ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 97–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-97-106

УДК 517.547.59

ФОРМУЛА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КАМПЕ ДЕ ФЕРЬЕ

© 2022 г. **А. ХАСАНОВ, Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. Метод операторов Бурчналла—Чаунди применен для исследования формул разложения гипергеометрической функциеи $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ Кампе де Ферье. При помощи полученных операторных тождеств выведены 14 формул разложения. Найдена новая группа интегральных представлений эйлерова типа для гипергеометрической функции Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ и построено ее аналитическое продолжение.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция Кампе де Ферье, оператор Бурчналла—Чаунди, интегральное представление, формула разложения, аналитическое продолжение.

FORMULA FOR ANALYTIC CONTINUATION OF THE KAMPÉ DE FÉRIET HYPERGEOMETRIC FUNCTION

© 2022 **A. HASANOV, T. K. YULDASHEV**

Abstract. We apply the method of Burchnall—Chaundy operators to the study of expansion formulas for the Kampé de Fériet hypergeometric function $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$. Using the obtained operator identities, we derive 14 expansion formulas. A new group of Euler-type integral representations for the Kampé de Fériet hypergeometric function $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ is found and its analytic continuation is constructed.

Keywords and phrases: Kampé de Fériet hypergeometric function, Bourchnall–Chaundy operator, integral representation, expansion formula, analytic continuation.

AMS Subject Classification: 33C20, 33C65, 44A45

1. Постановка задачи. Исследование кратных гипергеометрических функций мотивировано в основном тем, что решения многих прикладных задач, содержащих частные производные, могут быть получены с помощью таких гипергеометрических функций (см. [13,14,18]). Действительно, как это было показано в [12], энергия, поглощаемая некоторой неферромагнитной проводящей сферой, находящейся во внутреннем магнитном поле, рассчитывается с помощью таких функций. Гипергеометрические функции нескольких переменных использовались в физических и квантово-статистических приложениях [5,17]. В частности, многие проблемы газовой динамики приводят к проблемам вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые затем могут быть решены в терминах нескольких гипергеометрических функций. Среди примеров можно привести задачу об адиабатическом плоскопараллельном течении газа без вихря, задачу об истечении сверхзвукового тока из сосуда с плоскими стенками и ряд других задач, связанных с течением газа [7]. Следует отметить, что функции Римана и фундаментальные решения вырождающихся уравнений в частных производных второго порядка выражаются через гипергеометрические функции многих переменных [8,22]. При исследовании краевых задач для этих уравнений в частных производных нужны разложения гипергеометрических функций многих переменных по более простым гипергеометрическим функциям типа Гаусса и Аппеля.

Обширную область применения гипергеометрических функций представляют и задачи квантовой химии, в частности, проблема многоцентровых матричных элементов, вычисление которых составляет основную трудность при применении вариационных методов к молекулярным системам [16]. Ввиду разнообразия приложений является важным регулярное исследование множественных гипергеометрических функций. Бурчналл и Чаунди систематически представили ряд формул разложения и разложения некоторых двойных гипергеометрических функций через простейшие гипергеометрические функции (см., например, [2–4]). Их метод основан на следующих обратных парах символьных операторов:

$$\nabla(h) \coloneqq \frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\delta_2+h)}{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+h)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\delta_1)_k(-\delta_2)_k}{(h)_k k!}, \tag{1}$$

$$\Delta(h) \coloneqq \frac{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\delta_2+h)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\delta_1)_k(-\delta_2)_k}{(1-h-\delta_1-\delta_2)_k k!}, \tag{2}$$

где $\delta_1 \coloneqq x\dfrac{\partial}{\partial x}; \delta_2 \coloneqq y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Далее Шривастава и Карлссон [18, с. 332—333] начали применять метод Бурчналла—Чаунди для получения новых разложений для гипергеометрических функций [2–4]. Метод Бурчналла—Чаунди с некоторыми изменениями был применен Панди [9] и Шриваставы [15] для вывода формул разложения и разложения (декомпозиции) для тройных гипергеометрических функций $F_A^{(3)}$, F_E, F_K, F_M, F_N, F_P и F_T, H_A, H_C, соответственно (см. [17, раздел 1.5], [19]). Этот метод применен Сингхалом и Бхати [13] при получении аналогичных разложений, связанных с несколькими многомерными гипергеометрическими функциями. Впоследствии, используя формул прямого и обратного преобразования Лапласа в сочетании с принципом многомерной математической индукции, Шривастава установил несколько общих семейств разложений и формул разложения для двойной гипергеометрической функции Кампе де Ферье [1, с. 150] и [18, раздел 1.3]. Близкие результаты, касающиеся двойной гипергеометрической функции Кампе де Ферье, можно также найти в работах Рагаба [12] и Вермы [21].

