ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 20–28
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-20-28

УДК 517.956

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ КОВАРИАНТНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В $\mathbb{R}^3$

© 2022 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. Э. НОВОСЕЛЬЦЕВА**

Аннотация. Рассмотрен класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Такие системы $\dot{\boldsymbol{u}} = \mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$ описывают изменение со временем $t \in \mathbb{R}$ векторных полей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ состоит из всех систем, инвариантных относительно трансляций времени $t \in \mathbb{R}$ и пространства $\mathbb{R}^3$, а также преобразующихся ковариантным образом при вращении $\mathbb{R}^3$. Дается описание этого класса нелинейных дифференциальных операторов L первого порядка, действующих в функциональном пространстве $C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, которые являются генераторами эволюции таких систем. Найдено необходимое и достаточное условие того, что оператор L из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ порождает гиперболическую систему.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, квазилинейная система уравнений, гиперболичность, векторное поле, ковариантность, сферическая симметрия.

HYPERBOLIC FIRST-ORDER COVARIANT EVOLUTION EQUATIONS FOR VECTOR FIELDS IN $\mathbb{R}^3$

© 2022 **Yu. P. VIRCHENKO, A. E. NOVOSELTSEVA**

Abstract. The class $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ of systems of first-order quasilinear partial differential equations is considered. Such systems $\dot{\boldsymbol{u}} = \mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$ describe the evolution of vector fields $\boldsymbol{u}(\ boldsymbolx, t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ in time $t \in \mathbb{R}$. The class $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ consists of all systems that are invariant under translations in time $t \in \mathbb{R}$ and space $\mathbb{R}^3$ and are covariant under rotations of $\mathbb{R}^3$. We describe the class of first-order nonlinear differential operators L acting in the functional space $C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ that are evolution generators of such systems. We obtain a necessary and sufficient condition for the operator $\mathsf{L} \in \mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ to generate a hyperbolic system.

Keywords and phrases: first-order differential operator, quasilinear system, hyperbolicity, vector field, covariance, spherical symmetry.

AMS Subject Classification: 35F60

1. Введение. В этой статье мы продолжаем начатое нами в предыдущих работах исследование специальных бесконечномерных динамических систем, описывающих эволюцию полей на $\mathbb{R}^3$ (см. вышедшие к настоящему времени работы [2–6,14]). Эти динамические системы выделены тем, что они обладают фундаментальными физическими симметриями, что обуславливает возможность их применения в математической физике с точки зрения описания динамики конденсированных сред. В настоящей работе мы рассматриваем эволюционное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t) = (\mathsf{L}[\boldsymbol{u}])(\boldsymbol{x}, t), \tag{1}$$

в функциональном пространстве $C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ локально непрерывно дифференцируемых полей на $\mathbb{R}^3$, описывающих изменение со временем $t \in \mathbb{R}$ векторных полей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, то есть уравнения, которым подчинены функции $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$. Здесь и далее точка, поставленная над функцией, обозначает частную производную по t, а генератор эволюции $\mathsf{L}[\cdot]$ в (1) обозначает оператор, действующий в пространстве $C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Так как векторы $\boldsymbol{u} = \langle u_j; j \in \{1,2,3\}\rangle$ в $\mathbb{R}^3$ бывают двух различных типов: полярные и аксиальные, то, соответственно, векторные поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \langle u_j(\boldsymbol{x},t); j \in \{1,2,3\}\rangle$ на $\mathbb{R}^3$ также подразделяются на два типа: полярные и аксиальные (псевдовекторные), в зависимости от типа значений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, принимаемых функциями $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$. Далее мы изучаем динамические системы, связанные с полярными векторными полями.

В связи с тем, что генератор эволюции осуществляет отображение $\mathsf{L}[\cdot]\colon C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \mapsto C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, то он, естественным образом, разлагается на декартовы компоненты $\mathsf{L}[\cdot] = \langle \mathsf{L}_j[\cdot]; j \in \{1,2,3\}\rangle$, согласно декартовым компонентам $u_j(\boldsymbol{x},t)$; $j \in \{1,2,3\}$, векторных полей в левой части (1). Каждая такая компонента осуществляет отображение $\mathsf{L}_j[\cdot]\colon C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \mapsto C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $j \in \{1,2,3\}$.

