ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 66–76
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-66-76

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ, СВЯЗАННАЯ С ТЕЧЕНИЕМ ГАЗА В КАНАЛЕ, ОКРУЖЕННОМ ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ

© 2022 г. **А. К. УРИНОВ, Э. Т. КАРИМОВ, С. КЕРБАЛ**

Аннотация. Исследована краевая задача с интегральным условием сопряжения для смешанного уравнения с оператором дробного интегро-дифференцирования. Основным результатом работы является доказательство однозначной разрешимости краевой задачи с интегральным условием сопряжения для уравнения, состоящего из двух уравнений в частных производных с дробной производной Римана—Лиувилля в смешанной прямоугольной области. Задача эквивалентным образом редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Показана особая роль условия сопряжения в разрешимости задачи.

Ключевые слова: краевая задача, интегральное условие сопряжения, смешанное уравнение дробного порядка, течение газа в канале.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONJUGATION CONDITION FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE FRACTIONAL RIEMANN–LIOUVILLE DERIVATIVE THAT DESCRIBES GAS FLOWS IN A CHANNEL SURROUNDED BY A POROUS MEDIUM

© 2022 **A. K. URINOV, E. T. KARIMOV, S. KERBAL**

Abstract. A boundary-value problem with an integral conjugation condition for a mixed equation with a fractional integro-differential operator was examined. The main result of the work is the proof of the unique solvability of the boundary-value problem with an integral conjugation condition for the equation consisting of two partial differential equations with the fractional Riemann–Liouville derivative in a rectangular domain. The problem is reduced to a Volterra integral equation of the second kind. The special role of the conjugation condition in the solvability of the problem is shown.

Keywords and phrases: boundary-value problem, integral conjugation condition, mixed fractional-order equation, gas flow in a channel.

AMS Subject Classification: 35M10

1. Введение. Течение газа или мало сжимаемой жидкости на канале, окруженной пористой средой, описывается уравнением смешанного типа (см. [3]). В канале течение описывается волновым уравнением, а вне его — уравнением диффузии. Изучение двух уравнений, заданных в двух частях пространства и связанных теми или иными условиями сопряжения на границе, диктуется реальными физическими задачами (см. [3]). Исходя из типа структуры пористой среды (коэффициент пористости), уравнения диффузии могут быть разными. Так, учет эффекта памяти среды приводит к необходимости замены обычной производной по времени на производную дробного порядка (см. [17]). Для точного описания процесса в качестве математической модели взята комбинация волнового уравнения и уравнения диффузии с операторами дробного интегро-дифференцирования

$$\frac{\partial^\alpha u(t,\mathrm{x})}{\partial t^\alpha} - L(u) = f(t,u,\mathrm{x}), \tag{1}$$

где $\partial^\alpha u/\partial t^\alpha$ — оператор дробного интегро-дифференцирования порядком $\alpha \in [0;2]$, зависящим от области рассмотрения, $L(u)$ — эллиптический оператор, $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Уравнение (1) рассматривается в области $\Pi = \Pi_1 \cup J \cup \Pi_2$, где Π_1 — односвязная область, в которой рассматривается волновое уравнение с дробной производной, а Π_2 — односвязная область, в которой рассматривается уравнение диффузии с дробной производной. На общей границе этих областей $J = \partial\Pi_1 \cap \partial\Pi_2$ задаются условия сопряжения. Упрощение геометрии рассматриваемых областей, а также линеаризованные уравнения позволяют исследовать задачу аналитическими методами.

Рассмотрим область Π, состоящую из двух прямоугольниковю В качестве оператора дробного интегро-дифференцирования используем оператор Римана—Лиувилля

$$D^\gamma_{0+} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\gamma}_{0+} f, \quad n-1 < \gamma \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где

$$I^\delta_{0+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int\limits_0^t (t-z)^{\delta-1} f(z)dz$$

— дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка δ.