2. Множество операторных тождеств.

Применим пары символических операторов (1), (2) к двойной гипергеометрической функции Кампе де Ферье

$$F^{p;q;k}_{l;i;j}\begin{bmatrix}(a_p): & (b_q); & (c_k); \\ (\alpha_l): & (\beta_m); & (\gamma_n);\end{bmatrix} x,y\Bigg] = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod\limits_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod\limits_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s r!s!} x^r y^s,$$

находится следующий набор операторных тождеств (см. [1, 18]):

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(d)\,{}_3F_2(b_1,b_2,b_3;d,e;x)\,{}_3F_2(c_1,c_2,c_3;d,f;y), \tag{3}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3; \\ d_1; & d_2; & d_2;\end{matrix}\ x,y\right] = \nabla(d_2)F^{0:3;3}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3; \\ d_1,d_2; & -; & -;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{4}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a,b_1,b_2; & a,c_1,c_2; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(a)\Delta(d)F^{1:2;2}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a; & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -; & d,e; & d,f;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{5}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a,b_1,b_2; & a,c_1,c_1; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(a)F^{1:2;2}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a; & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{6}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a,b_1,b_2; & a,c_1,c_2; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(a)\nabla(d_1)F^{1:2;2}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a; & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ d,d_1; & -; & -;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{7}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(d)F^{2:1;1}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2; & b; & c; \\ -; & d,e; & d,f;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{8}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)F^{2:1;1}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2; & b; & c;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{9}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c;\\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)\nabla(d_1)F^{2:1;1}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a_1,a_2; & b; & c;\\ d,d_1; & -; & -;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{10}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,a_3; & a_1,a_2,a_3;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(a_3)\Delta(d)F^{3:0;0}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3; & -; & -;\\ -; & d,e; & d,f;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{11}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(a_3)F^{3:0;0}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3; & -; & -;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{12}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,a_3; & a_1,a_2,a_3;\\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(a_3)\nabla(d_1)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}a_1,a_2,a_3;\\ d,d_1;\end{matrix}\ x+y\right).\tag{13}$$

Используя прямое и обратное преобразования Меллина, а также контурные интегральные представления Меллина—Барнса для двойной гипергеометрической функции Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$, нетрудно дать альтернативные доказательства всех операторных тождеств (3)—(13) (см., например, [1,6,8]). Детали альтернативных выводов тождеств оператора мы опускаем здесь. Отметим, что интегралы Меллина—Барнса имеют свою раннюю историю, связанную с изучением гипергеометрических функций конца девятнадцатого и начала двадцатого веков. Здесь мы рекомендуем читателей ознакомиться с книгой [11], в которой излагается теория таких интегралов и иллюстрируются их применения в асимптотическом анализе.

3. Формулы разложения (декомпозиции) для функции Кампе де Ферье. Используя принцип суперпозиции операторов, из операторных тождеств (3)—(13) для гипергеометрической функции Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ можно вывести следующие формулы разложения (декомпозиционные формулы):