Далее, мы будем считать, что компоненты $\mathsf{L}_j[\cdot]$, $j \in \{1,2,3\}$, полностью определяющие генератор $\mathsf{L}[\cdot]$ в уравнении (1), имеют вид

$$(\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}])(\boldsymbol{x},t) = (a_{jkl}\nabla_k u_l + H_j)(\boldsymbol{x},t), \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{2}$$

где коэффициенты a_{jkl} и слагаемые H_j представляют собой значения в точке $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ непрерывных на $\mathbb{R}^3$ функций $a_{jkl} \equiv a_{jkl}(\boldsymbol{u})$, $H_j \equiv H_j(\boldsymbol{u})$; $j,k,l \in \{1,2,3\}$. Кроме того, в формуле (2) и далее в работе посредством ∇_k обозначены дифференциальные операторы $\partial/\partial x_k$, $k \in \{1,2,3\}$ и, таким образом, $\nabla_k u_l \equiv \partial u_l(\boldsymbol{x})/\partial x_k$, $k,l \in \{1,2,3\}$. Наконец, в этой формуле и далее во всех математических выражениях работы предполагается, что наличие в них повторяющихся парным образом индексов указывает на присутствие в этих формулах суммирования по каждому из таких индексов, по всем возможным для них значениям 1, 2, 3.

Таким образом, в терминах декартовых компонент $\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}]$, $j \in \{1,2,3\}$, уравнение (1) представляет собой систему квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{jkl}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))\frac{\partial u_l(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_k} + H_j(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)), \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{3}$$

Мы будем далее рассматривать класс систем уравнений (3), подчиненных дополнительным требованиям, которые мы опишем в следующем разделе. Целью же исследования настоящей работы является нахождение необходимых и достаточных условий гиперболичности системы из этого класса. Эти условия формулируются в виде ограничений на коэффициенты $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$.

2. Системы класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Дополнительное ограничение, накладываемое на рассматриваемые в настоящей работе системы квазилинейных уравнений, состоит в использовании таких генераторов $\mathsf{L}[\cdot]$ в уравнении (1), которые обладают ковариантностью по отношению к преобразованиям группы $\mathbb{O}_3$ на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Заметим, прежде всего, что уравнения (1) с генераторами вида (2) обладают свойствами однородности при трансляциях времени и пространства $\mathbb{R}^3$, так как коэффициенты $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ и функции $H_j(\boldsymbol{u})$ не зависят явно от времени $t \in \mathbb{R}$ и вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. В этом случае уравнение (1) инвариантно относительно трансляций времени $t \Rightarrow t + s$, $s \in \mathbb{R}$ и пространства $\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$.

Группа $\mathbb{O}_3$ состоит из ортогональных 3×3-матриц $\mathcal{A}$, то есть таких, которые обладают свойством $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^T\mathcal{A} = \mathcal{I}$. Обозначим посредством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\cdot]$ дифференциальный оператор, который получается в результате преобразования оператора $\mathsf{L}[\cdot]$ матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$. Так как $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ — векторное поле, то при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ его значения в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ преобразуются в $(\mathcal{A}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},t)$. В этом случае требование ковариантности уравнения (1) означает, что оператор $\mathsf{L}[\cdot]$ обладает свойством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\mathcal{A}\boldsymbol{u}] = \mathcal{A}\mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$.

Выясним те ограничения, которые накладывает сформулированное свойство ковариантности на дифференциальный оператор первого порядка.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (1) *с генератором* $\mathsf{L}[\cdot]$, *определенным формулой* (2), *удовлетворяло условию ковариантности, необходимо и достаточно, чтобы при преобразовании* *этого уравнения матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$ набор $H_j(\boldsymbol{u})$, $j \in \{1,2,3\}$, и алгебраический объект* [1] *третьего ранга $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ преобразовывались в фиксированной точке $\langle \boldsymbol{x}, t\rangle \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, соответственно, как вектор и тензор третьего ранга.*

Доказательство. Ввиду того, что набор $\dot{u}_j(\boldsymbol{x},t)$, $j \in \{1,2,3\}$, в фиксированной точке $\langle \boldsymbol{x}, t\rangle$ представляет вектор в $\mathbb{R}^3$, то набор компонент с $j \in \{1,2,3\}$ выражения в правой части (1) также составляет вектор по отношению к преобразованиям матрицами $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$. Далее, так как набор компонент векторного поля $u_j(\boldsymbol{x},t)$, $j \in \{1,2,3\}$, и матрица производных $\nabla_k u_l(\boldsymbol{x},t)$, $k,l \in \{1,2,3\}$, являются независимыми функциями, то независимыми являются функции, представляемые первым и вторым слагаемым в правой части уравнения. Поэтому каждое из этих слагаемых представляет собой компоненты вектора. Таким образом, набор $H_j(\boldsymbol{u})$, $j \in \{1,2,3\}$, представляет компоненты вектора в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим первое слагаемое. Матрица производных $\nabla_k u_l(\boldsymbol{x})$, $k,l \in \{1,2,3\}$, представляет тензор второго ранга, ковариантный по индексу l и контравариантный по индексу k. В самом деле, преобразуя матрицу производных в фиксированной точке $\boldsymbol{x}$ посредством матрицы $(\mathcal{A})_{jk} = A_{jk}$, $(\mathcal{A}^{-1})_{jk} = A_{kj}$, при учете указанного выше соглашения о суммировании по парным индексам, находим