Отметим, что в [8–12] исследованы как прямые, так и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольных областях. Различные локальные и нелокальные краевые задачи для таких уравнений с операторами дробного интегро-дифференцирования в прямоугольных областях исследованы в [2,5,7,13,14]. Также отметим работы [4,16,20,21], где рассмотрены задачи для смешанных уравнений четвертого порядка с дробными производными. Такие же задачи для нагруженных уравнений смешанного типа с операторами дробного интегро-дифференцирования были исследованы в [1, 15]. Кроме того, изучались уравнения с несколькими производными дробного порядка [18], со спектральными параметрами [22], с более общими операторами [19] и т. д.

Основными отличиями исследуемой задачи от ранее изученных задач является условие сопряжения на линии изменения типа и редукция задачи к интегральному уравнению. Кроме того, использованы новые свойства функции Грина первой краевой задачи для диффузионно-волнового уравнения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(t,x) - H(a-x) D^{\gamma_1}_{0+} u(t,x) - [1 - H(a-x)] D^{\gamma_2}_{0+} u(t,x) = f(t,x) \tag{3}$$

в области $\Pi = \Pi_1 \cup J \cup \Pi_2$, где

$$\Pi_1 = \{(t,x) : 0 < x < a,\ 0 < t < T\}, \quad \Pi_2 = \{(t,x) : a < x < b,\ 0 < t < T\},$$
$$J = \{(t,x) : x = a,\ 0 < t < T\}, \quad 1 < \gamma_1 \leqslant 2, \quad 0 < \gamma_2 \leqslant 1,$$

$H(\cdot)$ — функция Хевисайда, D^γ_{0+} — производная дробного порядка γ в смысле Римана—Лиувилля.

Задача. Найти *регулярное решение* уравнения (3) в области Π, удовлетворяющее краевым и начальным условиям

$$u(t,0)=\varphi_0(t), \quad u(t,b)=\varphi_b(t), \quad 0<t<T, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0^+} D_{0+}^{\gamma_1-k}u(t,x)=\psi_k(x), \quad k=1,2, \quad 0<x<a, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0^+} D_{0+}^{\gamma_2-1}u(t,x)=\psi_3(x), \quad a<x<b, \tag{6}$$

а также условиям сопряжения на J

$$I_{0+}^{2-\gamma_1}u(t,a^-)=I_{0+}^{1-\gamma_2}u(t,a^+), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{7}$$

$$u_x(t,a^-)=u_x(t,a^+)+\lambda u_t(t,a^+)+\mu\int_0^t u_x(z,a^+)P(z,a^+)dz, \quad 0<t<T. \tag{8}$$

Здесь λ, μ — заданные действительные числа, $P(t,x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_b(t)$, $\psi_i(x)$ — заданные функции $(i=\overline{1,3})$, $D_{0+}^{-\gamma}u(\cdot)=I_{0+}^{\gamma}u(\cdot)$, $\gamma>0$.

Определение. Под *регулярным решением* уравнения (3) в области Π понимается функция $u(t,x)$ из класса функций

$$W=\Big\{u(t,x):\ t^{2-\gamma_1}u(t,x)\in C(\overline{\Pi}_1),\ t^{1-\gamma_2}u(t,x)\in C(\overline{\Pi}_2),$$
$$u_{xx}(t,x)\in C(\Pi_1\cup\Pi_2),\ D_{0+}^{\gamma_1}u(t,x)\in C(\Pi_1),\ D_{0+}^{\gamma_2}u(t,x)\in C(\Pi_2)\Big\},$$

удовлетворяющая уравнению (1) в областях Π_1 и Π_2.

Таким образом, верны следующие условия согласования:

$$\lim_{t\to 0^+} t^{2-\gamma_1}\varphi_0(t)=\psi_1(0), \quad \lim_{t\to 0^+} t^{1-\gamma_2}\varphi_b(t)=\psi_3(b). \tag{9}$$

3. Основной результат.