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(b_1)_i(b_2)_i(b_3)_i(c_1)_i(c_2)_i(c_3)_i}{(d+i-1)_i(d)_{2i}(e)_i(f)_i i!}x^iy^i\times$$
$$\times\,{}_3F_2(b_1+i,b_2+i,b_3+i;d+2i,e+i;x)\,{}_3F_2(c_1+i,c_2+i,c_3+i;d+2i,f+i;y),\tag{14}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3;\\ d_1; & d_2; & d_2;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(b_1)_i(b_2)_i(b_3)_i(c_1)_i(c_2)_i(c_3)_i}{(d_1)_{2i}(d_2)_{2i}(d_2)_i i!}x^iy^i\times$$
$$\times F^{0:3;3}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}-; & b_1+i,b_2+i,b_3+i; & c_1+i,c_2+i,c_3+i;\\ d_1+2i,d_2+2i; & -; & -;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{15}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a,b_1,b_2; & a,c_1,c_2;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a)_i(a)_{i+j}(b_1)_{i+j}(b_2)_{i+j}(c_1)_{i+j}(c_2)_{i+j}(d)_{2i}}{(d+i-1)_i(d)^2_{2i+j}(e)_{i+j}(f)_{i+j}i!j!}\times$$
$$\times\, x^{i+j}y^{i+j}F^{1:2;2}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a+i+j; & b_1+i+j,b_2+i+j; & c_1+i+j,c_2+i+j;\\ -; & d+2i+j,e+i+j; & d+2i+j,f+i+j;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{16}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a,b_1,b_2; & a,c_1,c_1;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(a)_i(b_1)_i(b_2)_i(c_1)_i(c_2)_i}{(d)_{2i}(e)_i(f)_i i!}x^iy^i\times$$
$$\times F^{1:2;2}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a+i; & b_1+i,b_2+i; & c_1+i,c_2+i;\\ d+2i; & e+i; & f+i;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{17}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a,b_1,b_2; & a,c_1,c_2;\\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(d_1-a)_i(a)_i(b_1)_i(b_2)_i(c_1)_i(c_2)_i}{(d_1)_i(d)_{2i}(d_1)_{2i}i!}x^iy^i\times$$
$$\times F^{1:2;2}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a+i; & b_1+i,b_2+i; & c_1+i,c_2+i;\\ d+2i,d_1+2i; & -; & -;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{18}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a,b_1,b_2; & a,c_1,c_2; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\, x,y\right]=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(a)_i(a)_{i+j}(b_1)_{i+j}(b_2)_{i+j}(c_1)_{i+j}(c_2)_{i+j}}{(d_1)_i(d)_{2i+2j}(d_1)_{2i+2j}i!j!}x^{i+j}y^{i+j}\times$$
$$\times F^{1:2;2}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a+i+j; & b_1+i+j,b_2+i+j; & c_1+i+j,c_2+i+j; \\ d+2i+2j,d_1+2i+2j; & -; & -;\end{matrix}\, x,y\right],\quad (19)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\, x,y\right]=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{i}}(a_1)_i(a_1)_{\tilde{i}+k}(a_2)_{i+j}(a_2)_{\tilde{i}}(b)_{\tilde{i}}(c)_{\tilde{i}}(d)_{2i}}{(d+i-1)_i(d)^2_{i+\tilde{i}}(e)_{i+\tilde{i}}(f)_{\tilde{i}}i!j!k!}x^{\tilde{i}}\times$$
$$\times y^{\tilde{i}}F^{2:1;1}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a_1+\tilde{i}+k,a_2+\tilde{i}; & b+\tilde{i}; & c+\tilde{i}; \\ -; & d+i+\tilde{i},e+\tilde{i}; & d+i+\tilde{i},f+\tilde{i};\end{matrix}\, x,y\right],\quad (20)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\, x,y\right]=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a_1)_i(a_1)_{i+j}(a_2)_{i+2j}(b)_{i+j}(c)_{i+j}}{(d)_{2i+2j}(e)_{i+j}(f)_{i+j}i!j!}x^{i+j}y^{i+j}\times$$