$$A_{k'k}A_{ll'}\frac{\partial u_{l'}(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k'}} = (\mathcal{A}^{-1})_{kk'}(\mathcal{A})_{ll'}\frac{\partial u_{l'}(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k'}} = \frac{\partial(\mathcal{A}\boldsymbol{u})_l(\boldsymbol{x})}{\partial(\mathcal{A}\boldsymbol{x})_k} = \frac{\partial u'_l(\boldsymbol{x})}{\partial x'_k} \equiv \nabla'_k u'_l,$$

что доказывает указанное положение.

Преобразование набора, представленного первым векторным слагаемым в уравнении (2), матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$ приводит его к виду

$$\begin{aligned} A_{jj'}a_{j'mn}\nabla_m u_n(\boldsymbol{x}) &= A_{jj'}a_{j'k'l'}\delta_{k'm}\delta_{l'n}\nabla_m u_n(\boldsymbol{x}) = \\ &= A_{jj'}A_{k'k}A_{ll'}a_{j'k'l'}(A_{mk}A_{ln}\nabla_m u_n(\boldsymbol{x})) = \\ &= A_{jj'}A_{k'k}A_{ll'}a_{j'k'l'}\nabla'_k u'_l(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

С другой стороны, в преобразованной посредством матрицы $\mathcal{A}$ системе координат это слагаемое согласно определению ковариантности должно иметь вид $a'_{jkl}\nabla'_k u'_l$. Сравнивая два полученных выражения при учете произвольности матрицы производных $\nabla'_k u'_l$, получаем равенство

$$a'_{jkl} = A_{jj'}A_{k'k}A_{ll'}a_{j'k'l'}.$$

Отсюда следует, что алгебраический объект a_{jkl}, $j,k,l \in \{1,2,3\}$, преобразуется как тензор третьего ранга, который ковариантен по первому и третьему индексам и контравариантен по второму. Таким образом, необходимость сформулированного в утверждении теоремы условия доказана. Достаточность же его очевидна. □

В дальнейшем, для простоты изложения, мы не делаем различая между ковариантными и контравариантными векторами и тензорами.

Частным случаем систем уравнений (1) являются системы, у которых оператор (2) имеет вид

$$(\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}])(\boldsymbol{x},t) = (\nabla_k S_{jk}(\boldsymbol{u}) + H_j)(\boldsymbol{x},t), \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{4}$$

где $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ — непрерывно дифференцируемая тензор-функция на $\mathbb{R}^3$. Ввиду функциональной независимости тензор-функции $\nabla_k u_l$ от вектор-функции $\boldsymbol{u}$ из равенства

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial u_l}\nabla_k u_l = 0$$

следует $\partial S_{jk}/\partial u_l = 0$, то есть функция $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ определена однозначно с точностью до произвольной постоянной матрицы. Такие системы мы будем называть системами *дивергентного типа*. Очевидно, что можно установить связь между тензор-функциями $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ и $S_{jk}(\boldsymbol{u})$:

$$\frac{\partial S_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial u_l} = a_{jkl}(\boldsymbol{u}), \quad j,k,l \in \{1,2,3\}. \tag{5}$$

[1] Здесь мы используем терминологию монографии [12].

В связи со сформулированным свойством ковариантности уравнения (1), возникает важная, с точки зрения физических приложений, задача об описании класса систем дифференциальных уравнений, обладающих этим свойством. Вследствие доказанной теоремы, такое описание сводится к описанию всех тензор-функций $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ и вектор-функций $H_j(\boldsymbol{u})$.

Описание тензор-функции $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ дается в терминах разложения

$$a_{jkl}(\boldsymbol{u}) = \sum_{s=1}^{N} f^{(s)} a^{(s)}_{jkl}(\boldsymbol{u}), \tag{6}$$

где набор $\{a^{(s)}_{jkl}(\boldsymbol{u});\ s = 1 \div N\}$ составляет т. н. *целый рациональный базис* форм-инвариантных тензор-функций (см. [13]) или, в другой терминологии (см. [8]), комитантов. Этим базисным функциям соответствует набор $\{f^{(s)};\ s = 1 \div N\}$, который состоит из произвольных непрерывных функций, зависящих от набора алгебраически независимых инвариантов группы $\mathbb{O}_3$. Таким образом, решение указанной выше задачи состоит в построении целого рационального базиса вместе с определением его размерности N и нахождении набора независимых инвариантов.

