(t, x, \mu) + f_2(t, x, \mu), \tag{19}$$

в котором $f_1(t, x, \alpha\mu) \equiv \alpha^k f_1(t, x, \mu)$,

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-k} \|f_2(t, x, \alpha\mu)\| \equiv 0.$$

Если функция $f_1(t, x, \mu)$, являющаяся первым приближением для $f(t, x, \mu)$ при $\mu \to 0_m$, не аннулируется в результате усреднения на периоде вдоль решений системы (3), то в равенстве (7)

$$p(a, \mu) = y_1(\omega, a, \mu) = X(\omega) \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau,$$

где $y_1(t, a, \mu)$ — главная часть бесконечно малой $\tilde{x}_1(t, a, \mu)$ при $\mu \to 0_m$. Вычислив направление ветвления параметра и начальное значение порождающего периодического решения системы (3) по условиям (9) и (13), в силу равенств (6) и (19) получим вид периодического решения системы (1)

$$x(t, a^*, \mu^*) = X(t)a_0 + X(t)Kz(\alpha) + \alpha^k X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a_0, \mu_0) d\tau + y(t, \alpha),$$

в которой порядок малости функции $z(\alpha)$ определяется в результате применения теоремы о неявной функции к уравнению (15),

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-k} \|y(t, \alpha)\| \equiv 0.$$

Рассмотрим частный случай установленной здесь теоремы 1. Допустим, что

$$B = 0_{nn}, \tag{20}$$

то есть условие (9) выполняется тождественно и все решения системы (3) являются периодическими. При этом $X = E$ в равенстве (7) и $K = E$ в уравнении (12). Тогда из оценки (17) следует, что $\det P_1 \neq 0$ (см. [8]). Следовательно, выполняется условие (14). Итак, из теоремы 1 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (20), (11), (13) *и* (17), *то система* (1)–(2) *имеет асимптотически устойчивое ω-периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, в котором $a^* = a_0 + z(\alpha)$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda(\alpha))$,*

$$\lim_{\alpha\to 0} z(\alpha) = 0_r, \quad \lim_{\alpha\to 0} \lambda(\alpha) = 0_m.$$

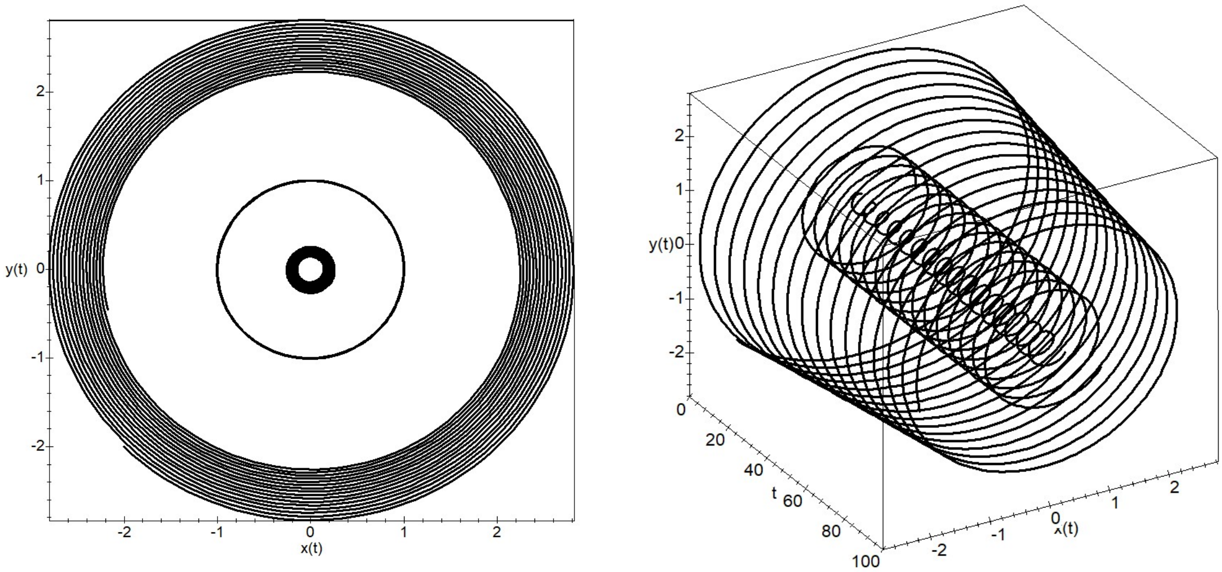

Рис. 1. Траектории и интегральные кривые системы (21) при $\mu = 0{,}001(1;1)^T$.