$$\times F^{2:1;1}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a_1+i+j,a_2+i+2j; & b+i+j; & c+i+j; \\ d+2i+2j; & e+i+j; & f+i+j;\end{matrix}\, x,y\right],\quad (21)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\, x,y\right]=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a_1)_i(a_1)_{i+j}(a_2)_{i+2j}(d_1-a_2)_i(b)_{i+j}(c)_{i+j}}{(d_1)_i(d)_{2i+2j}(d_1)_{2i+2j}i!j!}\times$$
$$\times x^{i+j}y^{i+j}F^{2:1;1}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a_1+i+j,a_2+i+2j; & b+i+j; & c+i+j; \\ d+2i+2j,d_1+2i+2j; & -; & -;\end{matrix}\, x,y\right],\quad (22)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\, x,y\right]=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}(a_1)_{i+j}(a_1)_{\tilde{i}}(a_2)_i(a_2)_{\tilde{i}+k}(b)_{\tilde{i}}(c)_{\tilde{i}}}{(d_1)_i(d)_{2\tilde{i}}(d_1)_{2\tilde{i}}i!j!k!}\times$$
$$\times x^{\tilde{i}}y^{\tilde{i}}F^{2:1;1}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a_1+\tilde{i},a_2+\tilde{i}+k; & b+\tilde{i}; & c+\tilde{i}; \\ d+2\tilde{i},d_1+2\tilde{i}; & -; & -;\end{matrix}\, x,y\right],\quad (23)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,a_3; & a_1,a_2,a_3; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\, x,y\right]=\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{j}}(a_1)_i(a_1)_{\tilde{j}+k+l}(a_2)_{i+j}(a_2)_{\tilde{j}+l}(a_3)_{\tilde{i}}(a_3)_{\tilde{j}}(d)_{2i}}{(d+i-1)_i(d)^2_{i+\tilde{j}}(e)_{\tilde{j}}(f)_{\tilde{j}}i!j!k!l!}\times$$
$$\times x^{\tilde{j}}y^{\tilde{j}}F^{3;0;0}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a_1+\tilde{j}+k+l,a_2+\tilde{j}+l,a_3+\tilde{j}; & -; \\ -; & d+i+\tilde{j},\tilde{j};\end{matrix}\, x,y\right],\quad (24)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\, x,y\right]=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{i}}(a_1)_{\tilde{i}+j+k}(a_2)_i(a_2)_{\tilde{i}+k}(a_3)_{i+j}(a_3)_{\tilde{i}}}{(d)_{2\tilde{i}}(e)_{\tilde{i}}(f)_{\tilde{i}}i!j!k!}x^{\tilde{i}}y^{\tilde{i}}\times$$
$$\times F^{3:0;0}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a_1+\tilde{i}+j+k,a_2+\tilde{i}+k,a_3+\tilde{i}; & -; & -; \\ d+2\tilde{i}; & e+\tilde{i}; & f+\tilde{i};\end{matrix}\, x,y\right],\quad (25)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,a_3; & a_1,a_2,a_3; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\, x,y\right]=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{i}}(a_1)_i(a_1)_{\tilde{i}+k}(a_2)_{\tilde{i}+j+k}(a_3)_{i+j}(a_3)_{\tilde{i}}(d_1-a_2)_i}{(d_1)_i(d)_{2\tilde{i}}(d_1)_{2\tilde{i}}i!j!k!}\times$$
$$\times x^{\tilde{i}}y^{\tilde{i}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}a_1+\tilde{i}+k,a_2+\tilde{i}+j+k,a_3+\tilde{i}; \\ d+2\tilde{i},d_1+2\tilde{i};\end{matrix}\, x+y\right),\quad (26)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a_1,a_2,a_3;\ a_1,a_2,a_3;\\ d;\quad d_1;\quad d_1;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{-i+\tilde{j}}(a_1)_i(a_1)_{\tilde{j}+k+l}(a_2)_{i+j}(a_2)_{\tilde{j}+l}(a_3)_{\tilde{i}}(a_3)_{\tilde{j}}}{(d)_{2\tilde{j}}(d_1)_i(d_1)_{2\tilde{j}}i!j!k!l!}\times$$
$$\times x^{\tilde{j}}y^{\tilde{j}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}a_1+\tilde{j}+k+l,a_2+\tilde{j}+l,a_3+\tilde{j}\\ d+2\tilde{j},d_1+2\tilde{j}\end{matrix}\ x+y\right),\quad (27)$$