Класс дифференциальных операторов $\mathsf{L}[\cdot]$, обладающих свойством ковариантности, будем далее обозначать так же, как и класс соответствующих им систем уравнений, посредством $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$.

В случае систем дивергентного типа с генератором эволюции (4), их описание дается в терминах разложения

$$S_{jk}(\boldsymbol{u}) = \sum_{s=1}^{N_d} g^{(s)} S^{(s)}_{jk}(\boldsymbol{u}), \tag{7}$$

на основе *целого рационального базиса* $\left\{S^{(s)}_{jk}(\boldsymbol{u}); s = 1 \div N_d\right\}$ форм-инвариантных функций, представляющих тензоры второго ранга, и соответствующего набора $\{g^{(s)};\ s = 1 \div N\}$ непрерывных функций от того же самого набора инвариантов. Таким образом, описание таких систем состоит в построении целого рационального базиса для тензоров второго ранга с размерностью N_d.

Укажем решение описанной задачи в т. н. сферически симметричном случае, когда набор образующих тензорной алгебры, в рамках которой строится целый рациональный базис, состоит из универсального инвариантного тензора второго ранга $\boldsymbol{\delta}$ — символа Кронекера с компонентами $\delta_{jk} = \{1, j = k; 0, j \neq k\}$ и вектора $\boldsymbol{u}$, а набор инвариантов представляется единственным инвариантом вектора $\eta \equiv \boldsymbol{u}^2$. В этом случае все допустимые вектор-функции $H_j(\boldsymbol{u})$ даются формулой $H_j(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} h(\eta)$, где $h(\cdot)$ — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

На основе указанных выше образующих элементов тензорной алгебры можно построить только лишь два линейно независимых тензора второго ранга, которые являются мономами относительно операций тензорного умножения и свертки, а именно их компоненты даются выражениями δ_{jk} и $u_j u_k$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$, которые представляют тензоры второго ранга и которые составляют целый рациональный базис для разложения (7). Точно так же убеждаемся, что имеется только лишь четыре линейно независимых монома, которые представляют тензоры третьего ранга: $\delta_{jk} u_l$, $\delta_{kl} u_j$, $\delta_{jl} u_k$ и $u_j u_k u_l$, $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Они составляют целый рациональный базис в разложении (6). Заметим, что недопустимо использование в качестве образующей тензорной алгебры символ Леви-Чивиты ε_{jkl}, так как он является псевдотензором и поэтому на его основе невозможно построение тензоров в отсутствие аксиального вектора среди образующих тензорной алгебры.

Таким образом, мы получаем, что $N = 4$ и $N_d = 2$ и разложение (6) и (7), соответственно, принимают вид

$$a_{jkl}(\boldsymbol{u}) = f^{(1)} \delta_{jk} u_k + f^{(2)} \delta_{kl} u_j + f^{(3)} \delta_{jl} u_k + f^{(4)} u_j u_k u_l, \tag{8}$$

$$S_{jk}(\boldsymbol{u}) = g^{(1)} \delta_{jk} + g^{(2)} u_j u_k \tag{9}$$

с непрерывными функциями $f^{(s)} \equiv f^{(s)}(\eta)$, $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $g^{(s)} \equiv g^{(s)}(\eta)$, $s \in \{1, 2\}$ от единственного инварианта $\eta = \boldsymbol{u}^2$.

Выпишем список линейно независимых дифференциальных операторов первого порядка $a^{(s)}_{jkl}(\boldsymbol{u}) \nabla_k u_l$, $s \in \{1, 2, 3, 4\}$, соответствующих элементам целого рационального базиса. Нумерация элементов из этого списка соответствует указанному выше порядку элементов базиса:

$$(\boldsymbol{u}, \nabla_j \boldsymbol{u}), \quad u_j(\nabla, \boldsymbol{u}), \quad (\boldsymbol{u}, \nabla) u_j, \quad u_j(\boldsymbol{u}, (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}). \tag{10}$$

Соответственно общий вид уравнений из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ дается формулой

$$\dot{u}_j = f^{(1)}(\boldsymbol{u}, \nabla_j \boldsymbol{u}) + f^{(2)} u_j(\nabla, \boldsymbol{u}) + f^{(3)}(\boldsymbol{u}, \nabla) u_j + f^{(4)} u_j(\boldsymbol{u}, (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}) + u_j h, \tag{11}$$

где круглыми скобками обозначена операция скалярного умножения заключенных в них векторов. Сформулируем полученный результат в виде отдельного утверждения.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1) *квазилинейных уравнений первого порядка с оператором* (2) *принадлежала классу* $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ *ковариантных уравнений для векторного поля* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *на* $\mathbb{R}^3$*, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид* (11) *с коэффициентами* $f^{(m)}(\boldsymbol{u}^2)$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ *и* $h(\boldsymbol{u}^2)$*, представленными непрерывными функциями на* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

В частности, из (5) и (9) следует общий вид уравнений дивергентного типа из этого класса.

