ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 29–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-29-36

УДК 517.956.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

© 2022 г. **И. В. ДЕНИСОВ**

Аннотация. Представлен обзор результатов по развитию метода угловых пограничных функций для нелинейных уравнений. В прямоугольнике рассматривается сингулярно возмущенное параболическое уравнение

$$\epsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \epsilon)$$

с краевыми условиями первого рода. Функция F предполагается нелинейной по переменной u. Наиболее подробно исследован случай, когда в угловых точках прямоугольника функция F является квадратичной или кубической относительно переменной u. Исследуется возможность построения полного асимптотического разложения решения задачи при $\epsilon \to 0$.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE FIRST KIND

© 2022 **I. V. DENISOV**

Abstract. This paper is a review of applications of the method of angular boundary functions to nonlinear equations. We consider the first boundary-value problem for the following singularly perturbed parabolic equation in a rectangle:

$$\epsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \epsilon),$$

where the function F is nonlinear with respect to the variable u. We consider the case where the function F is quadratic or cubic in the variable u at the corner points of the rectangle and examine the possibility of constructing a complete asymptotic expansion of the solution of the problem as $\epsilon \to 0$.

Keywords and phrases: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation.

AMS Subject Classification: 34E10

1. Введение. В области $\Omega := \{(x, t) \mid 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ переменных (x, t) рассматривается сингулярно возмущенное параболическое уравнение

$$\epsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \epsilon), \quad (x, t) \in \Omega, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0, \epsilon) = \phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

и краевыми условиями первого рода

$$u(0, t, \epsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \epsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Область Ω представляет собой прямоугольник, его граница не является гладкой кривой и содержит так называемые угловые точки. В этом случае для построения асимптотического разложения решения задачи (1)–(3) используется метод угловых пограничных функций, предложенный В. Ф. Бутузовым в [1]. Для задач (1)–(3) этот метод позволил исследовать случай, когда функция F является линейной относительно переменной u (см. [2]). В нелинейном случае возникали трудности, связанные с разрешимостью дифференциальных уравнений того же типа, что и исходное нелинейное уравнение (1). Этих проблем удавалось избегать при замене условий (3) на краевые условия второго рода, что снимало необходимость рассмотрения нелинейных параболических уравнений.

В нелинейном случае исследование задач (1)–(3) впервые было проведено в [7], где предполагалось, что в угловых точках прямоугольника функция F является квадратичной и монотонной по переменной u. В предыдущем обзоре [6] были рассмотрены модельные задачи химической кинетики, приводящие к задачам типа (1)–(3). Для таких задач были представлены результаты, полученные к 2019 году.

В предлагаемой работе представлен обзор результатов по развитию метода угловых пограничных функций для нелинейных уравнений, полученных при исследовании задачи (1)–(3) в последние два года (см. [4, 5, 10]).

2. Решение задачи. Метод угловых пограничных функций предполагает построение приближенного решения задачи (1)–(3) в виде асимптотического ряда относительно параметра ϵ с последующим доказательством равномерности такого приближения при $\epsilon \to 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$. С учетом структуры области Ω искомое приближение составляется из следующих частей:

$$u(x,t,\epsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \tag{4}$$

Здесь через $\bar{u}$ обозначена функция, называемая регулярной частью асимптотики. Эта функция представляет асимптотическое решение уравнения (1) или решение задачи (1)–(3) во внутренней части прямоугольника Ω без учета начальных и краевых условий. Слагаемые Π, Q и Q^* — это так называемые пограничные функции, которые призваны осуществить гладкий переход от регулярной части асимптотики к граничным условиям на сторонах прямоугольника Ω. Слагаемые P и P^* называются угловыми пограничными функциями, их роль заключается в сглаживании невязок, вносимых пограничными функциями вблизи вершин прямоугольника Ω: $(0,0)$ и $(1,0)$ соответственно.

Для задачи (1)–(3) предполагаются выполненными следующие стандартные условия.

