ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 81–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-81-96

УДК 517.977, 519.7

ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ РАЗНЫХ СПОСОБАХ ЗАДАНИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

© 2022 г. **С. С. ПОСТНОВ**

Аннотация. Статья посвящена исследованию фазовой динамики линейных систем дробного порядка с управлением. Наиболее подробно рассматриваются двумерные системы с сосредоточенными параметрами в случаях, когда операторы дробного дифференцирования в определяющих уравнениях понимаются в смысле Капуто—Фабрицио. Также рассматриваются аналогичные системы, моделируемые уравнениями с операторами Атанганы—Балеану и Прабхакара. Получены и исследованы аналитические решения определяющих уравнений и вычислены граничные траектории систем, определяющие область допустимых значений фазовых координат системы. Проанализирована возможность постановки l-проблемы моментов для рассматриваемых систем и её разрешимость. Приведён пример решения данной проблемы в случае, когда управление является существенно ограниченной функцией на отрезке.

Ключевые слова: динамическая система дробного порядка, оптимальное управление, дробная производная, l-проблема моментов.

FEATURES OF THE PHASE DYNAMICS OF FRACTIONAL TWO-DIMENSIONAL LINEAR CONTROL SYSTEMS FOR VARIOUS DIFFERENTIATION OPERATOR

© 2022 **S. S. POSTNOV**

Abstract. This paper is devoted to the study of the phase dynamics of fractional linear systems with control. Two-dimensional systems with concentrated parameters are considered in most detail in the cases where the fractional differentiation operators in the governing equations are understood in the Caputo–Fabrizio sense. Systems modeled by equations with Atangana–Baleano and Prabhakara operators are also considered. We obtain and examine analytic solutions and boundary trajectories of systems, which determine domains of admissible values of the phase coordinates. The statement of the moment l-problem for the systems considered and its solvability are analyzed. An example of solving this problem in the case where the control is an essentially bounded function on a interval is given.

Keywords and phrases: fractional dynamical system, optimal control, fractional derivative, l-problem of moments.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 93C23, 34K35, 34A08

1. Введение. Динамические системы дробного порядка представляют интерес в качестве объекта исследований для многих отраслей современной науки (см. [7,14]). Эффекты, обусловленные «дробной динамикой» и наличием у системы нелокальных пространственно-временных свойств, проявляются в различных физических системах (неоднородные упругие системы, диэлектрики, полупроводники и т. д.). С другой стороны, дробное исчисление является обобщением классического анализа и представляет интерес с позиций современной теории функций, дифференциальных и интегральных уравнений. Приложения дробного исчисления в области моделирования динамики систем (в том числе систем с управлением) также активно исследуются с позиций математической кибернетики, теоретической информатики, теории систем и теории управления.

Одной из отличительных черт дробного исчисления является неединственность определения операторов дробного дифференцирования и интегрирования, которая обусловливает большое разнообразие тенденций поведения систем дробного порядка. При этом поведение систем, описываемых одинаковыми по форме уравнениями, которые отличаются только типом входящего в них оператора дробного дифференцирования, не всегда является заметно разным. В определённых условиях норма и время управления, а также оптимальное управление и фазовые траектории таких систем могут быть близки не только качественно, но и количественно (см. [11, 13]).

В данной работе рассматриваются двумерные управляемые системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами. Подробно рассмотрены системы, моделируемые уравнениями с операторами дробного дифференцирования Капуто—Фабрицио. Для них построены аналитические решения уравнений динамики, вычислены граничные траектории и обоснована корректность и разрешимость l-проблемы моментов. В ряде случаев получены аналогичные результаты также для уравнений с операторами Атанганы—Балену и Прабхакара.

2. Постановка задачи. Рассматриваются двумерные системы дробного порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha_1} q_1(t) &= q_2(t) + C_1, \\ {}_0D_t^{\alpha_2} q_2(t) &= a q_1(t) + u(t) + C_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $q_{1,2}(t)$ — состояние системы, $u(t)$ — управление, a и $C_{1,2}$ — действительные числа, $t \in [0, T]$. Оператор дробного дифференцирования ${}_0D_t^{\alpha_{1,2}}$ понимается в смысле Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану или Прабхакара. В последнем случае подразумевается, что показатели дробного дифференцирования являются составными (см. ниже). При $a = 0$ система (1) представляет собой двойной интегратор дробного порядка, а при $a < 0$ (в частности, при $a = -1$) — маятник дробного порядка. Рассматриваются управления $u(t) \in L_p[0, T]$, $p > 1$, и состояния $q_{1,2}(t)$, такие что $q'_{1,2}(t) \in L_1[0, T]$.

Будем рассматривать динамику системы (1) на отрезке $t \in [0, T]$ и поставим начальные и конечные условия в локальном виде:

$$q_{1,2}(0) = q_{1,2}^0, \tag{2}$$

$$q_{1,2}(T) = q_{1,2}^T. \tag{3}$$

Для системы (1) представляет интерес исследование задачи оптимального управления на отрезке $[0, T]$ как задачи поиска управления с минимальной нормой или как задачи быстродействия (см. [1, 3]). Как известно, такая задача может быть сведена к l-проблеме моментов и при целых значениях показателя дифференцирования (см. [1, 3]), и при дробных (см. [5]). В данной работе исследуются условия корректности и разрешимости l-проблемы моментов для системы (1). В случае, когда эти условия выполнены, решение l-проблемы моментов и соответствующей задачи оптимального управления может быть построено аналитически.

Задача 1 (l-проблема моментов)**.** Пусть дана система функций $g_n(\tau) \in L_{p'}[0, T]$ и набор чисел c_n, $n = 1, \ldots, N$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, а также задано число $l > 0$. Необходимо построить такую функцию $u(t) \in L_p[0, T]$, $p > 1$, $1/p + 1/p' = 1$, что выполняются соотношения

$$\int_0^T g_n(\tau)u(\tau)d\tau = c_n \tag{4}$$

и условие

$$\|u(t)\|_{L_p} \leqslant l. \tag{5}$$

Определение 1. Будем говорить, что постановка l-проблемы моментов в форме задачи 1 корректна, если определена норма функций $g_n(\tau)$ в пространстве $L_{p'}[0,T]$, моменты c_n определены и ограничены и хотя бы один из них отличен от нуля.

Необходимым и достаточным условием разрешимости l-проблемы моментов в форме задачи 1 является линейная независимость функций $g_n(\tau)$ или, что эквивалентно, выполнение условия

$$\Lambda_N > 0, \tag{6}$$

где число Λ_N определяет норму оптимального управления и является решением следующей задачи условной минимизации (см. [1,3]).