Следствие 1. *Для того чтобы система* (1) *квазилинейных уравнений первого порядка с оператором* (2) *принадлежала классу* $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ *ковариантных уравнений для векторного поля* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *на* $\mathbb{R}^3$ *и при этом была системой дивергентного типа, необходимо и достаточно, чтобы она имела следующий вид*

$$\dot{u}_j = \nabla_j g^{(1)} + \nabla_k (g^{(2)} u_j u_k) + u_j h. \tag{12}$$

с коэффициентами $g^{(m)}(\boldsymbol{u}^2)$, $m \in \{1, 2\}$*, представленными непрерывно дифференцируемыми функциями, и непрерывной функцией* $h(\boldsymbol{u}^2)$ *на* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

На основе формулы (5) для коэффициентов $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ в случае, если уравнение (1) является уравнением дивергентного типа, находим

$$\nabla_k S_{jk} = 2 g^{(1)\prime} \nabla_j u_l + 2 g^{(2)\prime} u_j u_k u_l + g^{(2)} (\delta_{jl} u_k + \delta_{kl} u_j) \nabla_k u_l,$$

где штрих указывает производную по η и поэтому

$$a_{jkl}(\boldsymbol{u}) = 2 g^{(1)\prime} \delta_{jk} u_l + 2 g^{(2)\prime} u_j u_k u_l + g^{(2)} (\delta_{jl} u_k + \delta_{kl} u_j).$$

Сравнение этого разложения с (8) дает следующие связи между коэффициентами

$$2(g^{(1)})' = f^{(1)}, \quad g^{(2)} = f^{(2)} = f^{(3)}, \quad 2(g^{(2)})' = f^{(4)}. \tag{13}$$

В частности, совместность выражений для $f^{(s)}$, $s \in \{2, 3, 4\}$, является критерием того, что уравнение (1) с оператором (2) является уравнением дивергентного типа.

Приведем пример простейшего приложения результата, сформулированного в Теореме 2. Поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ назовем унимодальным, если оно подчинено условию $\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x}, t) = u^2 = \mathrm{const}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы система квазилинейных уравнений первого порядка для унимодального векторного поля* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *на* $\mathbb{R}^3$ *с оператором* (2) *принадлежала классу* $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ *ковариантных уравнений, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$\dot{u}_j = \gamma (\boldsymbol{u}, \nabla) u_j, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Доказательство. При выполнении условия $\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x}, t) = u^2$ в уравнении (11), очевидным образом, исчезают слагаемые с коэффициентами $f^{(1)}$ и $f^{(4)}$, ввиду тождеств $(\boldsymbol{u}, \nabla_j \boldsymbol{u}) = \nabla_j \boldsymbol{u}^2/2$, $(\boldsymbol{u}, (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}^2/2$. Далее, при этом условии все коэффициенты $f^{(m)}$, $m \in \{2, 3\}$, и функция h становятся постоянными. Тогда, умножая скалярно обе части (14) на $u_j(\boldsymbol{x}, t)$ и учитывая, что $u_j \dot{u}_j = \dot{u}^2/2 = 0$ и $u_j(\boldsymbol{u}, \nabla) u_j = (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}^2/2 = 0$ для унимодального поля, получаем равенство

$$f^{(2)} u^2 (\nabla, \boldsymbol{u}) + u^2 h = 0. \tag{15}$$

Так как это равенство должно выполняться тождественно для любого унимодального поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, то положим

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cos(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b} \sin(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}),$$

где векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}$ представляют тройку взаимно ортогональных векторов и подчинены условию $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2 = u^2$. Тогда это поле унимодально и соленоидально, то есть имеет место равенство $(\nabla, \boldsymbol{u}) = 0$. Подставляя поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ в (15), получаем, что должно иметь место $h = 0$. С другой стороны, кроме приведенного явным образом векторного поля, существуют унимодальные поля, которые не являются соленоидальными и поэтому их подстановка в (15) приводит к равенству $f^{(2)} = 0$. □