Условие I. Функции $F(u,x,t,\epsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими, и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений:

$$\phi(0) = \psi_1(0), \quad \phi(1) = \psi_2(0). \tag{5}$$

Условие II. Вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$ имеет решение

$$u = \bar{u}_0(x,t). \tag{6}$$

В силу нелинейности функции вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ может иметь не одно решение. Налагаемые условия касаются только одного из возможных решений, которое обозначено как $u = \bar{u}_0(x,t)$.

Условие III. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x,t),x,t,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Условие IV. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \tau \geqslant 0, \quad \Pi_0(x,0) = \phi(x) - \bar{u}_0(x,0), \tag{7}$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x,\infty) = 0$.

Условие V. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k,t) + z_1, k, t, 0), \tag{8}$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0,0)$ при $y \to \infty$ (здесь t — параметр, $k = 0$ или 1).

В нелинейном случае условий I–V оказывается недостаточно для того, чтобы гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Поэтому в дальнейшем будут накладываться дополнительные условия, связанные с типом нелинейности.

Согласно методу угловых пограничных функций при построении полной асимптотики решения необходимо перейти к растянутым переменным

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\epsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\epsilon^2}. \tag{9}$$

Каждая функция в представлении (4) строится в виде асимптотического ряда по степеням ϵ:

$$\bar{u}(x,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}_k(x,t), \quad \Pi(x,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \Pi_k(x,\tau), \quad Q(\xi,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k(\xi,t),$$

$$Q^*(\xi_*,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k^*(\xi_*,t), \quad P(\xi,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k P_k(\xi,\tau), \quad P^*(\xi_*,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k P_k^*(\xi_*,\tau).$$

Правая часть уравнения (1) в соответствии с (4) заменяется суммой

$$F(u,x,t,\epsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F), \tag{10}$$

где

$$\bar{F} := F(\bar{u},x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{F}_k,$$

$$\Pi F := (F(\bar{u}+\Pi,x,t,\varepsilon) - \bar{F})|_{t=\varepsilon^2\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k F,$$

$$QF := (F(\bar{u}+Q,x,t,\varepsilon) - \bar{F})|_{x=\varepsilon\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k F,$$

$$Q^*F := (F(\bar{u}+Q^*,x,t,\varepsilon) - \bar{F})|_{x=1-\varepsilon\xi_*} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^* F,$$

$$PF := (F(\bar{u}+\Pi+Q+P,x,t,\varepsilon) - \Pi F - QF + \bar{F})\Big|_{\substack{x=\varepsilon\xi \\ t=\varepsilon^2\tau}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k F,$$

$$P^*F := (F(\bar{u}+\Pi+Q^*+P^*,x,t,\varepsilon) - \Pi F - Q^*F + \bar{F})\Big|_{\substack{x=1-\varepsilon\xi_* \\ t=\varepsilon^2\tau}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k^* F.$$

В результате подстановки выражений (4) и (10) в уравнение (1) задача распадается на части: регулярную, три погранслойные и две угловые. Построение регулярной и погранслойных частей асимптотики предполагает рассмотрение одного функционального и трех обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно. Методика решения таких задач хорошо отработана (см. [3]).

Основные трудности доставляет построение угловых пограничных функций P и P^*, так как этот процесс связан с разрешимостью нелинейных уравнений, аналогичных исходному уравнению (1). Задача для определения функции $P_0(\xi,\tau)$ ставится в первой четверти

$$\mathbb{R}^2_+ := \{(\xi,\tau) \mid \xi > 0, \ \tau > 0\}$$

плоскости растянутых переменных (ξ,τ) и имеет вид

$$a^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_0}{\partial\tau}=F(\bar u_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0)-\\ -F(\bar u_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau),0,0,0)-F(\bar u_0(0,0)+Q_0(\xi,0),0,0,0),\quad \xi>0,\quad \tau>0, \tag{11}$$

$$P_0(0,\tau)=-\Pi_0(0,\tau),\quad P_0(\xi,0)=-Q_0(\xi,0),\quad P_0(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty. \tag{12}$$