Однозначную разрешимость поставленной задачи будем доказывать методом интегральных уравнений, т.е. задачу эквивалентным образом редуцируем к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Решение первой краевой задачи для уравнения (3) в Π_1 представляется в следующем виде:

$$u(t,x)=\int_0^t \varphi_0(\eta)G_\xi(t,x,\eta,0)d\eta-\int_0^t \tau_1(\eta)G_\xi(t,x,\eta,a)d\eta+$$
$$+\int_0^a\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\psi_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial\eta^{k-1}}G(t,x,0,\xi)d\xi-\int_0^t\int_0^a f(\eta,\xi)G(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi, \tag{10}$$

где $u(t,a^-)=\tau_1(t)$,

$$G(t,x,\eta,\xi)=\frac{(t-\eta)^{\hat\alpha-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e_{1,\hat\alpha}^{1,\hat\alpha}\left(-\frac{|x-\xi+2na|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right)+e_{1,\hat\alpha}^{1,\hat\alpha}\left(-\frac{|x+\xi+2na|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right)\right], \quad \hat\alpha=\frac{\gamma_1}{2}, \tag{11}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения (3) в Π_1 и

$$e_{1,\hat\alpha}^{1,\hat\alpha}(z)=\Phi(-\hat\alpha,\hat\alpha,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(-\hat\alpha n+\hat\alpha)} \tag{12}$$

— функция типа Райта (см. [6]). Теперь запишем решение первой краевой задачи для уравнения (3) в Π_2:

$$u(t,x)=\int\limits_0^t \tau_2(\eta)\hat{G}_\xi(t,x,\eta,a)d\eta-\int\limits_0^t \varphi_b(\eta)\hat{G}_\xi(t,x,\eta,b)d\eta+$$
$$+\int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}(t,x,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi, \quad (13)$$

где $u(t,a^+)=\tau_2(t)$,

$$\hat{G}(t,x,\eta,\xi)=\frac{(t-\eta)^{\hat{\beta}-1}}{2}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-\xi+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)+e^{1,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x+\xi-2a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)\right], \quad \hat{\beta}=\frac{\gamma_2}{2}, \quad (14)$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения (3) в Π_2 (см. [6]).

Лемма 1. *Функции Грина* (11) *и* (14) *обладают следующими свойствами*:

$$\hat{G}_{\xi x}(t,x,\eta,a)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)\right], \quad (15)$$

$$\hat{G}_{\xi x}(t,x,\eta,b)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-b+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)\right], \quad (16)$$

$$G_{\xi x}(t,x,\eta,0)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\alpha}}_{1,\hat{\alpha}}\left(-\frac{|x+2na|}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\right)\right], \quad (17)$$

$$G_{\xi x}(t,x,\eta,a)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\alpha}}_{1,\hat{\alpha}}\left(-\frac{|x+(2n+1)a|}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\right)\right]. \quad (18)$$

Доказательство. Сначала докажем (15). Используя формулу

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{\widehat{\mu}-1}e^{\widehat{\mu},\delta}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(cz^{\widehat{\alpha}})=z^{\widehat{\mu}-n-1}e^{\widehat{\mu}-n,\delta}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(cz^{\widehat{\alpha}}) \quad (19)$$

при $n=1$, $\widehat{\mu}=1$, $\widehat{\alpha}=1$, $\delta=\widehat{\beta}=\hat{\beta}$, $c=-(t-\eta)^{-\hat{\beta}}$, $z=|x\pm\xi+2n(b-a)|$, получим

$$\hat{G}_\xi(t,x,\eta,\xi)=\frac{1}{2}(t-\eta)^{\hat{\beta}-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sign}(x-\xi+2n(b-a))}{|x-\xi+2n(b-a)|}e^{0,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-\xi+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\operatorname{sign}(x+\xi-2a+2n(b-a))}{|x+\xi-2a+2n(b-a)|}e^{0,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x+\xi-2a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)\right].$$

Поэтому

$$\hat{G}_\xi(t,x,\eta,0)=(t-\eta)^{\hat{\beta}-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(x-a+2n(b-a))}{|x-a+2n(b-a)|}e^{0,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right).$$

Теперь, применяя формулу

$$\frac{1}{z}e^{-k,\delta}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(z)=e^{\widehat{\alpha}-k,\delta-\widehat{\beta}}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(z) \quad (20)$$

при

$$k=0, \quad \delta=\widehat{\beta}=\hat{\beta}, \quad z=-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}},$$