где $\tilde{i}=i+j+k$, $\tilde{j}=\tilde{i}+l$.

Наши оперативные выводы формул разложения (3)—(13) действительно будут параллельны выводам, представленным в более ранних работах, которые мы уже цитировали в предыдущих разделах. В дополнение к различным операторным выражениям и операторным тождествам, перечисленным в разделах 1 и 2, мы отметим, что также используем следующие операторные тождества [9]:

$$(\delta+\alpha)_n\{f(\xi)\}=\xi^{1-\alpha}\frac{d^n}{d\xi^n}\{\xi^{\alpha+n-1}f(\xi)\},\quad (-\delta)_n\{f(\xi)\}=(-\xi)^n\frac{d^n}{d\xi^n}\{f(\xi)\}$$

для каждой аналитической функции $f(\xi)$, где

$$\delta:=\xi\frac{d}{d\xi};\quad \alpha\in\mathbb{C};\quad n\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\};\quad \mathbb{N}:=\{1,2,3,\ldots\}.$$

Формулы (14)—(27) применяются при получении формул аналитического продолжения для функции Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$.

4. Интегральные представления для функции Кампе де Ферье. Гипергеометрическая функция Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ в области

$$\mathrm{Re}(b_1)>0,\quad \mathrm{Re}(c_1)>0,\quad \mathrm{Re}(d)>\mathrm{Re}(b_1+c_1)>0,\quad \mathrm{Re}(e)>\mathrm{Re}(b_2)>0,\quad \mathrm{Re}(f)>\mathrm{Re}(c_2)>0$$

имеет следующее интегральное представление типа Эйлера:

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right]=\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(d-b_1-c_1)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_2)}\times$$
$$\times\int_0^1\ldots\int_0^1 t_1^{b_1-1}t_2^{b_2-1}t_3^{c_1-1}t_4^{c_2-1}(1-t_1)^{d-b_1-c_1-1}(1-t_2)^{e-b_2-1}(1-t_3)^{d-c_1-1}(1-t_4)^{f-c_2-1}\times$$
$$\times[1-xt_1t_2(1-t_3)]^{-b_3}(1-t_3t_4y)^{-c_3}dt_1dt_2dt_3dt_4.\quad (28)$$

Рассмотрим интегральные представления

$$F^{0:3;3}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\\ d_1,d_2;\quad -;\quad -;\end{matrix}\ x,y\right]=\frac{\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(d_1-b_1-c_1)\Gamma(d_2-b_2-c_2)}\times$$
$$\times\int_0^1\ldots\int_0^1 t_1^{b_1-1}t_2^{b_2-1}t_3^{c_1-1}t_4^{c_2-1}(1-t_1)^{d_1-b_1-c_1-1}(1-t_2)^{d_2-b_2-c_2-1}(1-t_3)^{d_1-c_1-1}\times$$
$$\times(1-t_4)^{d_2-c_2-1}[1-xt_1t_2(1-t_3)(1-t_4)]^{-b_3}(1-t_3t_4y)^{-c_3}dt_1dt_2dt_3dt_4\quad (29)$$

в области

$$\mathrm{Re}(b_1)>0,\quad \mathrm{Re}(b_2)>0,\quad \mathrm{Re}(c_1)>0,\quad \mathrm{Re}(c_2)>0,$$
$$\mathrm{Re}(d_1)>\mathrm{Re}(b_1+c_1)>0,\quad \mathrm{Re}(d_2)>\mathrm{Re}(b_2+c_2)>0$$

и

$$F^{2:1;1}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a_1,a_2;\ b;\ c;\\ d_1,d_2;\ -;\ -;\end{matrix}\ x,y\right]=\frac{\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(d_1-a_1)\Gamma(d_2-a_2)}\times$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}(1-t_1)^{d_1-a_1-1}(1-t_2)^{d_2-a_2-1}(1-xt_1t_2)^{-b}(1-yt_1t_2)^{-c}dt_1dt_2\quad (30)$$

в области

$$\mathrm{Re}(d_1) > \mathrm{Re}(a_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(d_2) > \mathrm{Re}(a_2) > 0.$$

Применяя разложения (29) и (30), из (28) находим следующие интегральные представления с гипергеометрическими функциями в ядре:

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix} -;\ b_1, b_2, b_3;\ c_1, c_2, c_3; \\ d_1; \quad d_2; \end{matrix}\ d_2;\right] x, y = \frac{\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(d_1-b_1-c_1)\Gamma(d_2-b_2-c_2)}\times$$
$$\times \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 t_1^{b_1-1} t_2^{b_2-1} t_3^{c_1-1} t_4^{c_2-1} (1-t_1)^{\tilde{d}_1} (1-t_2)^{\tilde{d}_2} (1-t_3)^{d_1-c_1-1} (1-t_4)^{d_2-c_2-1} \times$$
$$\times \left[1 - x t_1 t_2 (1-t_3)(1-t_4)\right]^{-b_3} (1 - t_3 t_4 y)^{-c_3} \times$$
$$\times F\left(b_3, c_3; d_2; \frac{t_1 t_2 t_3 t_4 (1-t_3)(1-t_4) x y}{[1 - x t_1 t_2 (1-t_3)(1-t_4)](1 - t_3 t_4 y)}\right) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4, \quad (31)$$

$\tilde{d}_i = d_i - b_i - c_i - 1$, $i = 1, 2$, в области

$$\mathrm{Re}(b_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(b_2) > 0, \quad \mathrm{Re}(c_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(c_2) > 0,$$
$$\mathrm{Re}(d_1) > \mathrm{Re}(b_1 + c_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(d_2) > \mathrm{Re}(b_2 + c_2) > 0$$