Для функций $P_k(\xi,\tau)$, $k\geqslant 1$, в области $\mathbb{R}^2_+$ получаются линейные задачи

$$a^2\frac{\partial^2 P_k}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_k}{\partial\tau}=F'_u(\bar u_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0)P_k+h_k, \tag{13}$$

$$P_k(0,\tau)=-\Pi_k(0,\tau),\quad P_k(\xi,0)=-Q_k(\xi,0),\quad P_k(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty, \tag{14}$$

где неоднородности h_k удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi,\tau)|\leqslant C\exp(-\kappa(\xi+\tau)), \tag{15}$$

если такого же вида оценкам удовлетворяют функции $P_0,\dots,P_{k-1}$. Здесь C и κ — некоторые положительные числа.

Необходимо разрешить три основные проблемы:

1. Имеет ли задача (11), (12) решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида (15)?
2. Если задача (11), (12) имеет решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке вида (15), то имеют ли задачи (13), (14) решения, удовлетворяющие подобным оценкам?
3. Если задачи (11)–(14) разрешимы, т. е. если ряд (4) может быть построен, то имеет ли задача (1)–(3) решение, для которого этот ряд будет асимптотическим приближением при $\epsilon\to 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$?

Задачи для определения функций $P^*_k(\xi_*,\tau)$, $k\geqslant 0$ ставится аналогично.

В [7] при исследовании задачи (11), (12) с помощью метода верхних и нижних решений удалось построить подходящие барьерные функции и тем самым доказать разрешимость первой проблемы. Более того, построенные барьерные функции гарантировали положительность коэффициента

$$F'_u(\bar u_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0)$$

при $P_k(\xi,\tau)$, $k\geqslant 1$, в линейных задачах (13), (14), что снимало вторую проблему. В завершение была обоснована равномерность построенного приближения в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Однако оказалось, что ограничениям, поставленным в работе [7], удовлетворяют не все квадратичные функции. В связи с этим обстоятельством исследования по квадратичной нелинейности были продолжены. В [8] метод был распространен на произвольные функции F, являющиеся в угловых точках прямоугольника Ω квадратичными относительно переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения.

Дальнейшие исследования проводились по двум направлениям:

1. в монотонном случае — обобщение результатов, полученных для квадратичных функций, на произвольную нелинейность;
2. в немонотонном случае — рассмотрение квадратичных функций в качестве модельных.

3. Монотонный случай. В [9] для произвольных нелинейностей были получены результаты, аналогичные квадратичному случаю. Доказательство существования подходящего решения нелинейной задачи (11), (12) было проведено методом верхних и нижних решений с использованием барьерных функций того же вида, что и в квадратичном случае. Однако в общем случае не удалось доказать выполнение необходимых неравенств, эти неравенства пришлось постулировать. Кроме рассмотренных ранее квадратичных нелинейностей этим неравенствам удовлетворяли и некоторые другие нелинейные функции, что, несомненно, являлось продвижением в исследовании общей задачи. Тем не менее, класс подходящих нелинейных функций не был полностью изучен.

В [10] были рассмотрены кубические функции следующего вида.

Условие VI. В угловых точках $(k, 0)$, $k = 0, 1$, прямоугольника Ω функция F имеет вид

$$F(u, k, 0, 0) = u^3 - \bar{u}_0^3, \tag{16}$$

где числа $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0)$ положительны и могут различаться в угловых точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Кроме этого, граничные значения $\phi(k, 0) > \bar{u}_0(k, 0)$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если выполнены условия* I–VI*, то задача* (11)*,* (12) *имеет решение* $P_0(\xi, \tau)$*, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида* (15)*.*

Для доказательства существования решения задачи (11), (12) использовался метод верхних и нижних решений дифференциальных уравнений, основанный на разрешимости дифференциальных неравенств (см. [13–15]). Этот метод заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \text{ в области } D, \quad Z = h \text{ на границе } \partial D \tag{17}$$

имеет решение Z в промежутке между барьерными функциями $Z_- \leqslant Z \leqslant Z_+$, если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leqslant 0, \quad L(Z_-) \geqslant 0, \quad Z_- \leqslant Z_+, \tag{18}$$