Задача 2. Найти

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_N}\left(\int_{t_0}^T\left|\sum_{i=1}^N \xi_i g_i(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} = \left(\int_{t_0}^T\left|\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} = \frac{1}{\Lambda_N} \tag{7}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^N \xi_i c_i = \sum_{i=1}^N \xi_i^* c_i = 1. \tag{8}$$

Также в работе анализируются особенности качественной динамики систем — вычисляются фазовые траектории системы (1) при предельных значениях управления.

Определение 2. Пусть управление $u(t)$ ограничено по абсолютной величине почти всюду на отрезке $[0,T]$: $|u(t)| \leqslant l$. Тогда граничными траекториями системы (1) будем называть её фазовые траектории, соответствующие граничным (предельным) значениям управления $u(t) = \pm l$, $t > 0$, $l > 0$.

Замечание 1. Граничные траектории системы ограничивают на фазовой плоскости область, в которой сосредоточены все допустимые траектории системы (траектории, соответствующие допустимым управлениям). В случае систем целого порядка эти траектории принято называть границами интегральной воронки дифференциального включения, соответствующего системе (см. [2]).

3. Предварительные сведения.

Определение 3. Пусть задана функция $q(t)$, такая, что $q'(t) \in L_1[0,T]$. Тогда дробная производная Капуто—Фабрицио определяется следующим образом (см. [9]):

$${}_0^{CF}D_t^{\alpha} q(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_0^t \frac{dq(\tau)}{d\tau}\exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]d\tau, \tag{9}$$

где $\alpha \in (0,1)$, $M(\alpha)$ — нормирующая функция, такая, что $M(0) = M(1) = 1$.

Определение 4. Пусть задана функция $q(t) \in L_1[0,T]$. Интегралом Капуто—Фабрицио дробного порядка будем называть оператор, обратный к оператору (9) и выражающийся как линейная комбинация функции $q(t)$ и её первообразной (см. [12]) следующего вида:

$${}_0^{CF}I_t^{\alpha} q(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)}q(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)}\int_0^t q(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Определение 5. Пусть задана такая функция $q(t)$, что $q'(t) \in L_1[0,T]$. Тогда дробная производная Атанганы—Балеану определяется следующим образом (см. [8]):

$$ {}_0^{AB}D_t^{\alpha} q(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int\limits_0^t \frac{dq(\tau)}{d\tau} E_{\alpha}\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^{\alpha}\right] d\tau, \tag{11} $$

где $\alpha \in (0,1)$, $E_{\alpha}(z)$ — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера, $M(\alpha)$ — некоторая нормирующая функция, такая, что $M(0) = M(1) = 1$.

Определение 6. Пусть задана функция $q(t) \in L_1[0,T]$. Интегралом Атанганы—Балеану дробного порядка будем называть оператор, обратный к оператору (11) и выражающийся в виде следующей линейной комбинации функции $q(t)$ и её дробного интеграла Римана—Лиувилля (см. [8]):

$$ {}_0^{AB}I_t^{\alpha} q(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} q(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{q(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \tag{12} $$

Определение 7. Дробный интеграл Прабхакара от некоторой функции $q(t) \in L_1[0,T]$ может быть вычислен по следующей формуле (см. [10]):

$$ {}_0^{P}I_{\rho,\mu,\omega,t}^{\gamma} q(t) = \int\limits_0^t \frac{E_{\rho,\mu}^{\gamma}[\omega(t-\tau)^{\rho}]}{(t-\tau)^{1-\mu}} q(\tau)d\tau. \tag{13} $$

Здесь $E_{\rho,\mu}^{\gamma}[z]$ — функция Прабхакара, являющаяся обобщением функции Миттаг-Леффлера:

$$ E_{\rho,\mu}^{\gamma}[z] = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\rho k+\mu)} \frac{z^k}{k!}, \tag{14} $$

$\gamma, \rho, \mu, \omega \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}(\mu) > 0$.

Определение 8. Пусть задана такая функция $q(t)$, что $q'(t) \in L_1[0,T]$. Тогда дробная производная Прабхакара определяется следующей формулой (см. [10]):

$$ {}_0^{PC}D_{\rho,\mu,\omega,t}^{\gamma} q(t) = {}_0^{P}I_{\rho,1-\mu,\omega,t}^{-\gamma} q'(t), \tag{15} $$

$\gamma, \rho, \omega \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mu \in (0,1)$. В данном случае можно записать набор показателей оператора (15) в виде составного показателя $\alpha = \{\gamma, \rho, \mu, \omega\}$.

Далее будем называть систему (1) системой Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану или Прабхакара соответственно в случаях, когда операторы дробного дифференцирования в уравнениях (1) понимаются в смысле вышеприведённых определений Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану или Прабхакара.

Теорема 1. *Пусть задана система* (1) *при* $a = 0$, $C_1 = -q_2^0$, $C_2 = -aq_1^0 - u(0)$ *с начальными условиями* (2), *операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Капуто—Фабрицио и при этом* $q_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $q_{1,2}'(t) \in L_1[0,T]$, $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$. *Тогда решение системы* (1) *при* $a = 0$ *существует, единственно и может быть представлено в виде:*

$$ q_1(t) = q_1^0 + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(t)-u(0)] + \\ + \int\limits_0^t \frac{\alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_1) + \alpha_1\alpha_2(t-\tau)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(\tau)-u(0)]d\tau, \tag{16} $$

$$ q_2(t) = q_2^0 + \frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)}[u(t)-u(0)] + \frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)} \int\limits_0^t [u(\tau)-u(0)]d\tau. \tag{17} $$

Доказательство см. в [5, теорема 9]. □

Теорема 2. *Пусть задана система* (1) *при* $a = 0$, $C_1 = C_2 = 0$ *с начальными условиями* (2), *операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Атанганы—Балеану и при этом* $q_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$. *Тогда решение системы* (1) *при* $a = 0$ *существует, единственно и может быть представлено в виде*

$$q_1(t) = q_1^0\left(1 + \frac{t^{\alpha_1}}{M(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)}\right) + \frac{1-\alpha_1}{M(\alpha_1)}q_2^0 + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}u(t) + \frac{1}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times$$
$$\times\int\limits_0^t\left[\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)(t-\tau)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)(t-\tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{\alpha_1\alpha_2(t-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\right]u(\tau)d\tau, \quad (18)$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)}u(t) + \frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)}\int\limits_0^t\frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha_2}}. \quad (19)$$

Доказательство см. в [5, теорема 13]. □

Теорема 3. *Пусть задана система* (1) *при* $a = 0$, $C_1 = C_2 = 0$ *с начальными условиями* (2), *операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Прабхакара,* $\alpha_i = \{\gamma_i, \rho, \mu_i, \omega\}$, $i = 1, 2$, *и при этом* $q_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$. *Тогда решение системы* (1) *существует, единственно и определяется формулами*

$$q_1(t) = q_1^0 + q_2^0 t^{\mu_1}E^{\gamma_1}_{\rho,\mu_1+1}(\omega t^\rho) + \int\limits_0^t\frac{E^{\gamma_1+\gamma_2}_{\rho,\mu_1+\mu_2}[\omega(t-\tau)^\rho]}{(t-\tau)^{1-\mu_1-\mu_2}}u(\tau)d\tau, \quad (20)$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \int\limits_0^t\frac{E^{\gamma_2}_{\rho,\mu_2}[\omega(t-\tau)^\rho]}{(t-\tau)^{1-\mu_2}}u(\tau)d\tau, \quad (21)$$

Доказательство см. в [6, теорема 4.7]. □

4. Основные результаты. В настоящей работе получен ряд аналитических решений системы (1). На их основе исследованы граничные траектории системы и проанализирована постановка l-проблемы моментов. Основное рассмотрение проведено для системы Капуто—Фабрицио, а в случае $a = 0$ выполнено сравнение этой системы с системами Атанганы—Балеану и Прабхакара. Также построено аналитическое решение l-проблемы моментов для случая $a = 0$, $u(t) \in L_\infty[0,T]$.