и

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix} -;\ a_1, a_2, b;\ a_1, a_2, c; \\ d; \quad d_1; \quad\quad d_1; \end{matrix}\ x, y\right] = \frac{\Gamma(d)\Gamma(d_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(d-a_1)\Gamma(d_1-a_2)}\times$$
$$\times \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 t_1^{a_1-1} t_2^{a_2-1} (1-t_1)^{d-a_1-1} (1-t_2)^{d_1-a_2-1} (1 - x t_1 t_2)^{-b} (1 - y t_1 t_2)^{-c} \times$$
$$\times F^{2:1;0}_{1:1;0}\left[\begin{matrix} b, c; & a_1; \ -; \\ d-a_1; & d_1; \ -; \end{matrix}\ -\frac{xy(1-t_1)(1-t_2)t_1t_2}{(1-xt_1t_2)(1-yt_1t_2)}, -\frac{xy(1-t_1)t_1t_2^2}{(1-xt_1t_2)(1-yt_1t_2)}\right] dt_1 dt_2 \quad (32)$$

в области

$$\mathrm{Re}(d) > \mathrm{Re}(a_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(d_1) > \mathrm{Re}(a_2) > 0.$$

5. Формула аналитического продолжения функции Кампе де Ферье.

Теорема 0.1. *Пусть* $\mathrm{Re}(d)$, $\mathrm{Re}(e)$ *и* $\mathrm{Re}(f)$ — *такие параметры, что* $\mathrm{Re}(d)$, $\mathrm{Re}(e)$, $\mathrm{Re}(f) \neq 0, -1, -2, \ldots$ *и удовлетворяют следующим условиям*:

$$\mathrm{Re}(b_1 - b_2),\ \mathrm{Re}(b_1 - b_3),\ \mathrm{Re}(b_2 - b_3),\ \mathrm{Re}(c_1 - c_2),\ \mathrm{Re}(c_1 - c_3),\ \mathrm{Re}(c_2 - c_3) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Тогда справедливо следующее тождество:

$$F^{0;3;3}_{1;1;1}\left[\begin{matrix} -;\ b_1, b_2, b_3;\ c_1, c_2, c_3; \\ d; \quad\quad e; \quad\quad\quad f; \end{matrix}\ x, y\right] = \sum_{k=1}^{9} I_k(x, y), \quad (33)$$

где

$$I_1(x, y) = (-x)^{-b_1}(-y)^{-c_1} \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} 1-d+c_1+b_1; & b_1, 1-e+b_1; & c_1, 1-f+c_1; \\ -; & 1-b_2+b_1, 1-b_3+b_1; & 1-c_2+c_1, 1-c_3+c_1; \end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_2(x, y) = (-x)^{-b_2}(-y)^{-c_1} \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} 1-d+c_1+b_2; & b_2, 1-e+b_2; & c_1, 1-f+c_1; \\ -; & 1-b_1+b_2, 1-b_3+b_2; & 1-c_2+c_1, 1-c_3+c_1; \end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_3(x,y)=(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_1+b_3; & b_3,1-e+b_3; & c_1,1-f+c_1; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_3,1-b_2+b_3; & 1-c_2+c_1,1-c_3+c_1; & \end{matrix}\right],$$

$$I_4(x,y)=(-x)^{-b_1}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_1; & b_1,1-e+b_1; & c_2,1-f+c_2; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_2+b_1,1-b_3+b_1; & 1-c_1+c_2,1-c_3+c_2; & \end{matrix}\right],$$

$$I_5(x,y)=(-x)^{-b_2}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_2; & b_2,1-e+b_2; & c_2,1-f+c_2; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_2,1-b_3+b_2; & 1-c_1+c_2,1-c_3+c_2; & \end{matrix}\right],$$

$$I_6(x,y)=(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_3; & b_3,1-e+b_3; & c_2,1-f+c_2; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_3,1-b_2+b_3; & 1-c_1+c_2,1-c_3+c_2; & \end{matrix}\right],$$

$$I_7(x,y)=(-x)^{-b_1}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_1; & b_1,1-e+b_1; & c_3,1-f+c_3; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_2+b_1,1-b_3+b_1; & 1-c_1+c_3,1-c_2+c_3; & \end{matrix}\right],$$

$$I_8(x,y)=(-x)^{-b_2}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_2; & b_2,1-e+b_2; & c_3,1-f+c_3; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_2,1-b_3+b_2; & 1-c_1+c_3,1-c_2+c_3; & \end{matrix}\right],$$

$$I_9(x,y)=(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_3; & b_3,1-e+b_3; & c_3,1-f+c_3; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_3,1-b_2+b_3; & 1-c_1+c_3,1-c_2+c_3; & \end{matrix}\right].$$