а на ее границе

$$Z_- \leqslant h \leqslant Z_+. \tag{19}$$

Было доказано, что в задаче (11), (12) на роль барьерных подходят функции

$$Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau) Q_0(\xi, 0)} \quad \text{и} \quad Z_+(\xi, \tau) = 0,$$

и тем самым было установлено существование решения $P_0(\xi, \tau)$ задачи (11), (12) в промежутке между этими барьерными функциями:

$$-2\sqrt{\Pi_0(0, \tau) Q_0(\xi, 0)} \leqslant P_0(\xi, \tau) \leqslant 0.$$

Так как обе барьерные функции удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида (15), то такого же вида оценке удовлетворяет и решение $P_0(\xi, \tau)$ задачи (11), (12).

Теорема 2. *Если выполнены условия* I–VI*, то задачи* (13)*,* (14) *имеют решения* $P_k(\xi, \tau)$*, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида* (15)*.*

Доказательство теоремы 2 получается из того, что построенные барьерные функции обеспечивают положительность коэффициента

$$F'_u(\bar{u}_0(0, 0) + \Pi_0(0, \tau) + Q_0(\xi, 0) + P_0(\xi, \tau), 0, 0, 0)$$

при $P_k(\xi, \tau)$, $k \geqslant 1$, в линейных задачах (13), (14).

Теоремы 1, 2 доказывают, что условия I–VI обеспечивают формальное построение асимптотического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau)). \tag{20}$$

Для завершения исследования задачи (1)–(3) требуется обоснование полученной асимптотики решения. Установлена следующая теорема.

Теорема 3. *Если выполнены условия* I–VI*, то для достаточно малых* ϵ *задача* (1)–(3) *имеет решение* $u(x, t, \epsilon)$*, для которого ряд* (20) *является асимптотическим представлением при* $\epsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$*.*

Доказательство теоремы 3 наиболее просто получается методом дифференциальных неравенств, предложенным Н. Н. Нефедовым (см. [11]).

4. Немонотонный случай. Ранее (см. [4]) был исследован случай, когда от функции F по переменной u в угловых точках прямоугольника не требовалось монотонности на промежутке от корня $\bar{u}_0$ вырожденного уравнения до граничного значения ϕ. В немонотонном случае верхнее и нижнее решения задачи (11), (12) не удается построить сразу во всем квадранте $\mathbb{R}^2_+$ в виде одной гладкой функции. Приходится сначала строить так называемые кусочно гладкие барьеры, а затем сглаживать их.

Определение 1. Функции $Z_+(\xi,\tau)$ и $Z_-(\xi,\tau)$ называются кусочно гладкими верхним и нижним решениями задачи (17), если

(i) $Z_+(\xi,\tau)$ и $Z_-(\xi,\tau)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$;
(ii) существует разбиение области D на конечное число подобластей, на внутренности каждой из которой выполняются неравенства (18);
(iii) на границе области D выполняются неравенства (19).

Если предположить, что нелинейная задача (11), (12), определяющая главный член угловой части асимптотики, разрешима, то в силу условия III и экспоненциальных оценок убывания производная функции F на полном нулевом приближении оказывается гарантированно положительной в области вида

$$\Omega_0 = \{(\xi,\tau) \mid \xi \geqslant \rho,\ \tau \geqslant \rho\},$$

где ρ — некоторое положительное число. В приграничных полосах

$$\Omega_1 = \{(\xi,\tau) \mid \xi \geqslant \tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant \rho\} \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \{(\xi,\tau) \mid 0 \leqslant \xi \leqslant \rho,\ \tau \geqslant \xi\}$$

производная может принимать отрицательные значения, в связи с чем задачи (13), (14) не всегда могут иметь решения, удовлетворяющие оценкам вида (15). Введем следующее дополнительное условие.