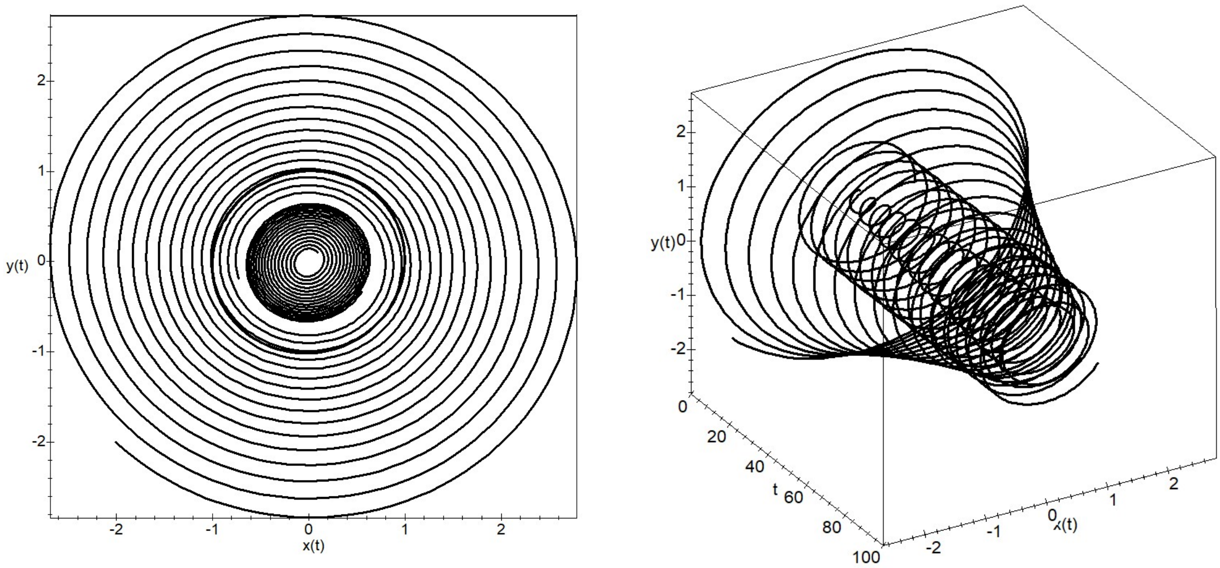

Рис. 2. Траектории и интегральные кривые системы (21) при $\mu = 0{,}005(1;1)^T$.

6. Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \mu_1(6\cos t + 3x_2 + (-3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2)\sin t), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu_2(-2{,}5\sin t + 2x_1 - 3x_2 + (2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2)\cos t). \end{cases} \tag{21}$$

Это система вида (1)–(2), в которой $\omega = 2\pi$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t,x,\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1(6\cos t + 3x_2 + (-3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2)\sin t) \\ \mu_2(-2{,}5\sin t + 2x_1 - 3x_2 + (2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2)\cos t) \end{pmatrix}.$$

Так как

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

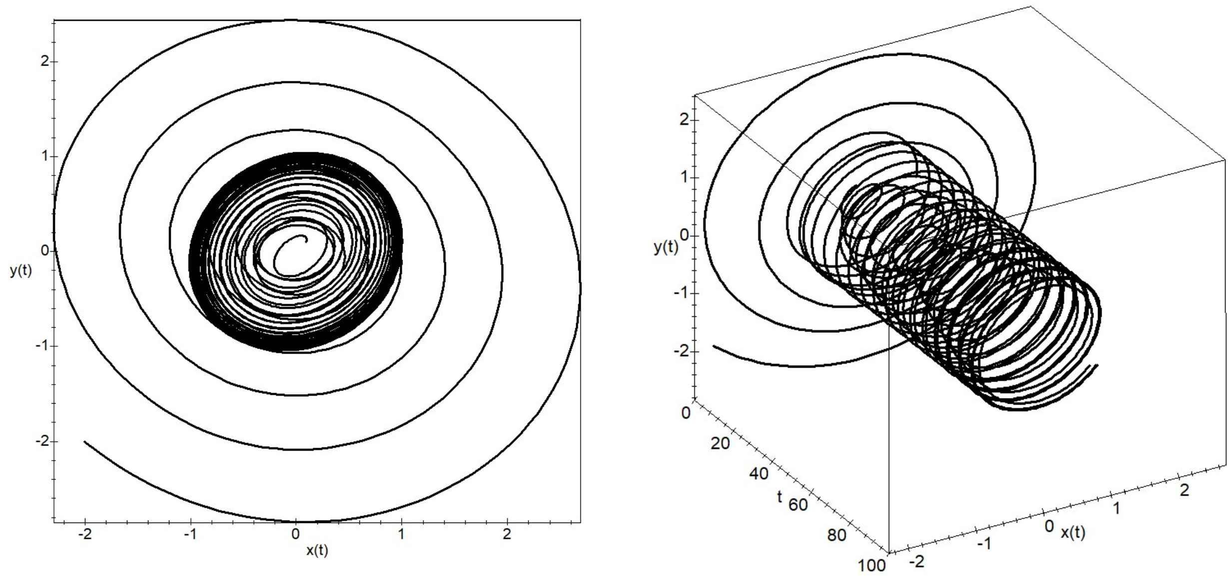

Рис. 3. Траектории и интегральные кривые системы (21) при $\mu = 0{,}02(1;1)^T$.