находим

$$\hat{G}_\xi(t,x,\eta,a) = -(t-\eta)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}(x-a+2n(b-a))e^{1,0}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right).$$

Дифференцируя последнее равенство по x и используя формулу (19) при

$$n=1,\quad \widehat{\mu}=1,\quad \delta=0,\quad \widehat{\beta}=\hat{\beta},\quad c=-(t-\eta)^{-\hat{\beta}},\quad z=|x-a+2n(b-a)|,$$

имеем

$$\hat{G}_{\xi x}(t,x,\eta,a) = (t-\eta)^{-\hat{\beta}-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}{|x-a+2n(b-a)|}e^{0,0}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right).$$

Теперь, используя формулу (20) при $k=0$, $\delta=0$, $\widehat{\alpha}=1$, $\widehat{\beta}=\hat{\beta}$, находим

$$\hat{G}_{\xi x}(t,x,\eta,a) = -(t-\eta)^{-\hat{\beta}-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,-\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right).$$

Наконец, учитывая равенство

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{\delta-1}e^{\widehat{\mu},\delta}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}\left(cz^{-\widehat{\beta}}\right) = z^{\delta-n-1}e^{\widehat{\mu},\delta-n}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}\left(cz^{-\widehat{\beta}}\right)$$

при

$$n=1,\quad \widehat{\alpha}=1,\quad \widehat{\mu}=1,\quad \widehat{\beta}=\hat{\beta},\quad \delta=1-\hat{\beta},\quad c=-|x-a+2n(b-a)|,\quad z=t-\eta,$$

получим (15). Равенства (16)–(18) доказываются аналогично. □

Дифференцируя (10) и (13) один раз по x и учитывая лемму 1, получим

$$u_x(t,x) = \int_0^t \varphi_0(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}K_3(t-\eta,x)d\eta - \int_0^t \tau_1(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta +$$
$$+\int_0^a \psi_1(\xi)G_x(t,x,0,\xi)d\xi - \int_0^a \psi_2(\xi)G_{\eta x}(t,x,0,\xi)d\xi - \int_0^t\int_0^a f(\eta,\xi)G_x(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi,$$

$$u_x(t,x) = \int_0^t \tau_2(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}K_1(t-\eta,x)d\eta - \int_0^t \varphi_b(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}K_2(t-\eta,x)d\eta +$$
$$+\int_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(t,x,0,\xi)d\xi - \int_0^t\int_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi.$$

Здесь

$$K_1(t-\eta,x) = \frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right), \tag{21}$$

$$K_2(t-\eta,x) = \frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-b+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right), \tag{22}$$

$$K_3(t-\eta,x) = \frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\alpha}}_{1,\hat{\alpha}}\left(-\frac{|x+2na|}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\right), \tag{23}$$

$$K_4(t-\eta,x) = \frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\alpha}}_{1,\hat{\alpha}}\left(-\frac{|x+(2n+1)a|}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\right). \tag{24}$$

В некоторых интегралах применим формулу интегрирование по частям:

$$u_x(t,x)=\varphi_0(\eta)K_3(t-\eta,x)\Big|_0^t-\int\limits_0^t\varphi_0'(\eta)K_3(t-\eta,x)d\eta-$$
$$-\tau_1(\eta)K_4(t-\eta,x)\Big|_0^t+\int\limits_0^t\tau_1'(\eta)K_4(t-\eta,x)d\eta+\int\limits_0^a\psi_1(\xi)G_x(t,x,0,\xi)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^a\psi_2(\xi)G_{\eta x}(t,x,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_0^a f(\eta,\xi)G_x(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi,$$

$$u_x(t,x)=\tau_2(\eta)K_1(t-\eta,x)\Big|_0^t-\int\limits_0^t\tau_2'(\eta)K_1(t-\eta,x)d\eta-\varphi_b(\eta)K_2(t-\eta,x)\Big|_0^t+$$
$$+\int\limits_0^t\varphi_b'(\eta)K_2(t-\eta,x)d\eta+\int\limits_a^b\psi_3(\xi)\hat{G}_x(t,x,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi.$$