Условие VII. Для угловой точки $(0,0)$ прямоугольника Ω задача (11), (12) имеет решение $P_0(\xi,\tau)$ с оценкой вида (15), и в приграничных полосах Ω_1 и Ω_2 области $\mathbb{R}^2_+$ производная F'_u на полном нулевом приближении принимает отрицательные значения, но при этом

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \geqslant -q^2, \tag{21}$$

где q — некоторое число на промежутке $q \in (0, \pi a/(2\rho))$. Аналогичное условие должно выполняться и для угловой точки $(1,0)$.

Отметим, что условие VII является естественным ограничением разрешимости дифференциальных неравенств, которые возникают при доказательстве существования верхних и нижних решений. Это условие аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений, когда разрешимость подобных задач связана с неравенством Чаплыгина (см. [12]). Число $\pi a/2$ получается из-за невозможности найти положительное монотонное решение неравенства $a^2 y'' + y \leqslant 0$ на промежутке длиной больше, чем $\pi a/2$. При условии VII была доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Если выполнены условия* I–V *и* VII, *то задачи* (13), (14) *имеют решения* $P_k(\xi,\tau)$, *удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида* (15).

Для доказательства этой теоремы также применялся метод верхних и нижних решений. Барьерные функции для решений задач (13), (14) строились отдельно в каждой из трех подобластей Ω_0, Ω_1 и Ω_2, а затем эти куски гладко стыковались друг с другом.

Было также доказано существование решения задачи (1)–(3) и равномерность приближения этого решения с помощью построенного асимптотического ряда.

Теорема 5. *Если выполнены условия* I–V *и* VII, *то для достаточно малых* ϵ *задача* (1)–(3) *имеет решение* $u(x,t,\epsilon)$, *для которого ряд* (20) *является асимптотическим представлением при* $\epsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$.

Доказательство теоремы 5 получается методами, аналогичными доказательству теоремы 3.

В работе [5] исследование немонотонного случая было продолжено. Основное внимание было уделено исследованию нелинейной задачи (11), (12), существование подходящего решения которой ранее постулировалось. В качестве модельной была рассмотрена функции F, которая в угловых точках прямоугольника является квадратичной и немонотонной относительно переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения. Исследование было проведено при следующем дополнительном условии.

Условие VIII. В угловых точках $(k,0)$, $k=0,1$, прямоугольника Ω функция F имеет вид

$$F(u,k,0,0) = -A(u-\bar{u}_0)(u-\beta), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k,0),$$

где числа $A = A(k)$ — положительны, а граничные значения $\phi = \phi(k)$ и числа $\beta = \beta(k)$ удовлетворяют неравенствам

$$\bar{u}_0 < \frac{\bar{u}_0 + \beta}{2} < \phi < \beta. \tag{22}$$

Была доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Если выполнены условия* I–V *и* VIII, *то задача* (11), (12) *имеет решение* $P_0(\xi,\tau)$, *удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида* (15).

При доказательстве использовалась схема, предложенная в [4]: область $\mathbb{R}^2_+$ была разбита на три подобласти Ω_0, Ω_1 и Ω_2 и в каждой из них строились свои верхние и нижние решения.

В области Ω_0 барьерные функции были получены в виде

$$P_\pm(\xi,\tau) = \pm r\exp(-\kappa(\xi+\tau)),$$

где r и κ — некоторые положительные числа.

В области Ω_1 барьерные функции получены в виде

$$P_\pm(\xi,\tau) = \pm h(\tau)\exp(-\kappa\xi),$$

а в области Ω_2 — в симметричном виде

$$P_\pm(\xi,\tau) = \pm h(\xi)\exp(-\kappa\tau),$$

где κ — достаточно малые положительные числа. Функция $h(x)$ на промежутке $x\in[0,\rho]$ выбиралась с учетом выполнения условий

$$h(x)\geqslant 0, \quad h(\rho) = r\exp(-\kappa\rho), \quad h'(x)>0, \quad h''(x)<0. \tag{23}$$

Несмотря на симметричность барьерных функций в областях Ω_1 и Ω_2, они получались из решения несимметричных задач, в связи с чем доказательство потребовало применения различных методов.