4.1. Система Капуто—Фабрицио. Далее будут вычислены аналитические решения уравнений (1) при ненулевом значении коэффициента a в случае системы Капуто—Фабрицио и на их основе рассчитаны граничные траектории системы.

Теорема 4. *Пусть задана система* (1) *при* $a \neq 0$, $C_1 = -q_2^0$, $C_2 = -aq_1^0 - u(0)$ *с начальными условиями* (2) *и при этом* $q_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$. *Тогда решение системы* (1) *существует, единственно и может быть представлено в виде*

$$q_1(t) = q_1^0 + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0) - u(t)] -$$
$$-\frac{1}{a}\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\int\limits_0^t R(t-\tau)[u(0) - u(\tau)]d\tau, \quad (22)$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \frac{(1-\alpha_2)M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0)-u(t)] +$$

$$+ \frac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)} \times$$

$$\times \int_0^t [u(0)-u(\tau)]\Big[\alpha_2 - (1-\alpha_2(t-\tau-1))R(t-\tau)\Big]d\tau, \quad (23)$$

где

$$R(x) = \exp\left(-\frac{A}{2}x\right)\begin{cases} A\,\mathrm{ch}(\beta x) + \dfrac{2B-A^2}{2\beta}\,\mathrm{sh}(\beta x), & A^2 > 4B, \\ A\cos(\beta x) + \dfrac{2B-A^2}{2\beta}\sin(\beta x), & A^2 < 4B, \\ A - \dfrac{A^2}{4}x, & A^2 = 4B, \end{cases} \quad (24)$$

$$A = a\frac{\alpha_2(1-\alpha_1) + \alpha_1(1-\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)},$$

$$B = a\frac{\alpha_1\alpha_2}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}, \quad (25)$$

$$\beta = \sqrt{\left|\frac{A^2}{4} - B\right|}.$$

Доказательство. Подействовав на обе части уравнений (1) оператором интегрирования Капуто—Фабрицио и учтя начальные условия (2), получим следующее единственное представление (см. [15]):

$$q_1(t) - q_1^0 = \frac{(1-\alpha_1)}{M(\alpha_1)}[q_2(t) - q_2^0] + \frac{\alpha_1}{M(\alpha_1)}\int_0^t [q_2(\tau) - q_2^0]d\tau, \quad (26)$$

$$q_2(t) - q_2^0 = \frac{(1-\alpha_2)}{M(\alpha_2)}\big[aq_1(t) + u(t) - aq_1^0 - u(0)\big] +$$

$$+ \frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)}\int_0^t [aq_1(\tau) + u(\tau) - aq_1^0 - u(0)]d\tau. \quad (27)$$

Домножим выражение (26) на коэффициент a, затем подставим в него выражение (27) и, вычислив повторный интеграл в получившемся выражении, получим следующее линейное интегральное уравнение для функции $y(t) = aq_1(t) + u(t) - aq_1^0 - u(0)$:

$$y(t) + \int_0^t y(\tau)[A + B(t-\tau)]d\tau = \frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0) - u(t)]; \quad (28)$$

формулы для коэффициентов A и B приведены выше в условии теоремы.

Решение уравнения (28) известно (см. [4, с. 108, п. 2.1.5]) и выражается в виде

$$y(t) = \frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0) - u(t)] -$$

$$- \frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\int_0^t R(t-\tau)[u(0) - u(\tau)]d\tau; \quad (29)$$

выражение для функции $R(x)$ приведено выше в условии теоремы.

Выразив функцию $q_1(t)$ из выражения (29), получим решение (22), а подставив решение (29) в выражение (27), получим решение (23). Теорема доказана. $\square$

Теорема 5. *Пусть дана система уравнений* (1) *при* $C_1 = -q_2^0$, $C_2 = -aq_1^0 - u(0)$, *где операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Капуто—Фабрицио, и заданы начальные условия* (2) *и пусть* $u(t) = \mathrm{const}$ *всюду на отрезке* $t \in [0, T]$. *Задача Коши для такой системы не имеет решений, отличных от константы, определяемой начальными условиями, а при нулевых начальных условиях имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Рассмотрим случай $a = 0$ и подставим $u(t) = \mathrm{const}$ в выражения (16)–(17). Получим:

$$q_1(t) = q_1^0, \quad q_2(t) = q_2^0. \tag{30}$$

Эти же выражения получим в случае $a \neq 0$ из выражений (22) и (23) при $u(t) = \mathrm{const}$. Очевидно, при $q_1^0 = q_2^0 = 0$ решения (30) тривиальны. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Решения (16)–(17) и (22) и (23) отличны от константы для таких управлений, что $u(t) \neq u(0)$, например, равных нулю при $t = 0$ и ненулевой константе на полуинтервале $t \in (0, T]$:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \pm l, & t \in (0, T], \end{cases} \tag{31}$$

$l > 0$, $t \in [0, T]$. Также решения (16)–(17) и (22)–(23) будут отличны от константы для управлений, отличных от нуля лишь в начальный момент:

$$u(t) = \begin{cases} \pm l, & t = 0, \\ 0, & t \in (0, T]. \end{cases}$$

Вычислим теперь граничные траектории рассматриваемой системы. Примем, что управление задано в виде (31), и подставим его в формулы (16)–(17) и (22)–(23). В первом случае, т. е. при $a = 0$ будем иметь:

$$\begin{aligned} q_1^{\pm l}(t) - q_1^0 = \frac{1-\alpha_1}{M(\alpha_1)}\left(q_2^0 \pm l\frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)}\right) + \frac{\alpha_1}{M(\alpha_1)}q_2^0 t \pm \\ \pm \frac{lt}{2M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\Big[2(\alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_1)) + \alpha_1\alpha_2 t\Big], \end{aligned}$$

$$q_2^{\pm l}(t) - q_2^0 = \pm l\frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)} \pm lt\frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)},$$

где $q_{1,2}^{\pm l}(t)$ — значения фазовых координат, соответствующие реализации управления (31).