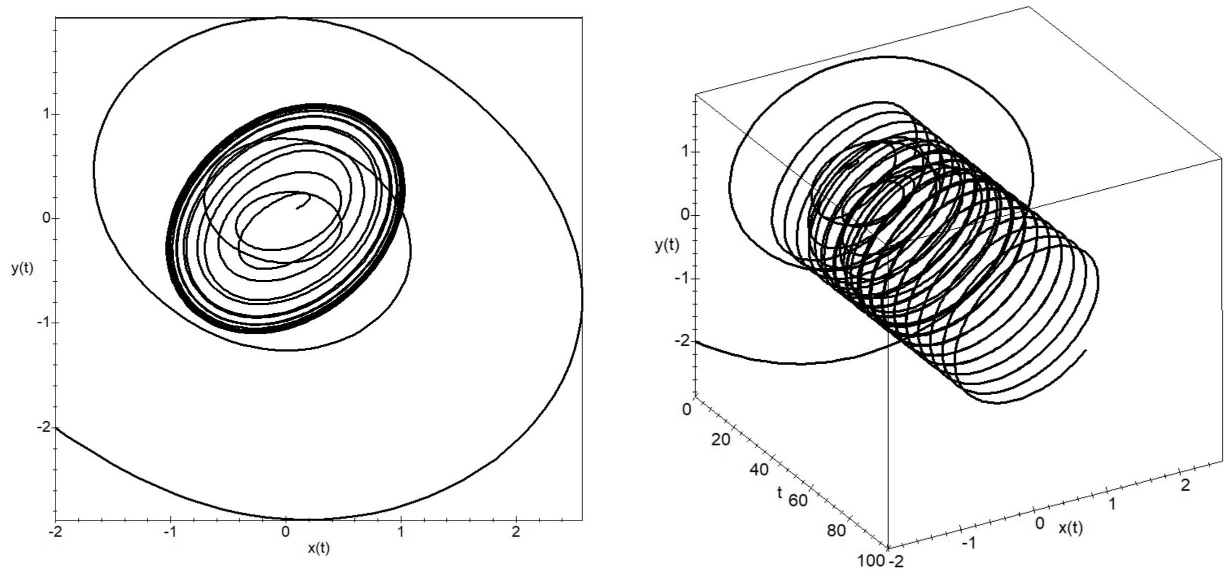

Рис. 4. Траектории и интегральные кривые системы (21) при $\mu = 0{,}05(1;1)^T$.

для соответствующей системы вида (3), то для системы (21) выполняется условие (20). В равенстве вида (7) имеем

$$p(a,\mu) =$$
$$= \pi \begin{pmatrix} 6\mu_1 - 2{,}5\mu_2 - 3\mu_2 a_1 + (3\mu_1 - 2\mu_2)a_2 + (0{,}5\mu_2 - \mu_1)a_1^2 + (2\mu_1 - 2\mu_2)a_1 a_2 + (\mu_1 - 0{,}5\mu_2)a_2^2 \\ (2\mu_2 - 3\mu_1)a_1 - 3\mu_2 a_2 + \mu_2 a_1^2 + (\mu_2 - 2\mu_1)a_1 a_2 + (2\mu_1 - \mu_2)a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Значит, выполняется условие (11), в котором $k = 1$. При

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

справедливо равенство (13). Кроме того, матрица

$$P_1 = p'_a(a_0, \mu_0) = \pi \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет отрицательно доминирующую главную диагональ. Поэтому для строчной матричной нормы, индуцированной векторной нормой $\| * \|_\infty$, имеет место оценка (17). Итак, выполняются условия теоремы 2, в силу которых при отклонении параметра от нулевого значения по направлению

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

в системе (21) происходит ветвление асимптотически устойчивого 2π-периодического решения от порождающего решения

$$X(t)a_0 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

соответствующей системы вида (3).

Полученный вывод согласуется с расположением траекторий и интегральных кривых с начальными значениями

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad a_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

построенных для системы (21) в пакете Maple (рисунки 1–4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. В.* Устойчивость малого периодического решения// Вестн. РАЕН. — 2013. — *13*, № 4. — С. 3–5.
2. *Абрамов В. В.* К задаче об устойчивости малого периодического решения// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *148*. — С. 3–9.
3. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979.
4. *Лискина Е. Ю.* Ненулевые периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений/ Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матю наук — Саранск: МГУ им. Н. П. Огарева, 2000.
5. *Лискина Е. Ю.* О периодическом решении специального вида системы обыкновенных дифференциальных уравнений// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2000. — *5*, № 4. — С. 472–473.
6. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
8. *Хорн Р. А., Джонсон Ч. Р.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.

Абрамов Владимир Викторович
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: `v.abramov@365.rsu.edu.ru`

Лискина Екатерина Юрьевна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: `e.liskina@365.rsu.edu.ru, katelis@yandex.ru`