Построенные в областях Ω_0, Ω_1 и Ω_2 гладкие куски барьерных функций с учетом условий (21) непрерывно, но не гладко стыкуются между собой на общих частях границ подобластей. Существует общая теория сглаживания верхних кусочно гладких решений (см. [14]). Эта теория применяется, когда гладкость функции нарушается на гладкой линии. Кроме этого, при прохождении через эту линию по нормали производная кусочно гладкого решения не должна испытывать положительного скачка. Функция P_+ построена именно таким образом: при прохождении по нормали через общие границы областей Ω_0, Ω_1 и Ω_2 производная испытывает отрицательный скачок.

Однако в нашем случае граница не является гладкой линией, а состоит из трех гладких кусков, сходящихся в точке (ρ,ρ):

$$\Gamma_{01} = \{(\xi,\tau)\mid \xi\geqslant\rho,\ \tau=\rho\}, \quad \Gamma_{02} = \{(\xi,\tau)\mid \xi=\rho,\ \tau\geqslant\rho\}, \quad \Gamma_{12} = \{(\xi,\tau)\mid \xi=\tau,\ 0\leqslant\tau\leqslant\rho\}.$$

Из-за этого сглаживание барьерных функций проводится «вручную». Сначала рассматриваются линии Γ_{01} и Γ_{02}, которые являются границей области Ω_0 с областями Ω_1 и Ω_2. Процесс сглаживания «сбрасывает» негладкость барьерных функций с этих линий на отрезок биссектрисы

$$\Gamma_\delta = \{(\xi,\tau)\mid \xi=\tau,\ \rho\leqslant\tau\leqslant\rho+\delta\},$$

являющийся продолжением линии Γ_{12}, в область Ω_0. Положительное число δ определяется величиной люфта: построенные функции пригодны в качестве барьерных в областях несколько больших, чем Ω_0, Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Обеспечивая гладкость модифицированных барьерных функций на линиях Γ_{01} и Γ_{02}, мы не забываем обеспечить отрицательность скачка производных этих функций при прохождении по нормали через линию Γ_δ. Это дает возможность применить общую теорию сглаживания на линии $\Gamma_{12} \cup \Gamma_\delta$ и завершить процесс построения гладких барьерных функций во всей области $\mathbb{R}^2_+$. Построенные барерные функции обеспечивают существование подходящего (в смысле выполнения экспоненциальной оценки убывания) решения нелинейной задачи (11), (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В. Ф.* Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1972. — *12*, № 3. — С. 582–597.
2. *Бутузов В. Ф., Нестеров А. В.* Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 1978. — № 2. — С. 49–56.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
4. *Денисов А. И., Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 1. — С. 102–117.
5. *Денисов А. И., Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 9. — С. 1581–1590.
6. *Денисов А. И., Денисов И. В.* Математические модели процессов горения// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *185*. — С. 82–88.
7. *Денисов И. В.* Первая краевая задача для квазилинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения в прямоугольнике// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1996. — *36*, № 10. — С. 56–72.
8. *Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 2. — С. 255–274.
9. *Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2018. — *58*, № 4. — С. 1–11.
10. *Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — *61*, № 2. — С. 256–267.
11. *Нефедов Н. Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями// Диффер. уравн. — 1995. — *31*, № 7. — С. 1132–1139.
12. *Чаплыгин С. А.* Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. — М.: 1919.
13. *Amann H.* On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary-value problems// Indiana Univ. Math. J. — 1971. — *21*, № 2. — P. 125–146.
14. *Amann H.* Periodic solutions of semilinear parabolic equations// in: Nonlinear Analysis. A Collection of Papers in Honor of E. H. Rothe (*Cesari L., Kannan R., Weinberger H.*, eds.). — New York: Academic Press, 1978. — P. 1–29.
15. *Sattinger D. H.* Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary-value problems// Indiana Univ. Math. J. — 1972. — *21*, № 11. — P. 979–1000.

Денисов Игорь Васильевич
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
E-mail: `den_tspu@mail.ru`