Выразив время из второго выражения, подставив в первое и приведя подобные, получим уравнение, связывающее значения фазовых координат:

$$\begin{aligned} q_1^{\pm l} - q_1^0 = \frac{1}{2\alpha_2 M(\alpha_1)}\left[q_2^0 \pm l\frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)}\right]\left[\pm\frac{\alpha_1 M(\alpha_2)}{l}q_2^0 - \alpha_1(1-\alpha_2)\right] \pm \\ \pm \frac{\alpha_1 M(\alpha_2)}{2\alpha_2 M(\alpha_1) l}(q_2^{\pm l})^2 + \frac{q_2^{\pm l}}{\alpha_2 M(\alpha_1)}\left[\alpha_2(1-\alpha_1) \mp \frac{\alpha_1 M(\alpha_2)}{l}q_2^0\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Замечание 3. Уравнение (32) представляет собой уравнение параболы, как и в случае двойного интегратора целого порядка (см. [2]).

В случае $a \neq 0$ из формул (22)–(23) при определении управления в виде (31) получим:

$$q_1^{\pm l}(t) - q_1^0 = \begin{cases} \pm\dfrac{l}{a}\dfrac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad \times\left[\dfrac{A}{2\beta}\left(e^{-\frac{A}{2}t}\operatorname{ch}\beta t - 1\right) - e^{-\frac{A}{2}t}\operatorname{sh}\beta t - \dfrac{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right], \quad A^2 > 4B, \\ \pm\dfrac{l}{a}\dfrac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad \times\left[\left(\cos\beta t - \dfrac{A}{2\beta}\sin\beta t\right)e^{-\frac{A}{2}t} - 1 - \dfrac{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right], \qquad A^2 < 4B, \\ \pm\dfrac{l}{a}\dfrac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad \times\left[1 + e^{-\frac{A}{2}t}\left(\dfrac{A}{2}t - 1\right) - \dfrac{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right], \qquad A^2 = 4B, \end{cases} \tag{33}$$

$$q_2^{\pm l}(t) - q_2^0 = \begin{cases} \mp l\dfrac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad \times\Bigg[\alpha_2 t - -(1-\alpha_2)\left(\dfrac{A}{2\beta}\left(e^{-\frac{A}{2}t}\operatorname{ch}\beta t - 1\right) - e^{-\frac{A}{2}t}\operatorname{sh}\beta t - 1\right) - \\ \qquad -\alpha_2 e^{-\frac{A}{2}t}\left(t(2A\operatorname{sh}\beta t - \operatorname{ch}\beta t) + \dfrac{A^4 - 4BA^2 - 4B^2}{8\beta B^2}\operatorname{sh}\beta t\right)\Bigg], \qquad A^2 > 4B, \\ \mp l\dfrac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad \times\Bigg[\alpha_2 t - (1-\alpha_2)\left(e^{-\frac{A}{2}t}\left(\cos\beta t - \dfrac{A}{2\beta}\sin\beta t\right) - 2\right) - \\ \qquad -\alpha_2 e^{-\frac{A}{2}t}\left(t\left(\dfrac{A}{2\beta}\sin\beta t - \cos\beta t\right) + \dfrac{1}{\beta}\sin\beta t\right)\Bigg], \qquad A^2 < 4B, \\ \mp l\dfrac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad \times\left[\alpha_2 t\left(1 - \dfrac{A}{2}te^{-\frac{A}{2}t}\right) - (1-\alpha_2)\left(\dfrac{A}{2}t - 1\right)e^{-\frac{A}{2}t}\right], \qquad A^2 = 4B, \end{cases} \tag{34}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть задана система уравнений* (1) *при* $C_1 = -q_2^0$, $C_2 = -aq_1^0 - u(0)$, *где операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Капуто—Фабрицио, и начальные условия* (2). *Тогда граничные траектории этой системы в случае* $a = 0$ *описываются уравнением* (32), *а в случае* $a \neq 0$ *— формулами* (33)–(34).

Рассмотрим теперь решения (16)–(17) и (22)–(23) при $t = T$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в этом случае упомянутые решения могут быть записаны в виде двумерной l-проблемы моментов (4). Корректность и разрешимость полученной проблемы при $a = 0$ была обоснована ранее (см. [5, теорема 10]). Далее аналогичное доказательство будет дано для случая $a \neq 0$.

Формулы (22)–(23) при $t = T$ можно переписать в виде (4), если справедливы следующие выражения для моментов и функций $g_{1,2}(\tau)$:

$$c_1 = q_1^T - q_1^0 - \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0) - u(T)] - \\ - \frac{u(0)}{a}\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\int\limits_0^T R(T-\tau)d\tau, \tag{35}$$

$$c_2 = q_2^T - q_2^0 - \frac{(1-\alpha_2)M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0) - u(T)] +$$
$$+ \frac{u(0)M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)} \int_0^T [\alpha_2 - (1 - \alpha_2(T - \tau - 1))R(T-\tau)]d\tau, \quad (36)$$

$$g_1(\tau) = \frac{1}{a}\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}R(T-\tau), \quad (37)$$
$$g_2(\tau) = \frac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\Big[(1 - \alpha_2(T-\tau-1))R(T-\tau) - \alpha_2\Big]. \quad (38)$$

Теорема 7. *Пусть задана система* (1) *и выполнены условия теоремы* 4. *Предположим также, что моменты* (35)–(36) *определены и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда* l*-проблема моментов* (4)–(5) *с учётом* (37)–(36) *будет корректна и разрешима.*

Доказательство. Норма функций $g_{1,2}(\tau)$ (определяемых формулами (37)–(38)) в пространстве $L_{p'}(0,T]$ может быть вычислена по формулам

$$\|g_1(\tau)\|_{L_{p'}} = \left|\frac{1}{a}\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right| \|R(T-\tau)\|_{L_{p'}},$$
$$\|g_2(\tau)\|_{L_{p'}} = \left|\frac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right| \Big\|(1 - \alpha_2(T-\tau-1))R(T-\tau) - \alpha_2\Big\|_{L_{p'}}.$$

Для нормы $\|g_2(\tau)\|_{L_{p'}}$ справедлива оценка:

$$\|g_2(\tau)\|_{L_{p'}} \leqslant \left|\frac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right| \left[(1+2\alpha_2)T^{1/p'} + \alpha_2\frac{T^{1+1/p'}}{(p'+1)^{1/p'}}\right] \|R(T-\tau)\|_{L_{p'}}.$$

Функция $R(T-\tau)$ определяется формулами (24)и, очевидно, для неё определена норма в пространстве $L_{p'}(0,T]$ (в чём можно убедиться непосредственным вычислением). При $\alpha_{1,2} \in (0,1)$, $T > 0$ и $p' \geqslant 1$ выражение в правой части неравенства для нормы $\|g_2(\tau)\|_{L_{p'}}$ ограничено и положительно. Аналогично ограничено и положительно выражение для нормы $\|g_1(\tau)\|_{L_{p'}}$. Следовательно, норма функций $g_{1,2}(\tau)$ в пространстве $L_{p'}(0,T]$ определена.