3. Гиперболичность систем квазилинейных уравнений класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Введем понятие гиперболической системы квазилинейных уравнений (см. [11, с. 25]). В применении к системе, определяемой уравнением (1) с оператором (2), это понятие вводится посредством сопоставления уравнению (1) линеризованного уравнения, которому подчиняется векторное поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \langle v_j(\boldsymbol{x},t);\ j = 1,2,3\rangle$ при фиксации поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$:

$$\dot{v}_j(\boldsymbol{x},t) = \left(a_{jkl}(\boldsymbol{u})\nabla_k v_l + \frac{\partial H_j(\boldsymbol{u})}{\partial u_l} v_l\right)(\boldsymbol{x},t), \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{16}$$

Определение 1. Уравнение (1) с оператором (2) называется гиперболическим в области $\{\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}\rangle \in \Omega : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\}$, $\boldsymbol{q} = \langle q_j; j = 1,2,3\rangle \in \mathbb{R}^3$, если в соответствующем ему уравнении (16) матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$ с матричными элементами $(\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}))_{jl} \equiv T_{jl}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}) = q_k a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ является диагонализуемой, все собственные числа $\omega^{(m)} \equiv \omega^{(m)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})$, $m = 1,2,3$, которой вещественны. Уравнение (1) называется гиперболическим, если $\Omega = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Таким образом, условие гиперболичности уравнения (1) состоит в вещественности корней $\omega^{(m)}$, $m = 1,2,3$, кубического уравнения

$$\det(\omega - \mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})) = 0 \tag{17}$$

относительно ω.

Записывая уравнение (17) в виде

$$\det(\omega - q_l a_{jkl}(\boldsymbol{u})) = 0, \tag{18}$$

находим, что при любом вещественном $\mu \neq 0$ и $\langle \boldsymbol{q},\boldsymbol{u}\rangle \in \Omega$, для решений ω уравнения (17) имеет место

$$\det(\omega\mu - (\mu q_l)a_{jkl}(\boldsymbol{u})) = \mu^3 \det(\omega - q_l a_{jkl}(\boldsymbol{u})) = 0,$$

то есть $\omega\mu$ является вещественным собственным числом для матрицы $\mathcal{T}(\mu\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$.

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Область гиперболичности уравнения* (1) *инвариантна относительно умножения вектора $\boldsymbol{q}$ на любое число $\mu \in \mathbb{R}$.*

Для определения условий гиперболичности уравнения (11) определим соответствующую ему матрицу $\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$. На основании (8) находим ее матричные элементы $T_{jl}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}) = q_k a_{jkl}(\boldsymbol{u})$:

$$T_{jl}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}) = f^{(1)} q_j u_l + f^{(2)} u_j q_l + f^{(3)} \delta_{jl}\xi + f^{(4)}\xi u_j u_l, \tag{19}$$

где введено обозначение $\xi = (\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$. Соответствующее линеаризованное уравнение (см. (16)) для поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ имеет вид:

$$\dot{v}_j = T_{jl}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})v_l + v_j h + 2u_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})h',$$

$$T_{jl}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})v_l \equiv f^{(1)}(\boldsymbol{u},\nabla_j\boldsymbol{v}) + f^{(2)}u_j(\nabla,\boldsymbol{v}) + f^{(3)}(\boldsymbol{u},\nabla)v_j + f^{(4)}u_j(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{u},\nabla)\boldsymbol{v}).$$

В частности, для уравнения дивергентного типа (12) матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$ определяется матричными элементами следующего вида

$$T_{jl}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}) = 2g^{(1)\prime} q_j u_l + g^{(2)}(\xi\delta_{jl} + u_j q_l) + 2\xi g^{(2)\prime} u_j u_l. \tag{20}$$

На основе формулы (19) вычислим собственные числа матрицы. Представим ее в виде суммы

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}) = \xi f^{(3)}\mathcal{I} + \mathcal{P}, \tag{21}$$

где матрица $\mathcal{P}$ определяется матричными элементами

$$(\mathcal{P})_{jl} = P_{jl} = f^{(1)} q_j u_l + f^{(2)} u_j q_l + f^{(4)}\xi u_j u_l. \tag{22}$$