Учитывая, что

$$\lim_{\eta\to t}K_i(t-\eta,x)=\lim_{z\to 0}K_i(z,x),\quad i=\overline{1,4},$$

отдельно вычислим эти пределы. Для этого воспользуемся формулой

$$-\rho z e_{1,\rho}^{1,\delta-\rho}(z)=e_{1,\rho}^{1,\delta-1}(z)+(1-\delta)e_{1,\rho}^{1,\delta}(z).$$

В результате получим

$$K_3(z,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\hat{\alpha}|x+2na|}e_{1,\hat{\alpha}}^{1,0}\left(-\frac{|x+2na|}{z^{\hat{\alpha}}}\right).$$

Теперь используем следующий предел:

$$\lim_{|\zeta|\to\infty}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(\zeta)=0,\quad \pi\geqslant|\arg(\zeta)>\pi\frac{\alpha+\beta}{2}+\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

В нашем случае при $z\to 0$ имеем $|\zeta|\to\infty$, поэтому

$$\lim_{z\to 0}K_3(z,x)=0.$$

Таким же образом получим, что

$$\lim_{z\to 0}K_j(z,x)=0,\quad j=1,2,4.$$

Итак,

$$u_x(t,x)=-\varphi_0(0)K_3(t,x)-\int\limits_0^t\varphi_0'(\eta)K_3(t-\eta,x)d\eta+$$
$$+\tau_1(0)K_4(t,x)+\int\limits_0^t\tau_1'(\eta)K_4(t-\eta,x)d\eta+\ldots,\quad (25)$$

$$u_x(t,x)=-\tau_2(0)K_1(t,x)-\int\limits_0^t\tau_2'(\eta)K_1(t-\eta,x)d\eta+$$
$$+\varphi_b(0)K_2(t,x)+\int\limits_0^t\varphi_b'(\eta)K_2(t-\eta,x)d\eta+\ldots\quad (26)$$

Из (7), учитывая обозначения $u(t,a^-)=\tau_1(t)$, $u(t,a^+)=\tau_2(t)$ и полагая, что $\gamma_1\geqslant 1+\gamma_2$, получим

$$\tau_1(t)=I_{0+}^{\gamma_1-\gamma_2-1}(\tau_2(t))=\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_0^t\tau_2(z)(t-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}dz. \tag{27}$$

Отметим, что из (5) и определения регулярного решения следует, что $\tau_1(0)=\psi_1(a)$. Учитывая (27), преобразуем следующий интеграл:

$$\int\limits_0^t\tau_1'(\eta)K_4(t-\eta,x)d\eta=\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_0^t\frac{d}{d\eta}\left(\int\limits_0^\eta\tau_2(z)(t-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}dz\right)K_4(t-\eta,x)d\eta=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\left[\left(\int\limits_0^\eta\tau_2(z)(t-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}dz\right)K_4(t-\eta,x)\Bigg|_0^t-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\eta\tau_2(z)(\eta-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}dz\right)\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta\right]=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_0^t\tau_2'(\zeta)d\zeta\int\limits_\zeta^t dz\int\limits_z^t(\eta-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta-$$

$$-\frac{\psi_3(a)}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_0^t dz\int\limits_z^t(\eta-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta.$$

Здесь учтено, что $\tau_2(0)=\psi_3(a)$, которая следует из (5) и из определения регулярного решения. Далее, учитывая вид функции типа Райта, а также интегральное представление бета-функции, находим

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_\zeta^t dz\int\limits_z^t(\eta-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta=\int\limits_\zeta^t(t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,x)dz,$$

где

$$K_4(t-z,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e_{1,\frac{\gamma_1}{2}}^{1,\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-1}\left(-\frac{|x+(2n+1)|a}{(t-z)^{\gamma_1/2}}\right).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^t\tau_1'(\eta)K_4(t-\eta,x)d\eta=\int\limits_0^t\tau_2'(\zeta)d\zeta\int\limits_\zeta^t(t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,x)dz+$$

$$+\psi_3(a)\int\limits_0^t(t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,x)dz. \tag{28}$$