Функции $g_{1,2}(\tau)$ линейно независимы, в чём можно убедиться непосредственной проверкой. Следовательно, при сделанных выше предположениях проблема моментов (4)–(5) с учётом (37)–(36) разрешима. Теорема доказана. □

4.2. Сравнение результатов для систем Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану и Прабхакара. В этом разделе проводится сравнение некоторых из полученных выше результатов с аналогичными результатами для систем (1) с операторами дробного дифференцирования Атанганы—Балеану или Прабхакара в случае $a = 0$. Положим также в уравнениях (1) $C_1 = C_2 = 0$.

Теорема 8. *Пусть дана система уравнений* (1) *при* $C_1 = C_2 = 0$, $a = 0$, *где операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Атанганы—Балеану или Прабхакара и заданы начальные условия* (2) *и пусть* $u(t) = 0$ *всюду на отрезке* $t \in [0,T]$. *Решение задачи Коши для рассматриваемой системы обладает следующими свойствами*:

(1) *функция* $q_2(t)$ *на отрезке* $t \in [0,T]$ *является константой, значение которой определяется начальными условиями* (2);
(2) *при нулевых начальных условиях решение задачи Коши тривиально.*

Доказательство. Рассмотрим сначала систему (1) с операторами Атанганы—Балеану при $a = C_1 = C_2 = 0$. Подставим $u(t) = 0$ в выражения (18)–(19). Получим:

$$q_1(t) = q_1^0\left(1 + \frac{t^{\alpha_1}}{M(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)}\right) + \frac{1-\alpha_1}{M(\alpha_1)}q_2^0, \quad (39)$$
$$q_2(t) = q_2^0. \quad (40)$$

Из формул (39)–(40) очевидно, что фазовая координата $q_1(t)$ является дробно-степенной функцией времени, а фазовая координата $q_2(t)$ является константой на отрезке $t \in [0, T]$. Очевидно также, что при $q_1^0 = q_2^0 = 0$ решение задачи Коши (39)–(40) вырождается в тривиальное: $q_1(t) = q_2(t) = 0$.

Аналогичным образом рассмотрим случай, когда операторы дробного дифференцирования в уравнениях (1) при $a = C_1 = C_2 = 0$ понимаются в смысле Прабхакара. Из формул (20)–(21) при $u(t) = 0$ получим:

$$q_1(t) = q_1^0 + q_2^0 t^{\mu_1} E^{\gamma_1}_{\rho,\mu_1+1}(\omega t^\rho), \tag{41}$$

$$q_2(t) = q_2^0. \tag{42}$$

Согласно выражениям (41)–(42) фазовая координата $q_1(t)$ нетривиально зависит от времени, а фазовая координата $q_2(t)$ является константой на отрезке $t \in [0, T]$. При $q_1^0 = q_2^0 = 0$ решение (41)–(42), как и выше, вырождается в тривиальное: $q_1(t) = q_2(t) = 0$. □

Вычислим теперь граничные траектории системы (1) по аналогии с рассмотренным выше случаем системы Капуто—Фабрицио. Примем, что управление задано в виде $u(t) = \pm l$, $l > 0$, и вычислим в этом случае решения (18)–(19) и (20)–(21). Для систем Атанганы—Балеану, проведя необходимые преобразования, получим из формул (18)–(19) следующее уравнение:

$$q_1^{\pm l} - q_1^0 = \frac{1-\alpha_1}{M(\alpha_1)} q_2^{\pm l} + \frac{[M(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)]^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}}{M(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)} \left(\pm \frac{q_2^{\pm l} - q_2^0}{l} - \frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times$$

$$\times \left[q_1^0 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 B(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} (q_2^{\pm l} - q_2^0) \pm l \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{M(\alpha_2)} \left(1 - \frac{\alpha_2 B(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) \right]. \tag{43}$$

В случае системы Прабхакара из уравнений (20)–(21) при $u(t) = \pm l$, $l > 0$, получим:

$$q_1^{\pm l} - q_1^0 = \pm l t^{\mu_1+\mu_2} E^{\gamma_1+\gamma_2}_{\rho,\mu_1+\mu_2+1}(\omega t^\rho) + q_2^0 t^{\mu_1} E^{\gamma_1}_{\rho,\mu_1+1}(\omega t^\rho), \tag{44}$$

$$q_2^{\pm l} - q_2^0 = \pm l t^{\mu_2} E^{\gamma_2}_{\rho,\mu_2+1}(\omega t^\rho). \tag{45}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть задана система уравнений* (1) *при* $a = C_1 = C_2 = 0$, *где операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Атанганы—Балеану или Прабхакара, и начальные условия* (2). *Тогда граничные траектории системы Атанганы—Балеану описываются уравнением* (43), *а граничные траектории системы Прабхакара — формулами* (44)–(45).

Замечание 4. Уравнение (43), в отличие от уравнения (32), является дробно-степенным, что характерно для систем типа (1) с операторами дифференцирования Хильфера, Адамара и др. (см. [5]).

Замечание 5. Как было показано в предыдущем пункте, для системы Капуто—Фабрицио при произвольном значении коэффициента a l-проблема моментов является корректной и разрешимой без каких-либо дополнительных условий. Ранее было показано, что для системы (1) при $a = 0$ с операторами дифференцирования Атанганы—Балеану или Прабхакара возникают дополнительные условия, связывающие показатели дробного дифференцирования с индексом p лебегова пространства, элементом которого является управление (см. [5, 6]).

4.3. Решение l-проблемы моментов для двойного интегратора Капуто—Фабрицио при $u(t) \in L_\infty[0, T]$. Построим решение l-проблемы моментов для системы (1) при $a = 0$ как решение двумерной задачи 2 в случае, когда функции $g_{1,2}(\tau)$ определяются формулами (37)–(36), а управление является существенно ограниченной функцией, $u(t) \in L_\infty[0, T]$.

Введём следующие обозначения:

$$A = \frac{\alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_1)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}, \quad B = \frac{\alpha_1\alpha_2}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}, \quad C = \frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)}. \tag{46}$$

Очевидно, при $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$ и $M(\alpha_{1,2}) > 0$ значения A, B, C положительны и ограничены. При $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$: $A = 0$, $B = C = 1$.