При этом собственные числа $\lambda^{(m)}$ матрицы $\mathcal{P}$, которые являются решениями уравнения $\det(\lambda - \mathcal{P}) = 0$, связаны с собственными числами $\omega^{(m)}$ равенством

$$\omega^{(m)} = \lambda^{(m)} + \xi f^{(3)}, \quad m \in \{1,2,3\}. \tag{23}$$

Одно из собственных чисел $\lambda^{(1)}$ матрицы $\mathcal{P}$ равно нулю. Ему соответствует собственный вектор с компонентами $\varepsilon_{lmn} u_m q_n$, $l \in \{1,2,3\}$, так как $\varepsilon_{lmn} u_l u_m q_n = \varepsilon_{lmn} u_m q_n q_l = 0$, ввиду полной антисимметрии символа ε_{lmn}. Тогда $\det \mathcal{P} = 0$ и поэтому спектральное уравнение $\det(\lambda - \mathcal{P}) = 0$ для матрицы $\mathcal{P}$ принимает вид

$$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{Sp}\mathcal{P} + \frac{1}{2}\lambda[(\operatorname{Sp}\mathcal{P})^2 - \operatorname{Sp}\mathcal{P}^2] = 0,$$

где символом Sp обозначена операция вычисления следа матрицы. Следовательно, ненулевые собственные числа матрицы $\mathcal{P}$ определяются как решения квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp}\mathcal{P} + \frac{1}{2}[(\operatorname{Sp}\mathcal{P})^2 - \operatorname{Sp}\mathcal{P}^2] = 0. \tag{24}$$

Так как $\operatorname{Sp}\mathcal{P} = \xi(f^{(1)} + f^{(2)}) + \xi\eta f^{(4)}$ и

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}^2)_{jl} = P_{jk}P_{kl} = (f^{(1)} q_j u_k + f^{(2)} u_j q_k + f^{(4)} \xi u_j u_k)(f^{(1)} q_k u_l + f^{(2)} u_k q_l + f^{(4)} \xi u_k u_l) = \\ = q_j u_l \xi f^{(1)}(f^{(1)} + f^{(4)}\eta) + u_j q_l \xi f^{(2)}(f^{(2)} + f^{(4)}\eta) + \\ + u_j u_l (f^{(1)} f^{(2)} \zeta + f^{(1)} f^{(4)} \xi^2 + f^{(2)} f^{(4)} \xi^2 + (f^{(4)})^2 \xi^2 \eta) + q_j q_l f^{(1)} f^{(2)} \eta,\end{aligned}$$

где $\zeta \equiv \boldsymbol{q}^2$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}\mathcal{P}^2 = \xi^2 f^{(1)}(f^{(1)} + f^{(4)}\eta) + \xi^2 f^{(2)}(f^{(2)} + f^{(4)}\eta) + \\ + \eta(f^{(1)} f^{(2)} \zeta + (f^{(1)} + f^{(2)}) f^{(4)} \xi^2 + (f^{(4)})^2 \xi^2 \eta) + f^{(1)} f^{(2)} \zeta\eta = \\ = 2 f^{(1)} f^{(2)} \eta\zeta + \xi^2((f^{(1)})^2 + (f^{(2)})^2 + 2 f^{(4)}(f^{(1)} + f^{(2)})\eta + (f^{(4)})^2 \eta^2) = \\ = 2 f^{(1)} f^{(2)} \eta\zeta + \xi^2[(f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(4)}\eta)^2 - 2 f^{(1)} f^{(2)}] = \xi^2(\operatorname{Sp}\mathcal{P})^2 + 2 f^{(1)} f^{(2)} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}]^2\end{aligned}$$

и поэтому

$$\frac{1}{2}[\operatorname{Sp}\mathcal{P}^2 - (\operatorname{Sp}\mathcal{P})^2] = f^{(1)} f^{(2)} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}]^2,$$

где использовано обозначение векторного произведения векторов $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}]$ пары векторов. Следовательно, уравнение (24) принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp}\mathcal{P} - f^{(1)} f^{(2)} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}]^2 = 0.$$

Таким образом, ненулевые собственные числа матрицы $\mathcal{P}$ даются формулой

$$\lambda^{(m)} = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})(f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(4)}\eta) \pm ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})^2 (f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(4)}\eta)^2 + 4 f^{(1)} f^{(2)} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}]^2)^{1/2}], \tag{25}$$

$m \in \{2,3\}$.

Для вещественности собственных чисел $\omega^{(m)}$, согласно (23), необходима и достаточна вещественность чисел $\lambda^{(m)}$, $m \in \{1,2,3\}$, что имеет место в том и только в том случае, если

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})^2 (f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(4)}\eta)^2 + 4 f^{(1)} f^{(2)} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}]^2 \geqslant 0.$$

Для того чтобы это условие выполнялось для всех векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{q}$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f^{(1)}(\eta)$ и $f^{(2)}(\eta)$ удовлетворяли условию $f^{(1)}(\eta) f^{(2)}(\eta) \geqslant 0$. Необходимость этого условия следует из возможности выбора векторов ортогональными друг другу.