Доказательство. Действительно, гипергеометрическая функция Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ может быть легко представлена в виде

$$F^{0;3;3}_{1;1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3; & x,y\\ d; & e; & f; & \end{matrix}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b_1)_m(b_2)_m(b_3)_m}{(d)_m(e)_m m!}x^m{}_3F_2(c_1,c_2,c_3;d+m,f;y). \tag{34}$$

Далее, применяя формулу аналитического продолжения для гипергеометрической функции Клаузена

$${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2;z)=$$
$$=(-z)^{-\alpha_1}\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\alpha_2-\alpha_1)\Gamma(\alpha_3-\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\beta_2-\alpha_1)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1,1-\beta_1+\alpha_1,1-\beta_2+\alpha_1 & \frac{1}{z}\\ 1-\alpha_2+\alpha_1,1-\alpha_2+\alpha_1 & \end{matrix}\right)+$$
$$+(-z)^{-\alpha_2}\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)\Gamma(\alpha_3-\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\beta_1-\alpha_2)\Gamma(\beta_2-\alpha_2)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_2,1-\beta_1+\alpha_2,1-\beta_2+\alpha_2 & \frac{1}{z}\\ 1-\alpha_1+\alpha_2,1-\alpha_3+\alpha_2 & \end{matrix}\right)+$$

$$+(-z)^{-\alpha_3}\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\alpha_1-\alpha_3)\Gamma(\alpha_2-\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_1-\alpha_3)\Gamma(\beta_2-\alpha_3)}{}_3F_2\begin{pmatrix}\alpha_3,1-\beta_1+\alpha_3,1-\beta_2+\alpha_3 & \frac{1}{z}\\ 1-\alpha_1+\alpha_2,1-\alpha_2+\alpha_3 & \end{pmatrix} \tag{35}$$

из (34) получим

$$F^{0;3;3}_{1;1;1}\begin{bmatrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3; & x,y\\ d;\quad e;\quad f; & \end{bmatrix}=I_{11}(x,y)+I_{12}(x,y)+I_{13}(x,y), \tag{36}$$

где

$$I_{11}(x,y)=(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(f)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(d-c_1)\Gamma(f-c_1)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c_1)_n(1-f+c_1)_n(1-d+c_1)_n}{(1-c_2+c_1)_n(1-c_3+c_1)_n m!n!}\left(\frac{1}{y}\right)^n{}_3F_2(b_1,b_2,b_3;e,d-c_1-n;x), \tag{37}$$

$$I_{12}(x,y)=(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(f)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(d-c_2)\Gamma(f-c_2)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c_2)_n(1-f+c_2)_n(1-d+c_2)_n}{(1-c_1+c_2)_n(1-c_3+c_2)_n n!}\left(\frac{1}{y}\right)^n{}_3F_2(b_1,b_2,b_3;e,d-c_2-n;x), \tag{38}$$

$$I_{13}(x,y)=(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(f)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(d-c_3)\Gamma(f-c_3)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c_3)_n(1-f+c_3)_n(1-d+c_3)_n}{(1-c_1+c_3)_n(1-c_2+c_3)_n m!n!}x^m\left(\frac{1}{y}\right)^n{}_3F_2(b_1,b_2,b_3;e,d-c_3-n;x). \tag{39}$$

Кроме того, применяя формулу (35) к тождеству (37), находим

$$I_{11}(x,y)=(-x)^{-b_1}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\begin{bmatrix}1-d+c_1+b_1; & b_1,1-e+b_1; & c_1,1-f+c_1; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_2+b_1,1-b_3+b_1; & 1-c_2+c_1,1-c_3+c_1; & \end{bmatrix}+$$
$$+(-x)^{-b_2}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\begin{bmatrix}1-d+c_1+b_2; & b_2,1-e+b_2; & c_1,1-f+c_1; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_2,1-b_3+b_2; & 1-c_2+c_1,1-c_3+c_1; & \end{bmatrix}+$$
$$+(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\begin{bmatrix}1-d+c_1+b_3; & b_3,1-e+b_3; & c_1,1-f+c_1; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_3,1-b_2+b_3; & 1-c_2+c_1,1-c_3+c_1; & \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Аналогичным образом находим из формул (38) и (39), что имею место формулы

$$I_{12}(x,y)=(-x)^{-b_1}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\begin{bmatrix}1-d+c_2+b_1; & b_1,1-e+b_1; & c_2,1-f+c_2; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_2+b_1,1-b_3+b_1; & 1-c_1+c_2,1-c_3+c_2; & \end{bmatrix}+$$
$$+(-x)^{-b_2}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\begin{bmatrix}1-d+c_2+b_2; & b_2,1-e+b_2; & c_2,1-f+c_2; & \frac{1}{x},\frac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_2,1-b_3+b_2; & 1-c_1+c_2,1-c_3+c_2; & \end{bmatrix}+$$
$$+(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_3)}\times$$