Функция, стоящая под знаком модуля в формуле (7) линейна по аргументу и, следовательно, может менять знак на отрезке $[0,T]$ только в одной точке. Вычислим точку смены знака t', приравняв рассматриваемую функцию нулю:

$$t' = T + \frac{c_1\xi_2}{1-\xi_2 c_2}\frac{M(\alpha_1)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)+\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}. \tag{47}$$

Как известно (см. [1, 3]), если l-проблема моментов корректна и разрешима, то оптимальное управление в случае $u(t) \in L_\infty[0,T]$ является кусочно постоянной функцией времени, точки переключения которой совпадают с точками переключения функции, стоящей под знаком модуля в формуле (7).

Условие $t' \in [0,T]$ с учётом (47) можно переписать в следующем виде:

$$-\frac{\alpha_1}{M(\alpha_1)}\left[T + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)+\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}\right] \leqslant \frac{c_1\xi_2}{1-\xi_2 c_2} \leqslant -\frac{\alpha_1(1-\alpha_2)+\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_2 M(\alpha_1)}. \tag{48}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть дана двумерная l-проблема моментов* (4) *на отрезке* $[0,T]$, *где функции $g_{1,2}$ определяются формулами* (37)–(38), *моменты $c_{1,2}$ определяются формулами* (35)–(36), *а искомое решение является существенно ограниченной функцией. Пусть рассматриваемая проблема корректна и разрешима. Справедливы следующие утверждения*:

(1) *решение рассматриваемой проблемы имеет не более одной точки переключения на отрезке* $[0,T]$;

(2) *при выполнении условия* (48) *решение рассматриваемой проблемы имеет одну точку переключения на отрезке* $[0,T]$, *положение которой определяется формулой* (47).

Будем далее рассматривать случай, когда управление имеет одну точку переключения. Раскрыв модуль в интеграле, входящем в выражение (7) и выполнив необходимые вычисления, получим (с учётом условия (8), формулы (47) и обозначений (46)):

$$\frac{1}{\Lambda_2} = \min_{\xi_2}\int_0^T \left|\frac{1-\xi_2 c_2}{c_1}g_1(\tau) + \xi_2 g_2(\tau)\right| dt = \min_{\xi_2}\left(\frac{a_1\xi_2^2 + a_2\xi_2 + a_3}{c_1 B(1-\xi_2 c_2)}\right), \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (c_2A - c_1C)^2 + c_2BT(c_2A - c_1C) + \frac{1}{2}(c_2BT)^2,\\ a_2 &= 2c_1CA - c_2(2A^2 + B^2T^2) - BT(c_2A - c_1C),\\ a_3 &= A^2 + \frac{1}{2}B^2T^2 + ABT. \end{aligned} \tag{50}$$

Обозначим через $f(\xi_2)$ функцию, стоящую в правой части выражения (49) под знаком минимума:

$$f(\xi_2) = \frac{a_1\xi_2^2 + a_2\xi_2 + a_3}{c_1 B(1-\xi_2 c_2)}. \tag{51}$$

Функция (51) определена и ограничена при $c_1 \neq 0$. Очевидно, функция $f(\xi_2)$ непрерывно дифференцируема произвольное число раз по переменной ξ_2 на вещественной оси. Следовательно, эта функция будет иметь минимум в точке ξ_2^*, где её первая производная равна нулю, а вторая положительна. Первое условие приводит к квадратному уравнению относительно ξ_2, решение которого записывается в виде:

$$\xi_2^{\pm} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + a_1c_2(a_2 + c_2a_3)}}{a_1c_2}. \tag{52}$$

При этом должно выполняться условие неотрицательности дискриминанта упомянутого квадратного уравнения:

$$a_1^2 + a_1c_2(a_2 + c_2a_3) \geqslant 0. \tag{53}$$

Используя (50), можно показать, что

$$a_1 + c_2(a_2 + c_2 a_3) = c_1^2 C^2. \tag{54}$$

Тогда условие (53) запишется в виде

$$a_1 c_1^2 C^2 \geqslant 0,$$

откуда при $c_1 \neq 0$ следует условие

$$a_1 \geqslant 0.$$

Это условие выполняется по умолчанию, поскольку выражение для коэффициента $a1$ может быть переписано в виде суммы квадратов следующего вида (в чём можно убедиться непосредственной проверкой):

$$a_1 = (c_2 A - c_1 C + \frac{1}{2} c_2 BT)^2 + \frac{1}{4}(c_2 BT)^2.$$

Более того, неравенство в данном случае выполняется строго, поскольку по предположению хотя бы один из моментов $c_{1,2}$ отличен от нуля. Таким образом, дискриминант упомянутого квадратного уравнения по умолчанию неотрицателен и это уравнение имеет не более двух вещественных корней, определяемых формулой (52).

Вторая производная функции (51) будет определяться следующим выражением:

$$\frac{d^2 f}{d\xi_2^2} = 2\frac{(1 - \xi_2 c_2)(a_1 + a_2 c_2 + c_2^2 a_3)}{c_1 B (1 - \xi_2 c_2)^4}. \tag{55}$$

Подставив в (55) выражения (52), получим:

$$\frac{d^2 f}{d\xi_2^2} = \mp 2 \frac{c_1^2 C^3}{\sqrt{a_1} B (1 - \xi_2 c_2)^4}.$$

Следовательно, вторая производная функции (51) будет положительна при $c_1 \neq 0$ и выборе корня ξ_2^-, выражение для которого с учётом (54) запишется в виде:

$$\xi_2^* = \frac{1}{c_2}\left(1 - \frac{c_1 C}{\sqrt{a_1}}\right). \tag{56}$$

Полученное выражение (56) для ξ_2^* позволяет воспользоваться формулой (49) и вычислить параметр Λ_2, определяющий норму оптимального управления:

$$\Lambda_2 = \frac{B}{C} \frac{c_2^2}{2\sqrt{a_1} + c_2(2A + BT) - 2c_1 C}. \tag{57}$$

Тогда оптимальное управление с минимальной нормой (решение задачи А) с учётом (37)–(38) будет определяться формулой (см. [1]):

$$u(t) = \Lambda_2 \operatorname{sign}\left[\frac{C}{\sqrt{a_1}}(A + B(T - t)) + \frac{C}{c_2}\left(1 - \frac{c_1 C}{\sqrt{a_1}}\right)\right] = \Lambda_2 \operatorname{sign}(t' - t), \quad t \in [0, T] \tag{58}$$

Решение задачи Б, в свою очередь, будет определяться формулой (см. [1])

$$u(t) = l \operatorname{sign}\left[\frac{C}{\sqrt{a_1}}(A + B(T - t)) + \frac{C}{c_2}\left(1 - \frac{c_1 C}{\sqrt{a_1}}\right)\right] = l \operatorname{sign}(t' - t), \quad t \in [0, T^*] \tag{59}$$