Так как при наличии трех различных собственных чисел матрица $\mathcal{P}$ диагонализируема, то матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})$ также диагонализируема. Если же имеет место $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}] = 0$, либо $f^{(1)} f^{(2)} = 0$, то появляется второе нулевое решение спектрального уравнения (24). Однако, несмотря на кратность нулевого решения, ему отвечают два взаимно ортогональных собственных вектора, один из которых равен $\varepsilon_{lmn} q_m u_n$, а второй находится в плоскости векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{q}$. Следовательно, и в этом вырожденном случае матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})$ диагонализируема вместе с матрицей $\mathcal{P}$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 5. *Гиперболичность ковариантного уравнения* (1) *с оператором* $\mathsf{L}[\cdot]$ *в форме, определяемой* (2) *и* (8), *имеет место тогда и только тогда, когда* $f^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)f^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) \geqslant 0$.

Следствие 2. *Гиперболичность ковариантного уравнения* (1) *с оператором* $\mathsf{L}[\cdot]$ *дивергентного типа в форме, определяемой* (4) *и* (9), *имеет место тогда и только тогда, когда* $[g^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)]'g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) \geqslant 0$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулами связи (13) между функциями $f^{(m)}$ и $g^{(m)}$, $m \in \{1,2\}$. □

Замечание 1. Уравнение с оператором дивергентного типа было исследовано нами, с точки зрения гиперболичности, ранее в [1] на основе другой техники, однако остался неисследованным вырожденный случай $[g^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)]'g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) = 0$. Кроме того, в этой работе не рассматривался «исключительный» случай, при котором $2[g^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)]' + g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) = 0$. В этом случае, очевидно, с точки зрения Следствия 2 уравнение не является гиперболическим, так как $[g^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)]'g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) = -[g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2)]^2/2 < 0$.

4. Заключение.

Задача, решению которой посвящена работа, имеет важное значение для математической физики. Она является частным случаем общей проблемы, связанной с разработкой физически обоснованных математических методов, направленных на конструирование адекватных эволюционных уравнений для описания изменения со временем макроскопических состояний сложным образом устроенных конденсированных сред. Такие уравнения должны удовлетворять фундаментальным, с физической точки зрения, принципам симметрии относительно пространственных и временных трансляций и относительно вращений пространства погружения среды.

В настоящей работе представлен, по нашему мнению, окончательный ответ на вопрос, каким образом должно выглядеть эволюционное уравнение в том случае, когда полное описание макроскопического состояния среды осуществляется посредством векторного поля (полярного), но при этом произведено пренебрежение протекающими в среде физическими диссипативными процессами. В этом направлении очень важно продолжить изучение квазилинейных систем первого порядка с точки зрения их гиперболичности, которые являются ковариантными в смысле определения, данного в настоящей работе. На следующем шаге важно описать класс возможных гиперболических ковариантных систем уравнений в том случае, когда ее состояние описывается (связанной) парой векторных полей. В частности, с теоретической точки зрения важно выделить среди этого класса эволюционных уравнений такие, которые являются гамильтоновыми, например, в смысле работ [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Новосельцева А. Э.* Гиперболические уравнения первого порядка в $\mathbb{R}^3$// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021). — Воронеж: ВГУ, 2021. — С. 81.
2. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *170*. — С. 15–30.
3. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Математические задачи конструирования эволюционных уравнений динамики конденсированных сред// Мат. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 25-29 июня 2018 г.). — Уфа: БашГУ, 2018. — С. 262–264.
4. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения// Мат. V Междунар. науч. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 4-7 декабря 2018 г.). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. — С. 59.
5. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Мат. IV Всеросс. науч.-практ. конф. «Современные проблемы физико-математических наук». Часть 1 (Орёл, 22-25 ноября 2018 г.). — Орёл: ОГУ им. И. С. Тургенева, 2018. — С. 83–86.

6. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Ковариантные дифференциальные операторы первого порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *187*. — С. 19–30.
7. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
8. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
9. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* О гамильтоновом подходе к динамике сплошных сред// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 2. — С. 283–296.
10. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией// Физ. элемент. частиц атом. ядра. — 1996. — *27*, № 2. — С. 431–492.
11. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
12. *Mac-Connell A. J.* Application of Tensor Analysis. — New York: Dover, 1957.
13. *Spencer A. G. M.* Theory of invariants// in: Continuum Physics, I. Part III (*Eringen A. C.*, ed.). — New York: Academic Press, 1971. — P. 239–353.
14. *Virchenko Yu. P. Subbotin A. V.* The class of evolutionary ferrodynamic equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — *44*, № 15. — P. 11913–11922.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный университет
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Новосельцева Алина Эдуардовна
Белгородский государственный технологический университет
E-mail: novoseltseva@gmail.com