$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_3; & b_3, 1-e+b_3; & c_2, 1-f+c_2; \\ -; & 1-b_1+b_3, 1-b_2+b_3; & 1-c_1+c_2, 1-c_3+c_2;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right], \quad (41)$$

$$I_{13}(x,y) = (-x)^{-b_1}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_1; & b_1, 1-e+b_1; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_2+b_1, 1-b_3+b_1; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]+$$
$$+(-x)^{-b_2}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_2; & b_2, 1-e+b_2; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_1+b_2, 1-b_3+b_2; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]+$$
$$+(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_3; & b_3, 1-e+b_3; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_1+b_3, 1-b_2+b_3; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]. \quad (42)$$

Подставив формулы (40)–(42) в тождество (36), получим формулу (33) аналитического продолжения для гипергеометрической функции $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$, что завершает доказательство теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appell P., Kampé de Fériet J.* Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. — Paris: Gauthier-Villars, 1926.
2. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions// Quart. J. Math. — 1940. — *11.* — P. 249–270.
3. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions, II// Quart. J. Math. — 1941. — *12.* — P. 112–128.
4. *Chaundy T. W.* Expansions of hypergeometric functions// Quart. J. Math. — 1942. — *13.* — P. 159–171.
5. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vols. 1, 2. — New York: McGraw-Hill, 1953.
6. *Hasanov A., Srivastava H. M., Turaev M.* Decomposition formulas for some triple hypergeometric functions// J. Math. Anal. Appl. — 2006. — *324.* — P. 955–969.
7. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1893. — *7.* — P. 111–158.
8. *Marichev O. I.* Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables. — New York: Wiley, 1982.
9. *Poole E. G.* Introduction to the Theory of Linear Differential Equations. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1936.
10. *Pandey R. C.* On the expansions of hypergeometric functions// Agra Univ. J. Res. Sci. — 1963. — *12.* — P. 159–169.
11. *Paris R. B., Kaminski D.* Asymptotics and Mellin–Barnes Integrals. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
12. *Ragab F. M.* Expansions of Kampe de Feriet's double hypergeometric function of higher order// J. Reine Angew. Math. — 1963. — *212.* — P. 113–119.
13. *Singhal J. P., Bhati S. S.* Certain expansions associated with hypergeometric functions of variables// Glasnik Mat. Ser. — 1976. — *3*, № 11. — P. 239–245.
14. *Srivastava H. M.* Hypergeometric functions of three variables// Ganita. — 1964. — *15.* — P. 97–108.
15. *Srivastava H. M.* Some integrals representing triple hypergeometric functions// Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. — 1967. — *16.* — P. 99–115.
16. *Niukkanen A. W.* Generalised hypergeometric series arising in physical and quantum chemical applications// J. Phys. A: Math. Gen. — 1983. — *16.* — P. 1813–1825.
17. *Srivastava H. M.* A class of generalized multiple hypergeometric series in physical and quantum chemical applications// J. Phys. A: Math. Gen. — 1985. — *18.* — P. 227–234.

18. *Srivastava H. M., Karlsson P. W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. — New York: Wiley, 1985.
19. *Srivastava H. M., Manocha H.* A Treatise on Generating Functions. — New York: Wiley, 1984.
20. *Turaev M.* Decomposition formulas for Srivastava's hypergeometric function on Saran functions// J. Comput. Appl. Math. — 2009. — *233*. — P. 842–846.
21. *Verma A.* Expansions involving hypergeometric functions of two variables// Math. Comput. — 1966. — *20*. — P. 590–596.
22. *Hasanov A., Yuldashev T. K.* Analytic continuation formulas for the hypergeometric functions in three variables of second order// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 2. — P. 386–393.

Хасанов Анварджан
Институт математики им. В. И. Романовского АН Узбекистана, Ташкент;
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М. Т. Уразбаева
АН Узбекистана, Ташкент;
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров
ирригации и механизации сельского хозяйства»
E-mail: anvarhasanov@yahoo.com

Юлдашев Турсун Камалдинович
Ташкентский государственный экономический университет
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com