где $l > 0$ считается заданным, а T^* находится как минимальное неотрицательное действительное решение неравенства

$$\Lambda_2(T^*) \leqslant l \tag{60}$$

(см. [1]). Выражение (60) является следствием условия (5) с учётом того, что в качестве нормы управления рассматривается норма оптимального (в смысле минимума нормы) управления, равная величине Λ_2. Положим $u(0) = u(T) = 0$, тогда моменты (35)–(36) не будут зависеть от T. Учтём выражение (57) и рассмотрим случай, когда выражение (60) является равенством. Тогда получим квадратное уравнение относительно T, для корней которого будет справедлива формула

$$T_{\pm}^* = \frac{-c_2 B \pm \sqrt{2B^2 c_2^2 - 4BCl(c_2 A - c_1 C)}}{BCl}. \tag{61}$$

Кроме того, для существования вещественных корней $T_{\pm}^{*}$ необходимо выполнение условия

$$2B^2c_2^2 - 4BCl(c_2A - c_1C) \geqslant 0.$$

Это условие с учётом (46) можно переписать в виде

$$\frac{c_2A - c_1C}{c_2^2} \leqslant \frac{\alpha_1}{2M(\alpha_1)l}, \tag{62}$$

где в правой части неравенства стоит положительная константа, определяемая значением показателя α_1 и заданным положительным числом l, а левая часть зависит от моментов $c_{1,2}$.

Таким образом, справедливы следующие два утверждения.

Теорема 11. *Пусть дана двумерная l-проблема моментов* (4) *на отрезке* $[0,T]$, *где T задано, функции $g_{1,2}$ определяются формулами* (37)–(38), *моменты $c_{1,2}$ определяются формулами* (35)–(36), *а искомое решение является существенно ограниченной функцией. Тогда решение данной проблемы, имеющее минимальную норму, выражается формулой* (58).

Теорема 12. *Пусть дана двумерная l-проблема моментов* (4) *на отрезке* $[0,T]$, *где T заранее не задано, функции $g_{1,2}$ определяются формулами* (37)–(38), *моменты $c_{1,2}$ определяются формулами* (35)–(36), *а искомое решение является существенно ограниченной функцией. Справедливы следующие утверждения*:

(1) *при невыполнении условия* (62) *рассматриваемая проблема при заданном ограничении* (5) *не имеет решения с минимальным носителем*;

(2) *при выполнении условия* (62) *решение данной проблемы, имеющее минимальный носитель при заданном в форме равенства ограничении* (5) *на норму решения, выражается формулой* (59), *а величина носителя в случае $u(0) = u(T) = 0$ определяется наименьшим положительным из значений* (61).

Замечание 6. Полученные результаты выведены без дополнительных предположений и предоставляют общее решение проблемы моментов и соответствующей ей задачи оптимального управления для двойного интегратора Капуто—Фабрицио. Это заметно отличает данный случай от исследованного ранее случая двойного интегратора Хильфера или Адамара, где аналитическое решение задачи в общем виде получить невозможно (поскольку при нахождении величины ξ_2^* возникает алгебраическое уравнение степени, определяемой отношением α_1/α_2, неразрешимое в общем виде), а возможно только в некоторых случаях, например при $c_2 = 0$ или $\alpha_1 = \alpha_2$.

Подставив построенное выше оптимальное управление (58) в решения (16)–(17), можно вычислить фазовые траектории рассматриваемой системы в режиме оптимального управления:

$$q_1^{\mathrm{opt}}(t) = \begin{cases} q_1^0 + [\Lambda_2 - u(0)] \left[\dfrac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)} + At + \dfrac{B}{2}t^2\right], & t < t', \\ q_1^0 - [\Lambda_2 + u(0)] \left[\dfrac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)} + At + \dfrac{B}{2}t^2\right] + 2t'\Lambda_2 \left[A + \dfrac{B}{2}(2t - t')\right], & t > t', \end{cases} \tag{63}$$

$$q_2^{\mathrm{opt}}(t) = \begin{cases} q_2^0 + [\Lambda_2 - u(0)] \left[\dfrac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)} + Ct\right], & t < t', \\ q_2^0 - [\Lambda_2 + u(0)] \left[\dfrac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)} + Ct\right] + 2t'\Lambda_2 C, & t > t'. \end{cases} \tag{64}$$

Замечание 7. Непосредственным вычислением можно убедиться, что выражения (63)–(64) при $t = T$ сводятся к конечным условиям (3).

Замечание 8. Если считать, что управление (58) определено на отрезке $t \in [0,T]$, то можно вычислить его значение в начальный момент: $u(0) = \Lambda_2$. Подставив это значение в формулы (63)–(64), можно показать, что до момента переключения управления система остаётся в начальном состоянии, а после переключения фазовая траектория системы представляет собой параболу. Если же принять, что формула (58) определяет оптимальное управление на полуинтервале $t \in (0,T]$ и при этом $u(0) = 0$, то до и после момента переключения система будет совершать движение по участкам парабол, направленных в разные стороны.

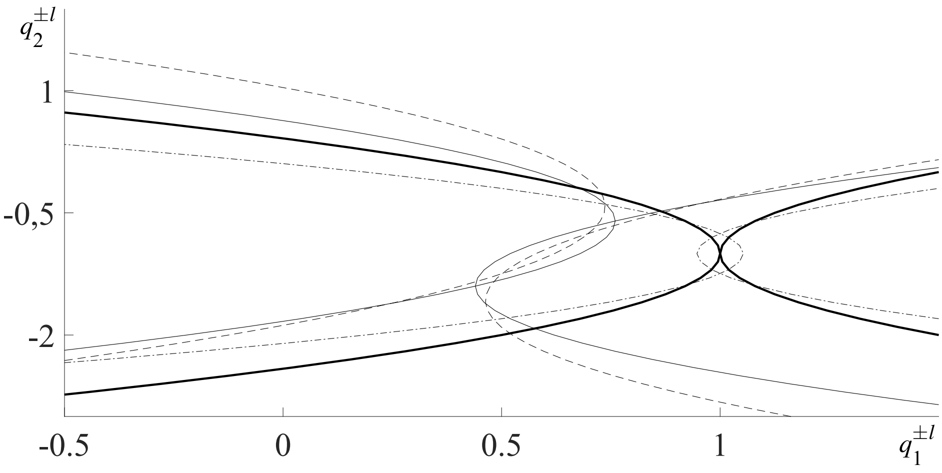

Рис. 1. Граничные траектории системы Капуто—Фабрицио при $a = 0$ при различных значениях показателей дробного дифференцирования: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ (тонкие сплошные линии); $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}7$ (штриховые линии); $\alpha_1 = 1{,}0$, $\alpha_2 = 0{,}7$ (пунктирные линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}0$ (жирные сплошные линии).

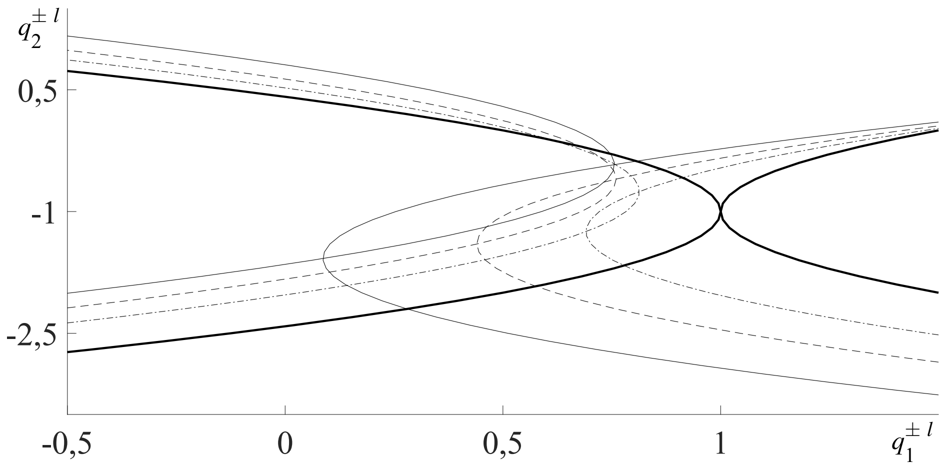

Рис. 2. Граничные траектории системы Капуто—Фабрицио при $a = 0$ при различных значениях показателей дробного дифференцирования: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}3$ (тонкие сплошные линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ (штриховые линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}7$ (пунктирные линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}0$ (жирные сплошные линии).

5. Примеры. В данном разделе рассмотрены примеры вычисления граничных траекторий систем Капуто—Фабрицио и Атанганы—Балеану при $a = 0$. В расчётах нормирующая функция задавалась следующим образом:

$$M(\alpha) = 1 + \alpha(1 - \alpha).$$

Также задавались следующие значения параметров: $q_1^0 = 1$, $q_2^0 = -1$, $l = 1$.

На рис. 1 и 2 показаны примеры граничных траекторий системы Капуто—Фабрицио при различных значениях показателей дробного дифференцирования. Видно, что в данном случае при $\alpha_{1,2} < 1$ области, ограниченные траекториями, соответствующими $u(t) = l$ (справа) и $u(t) = -l$

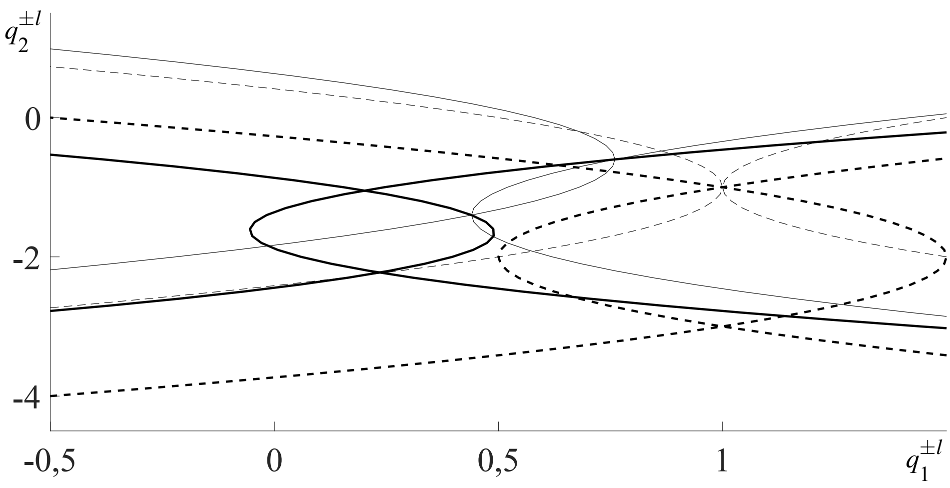

Рис. 3. Сравнение граничных траекторий систем Капуто—Фабрицио (тонкие линии) и Атанганы—Балеану (жирные линии) при $a = 0$: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ (сплошные линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}0$ (штриховые линии).

(слева), перекрываются. При этом площадь перекрытия увеличивается при уменьшении показателей дифференцирования. На практике это может означать, что в такой системе переключение управления не всегда вызывает её переход из одной области значений фазовых координат в другую.

На рис. 3 приведено сравнение граничных траекторий системы Капуто—Фабрицио и системы Атанганы—Балеану. Видно, что для системы Атанганы—Балеану перекрытие областей, ограниченные траекториями, соответствующими $u(t) = l$ и $u(t) = -l$, наблюдается и в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

6. Заключение. В данной работе исследована динамика двумерных систем дробного порядка с управлением в случаях, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану или Прабхакара. Аналитически получены законы движения исследуемых систем и вычислены их граничные траектории. Обоснована корректность и разрешимость l-проблемы моментов для упомянутых систем, что позволяет далее пользоваться методом моментов и явным образом вычислять для них оптимальное управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. — М.: Наука, 1975.
2. *Бутковский А. Г.* Фазовые портреты управляемых динамических систем. — М.: Наука, 1985.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
4. *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Физматлит, 2003.
5. *Постнов С. С.* l-Проблема моментов и оптимальное управление для систем, моделируемых уравнениями дробного порядка с многопараметрическими и «несингулярными» производными// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *199*. — С. 86–116.
6. *Постнов С. С.* О постановке и разрешимости l-проблемы моментов для систем дробного порядка// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *206*. — С. 107–124.
7. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
8. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel// Thermal Sci. — 2016. — *20*, № 2. — P. 763–769.
9. *Caputo M., Fabrizio M.* A new definition of fractional derivative without singular kernel// Progr. Fract. Differ. Appl. — 2015. — *1*, № 2. — P. 73–85.

10. *Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Z.* Hilfer–Prabhakar derivatives and some applications// Appl. Math. Comput. — 2014. — *242.* — P. 576–589.
11. *Kubyshkin V. A., Postnov S. S.* Optimal control problem investigation for linear time-invariant systems of fractional order with lumped parameters described by equations with Riemann–Liouville derivative// J. Control Sci. Eng. — 2016. — *2016.* — 4873083.
12. *Losada J., Nieto J. J.* Properties of a new fractional derivative without singular kernel// Progr. Fract. Differ. Appl. — 2015. — *1*, № 2. — P. 87–92.
13. *Postnov S.* Optimal control problem for linear fractional-order systems, described by equations with Hadamard-type derivative// J. Phys. Conf. Ser. — 2017. — *918.* — 012026.
14. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. — Berlin: Springer, 2010.
15. *Zhang S., Hu L., Sun S.* The uniqueness of solution for initial value problems for fractional differential equation involving the Caputo–Fabrizio derivative// J. Nonlinear Sci. Appl. — 2018. — *11.* — P. 428–436.

Постнов Сергей Сергеевич
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук, Москва
E-mail: `postnov.sergey@inbox.ru`