В (25), (26) переходим к пределу при $x\to a\mp 0$, а затем, учитывая (28), подставим их в (8). В итоге получим:

$$
\begin{gathered}
-\varphi_0(0)K_3(t,a)-\int_0^t \varphi_0'(\eta)K_3(t-\eta,a)d\eta+\psi_1(a)K_4(t,a)+\\
+\int_0^t \tau_2'(\zeta)d\zeta\int_\zeta^t (t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,a)dz+\psi_3(a)\int_0^t (t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,a)dz+\\
+\int_0^a \psi_1(\xi)G_x(t,a,0,\xi)d\xi-\int_0^a \psi_2(\xi)G_{\eta x}(t,a,0,\xi)d\xi-\int_0^t\int_0^a f(\eta,\xi)G_x(t,a,\eta,\xi)d\eta d\xi=\\
=\lambda\tau_2'(t)-\int_0^t \tau_2'(\eta)K_4(t-\eta,a)d\eta-\mu\int_0^t P(z,a)dz\int_0^z \tau_2'(\eta)K_4(z-\eta,a)d\eta-\\
-\psi_3(a)K_4(t,a)+\varphi_b(0)K_2(t,a)+\int_0^t \varphi_b'(\eta)K_2(t-\eta,a)d\eta+\\
+\int_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(t,a,0,\xi)d\xi-\int_0^t\int_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(t,a,\eta,\xi)d\eta d\xi-\\
-\mu\int_0^t P(z,a)\left[\psi_3(a)K_1(z,a)-\varphi_b(0)K_2(z,a)-\int_0^z \varphi_b'(\eta)K_2(z-\eta,a)d\eta+\right.\\
\left.+\int_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(z,a,0,\xi)d\xi-\int_0^z\int_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(z,a,\eta,\xi)d\eta d\xi\right]dz.
\end{gathered}
$$

Отсюда, принимая во внимание равенство

$$
\int_0^t P(z,a)dz\int_0^z \tau_2'(\eta)K_1(z-\eta,a)d\eta=\int_0^t \tau_2'(\eta)d\eta\int_\eta^t P(z,a)K_4(z-\eta,a)dz,
$$

получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$
\lambda\tau_2'(t)-\int_0^t \tau_2'(\zeta)K^*(t,\zeta)d\zeta=g(t), \tag{29}
$$

где

$$
K^*(t,\zeta)=K_4(t-\zeta,a)-\int_\zeta^t \left[(t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,a)+\mu P(z,a)K_4(z-\zeta,a)\right]dz, \tag{30}
$$

$$
\begin{gathered}
g(t)=-\varphi_0(0)K_3(t,a)-\int_0^t \varphi_0'(\eta)K_3(t-\eta,a)d\eta+\psi_1(a)K_4(t,a)+\\
+\psi_3(a)\int_0^t (t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,a)dz+\int_0^a \psi_1(\xi)G_x(t,a,0,\xi)d\xi-\\
-\int_0^a \psi_2(\xi)G_{\eta x}(t,a,0,\xi)d\xi-\int_0^t\int_0^a f(\eta,\xi)G_x(t,a,\eta,\xi)d\eta d\xi+\psi_3(a)K_4(t,a)-\varphi_b(0)K_2(t,a)-
\end{gathered}
$$

$$-\int\limits_0^t \varphi_b'(\eta)K_2(t-\eta,a)d\eta-\int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(t,a,0,\xi)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(t,a,\eta,\xi)d\eta d\xi+$$
$$+\mu\int\limits_0^t P(z,a)\left[\psi_3(a)K_4(z,a)-\varphi_b(0)K_2(z,a)-\int\limits_0^z \varphi_b'(\eta)K_2(z-\eta,a)d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(z,a,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^z\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(z,a,\eta,\xi)d\eta d\xi\right]dz. \quad (31)$$

Если $\lambda=0$, то интегральное уравнение (29) переходит в интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое не всегда разрешимо. В этом случае его можно редуцировать к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Так как $K^*(t,t)=0$ в силу соотношения

$$\lim_{z\to 0}K_4(z,x)=0,$$

то это невозможно. Поэтому предполагаем, что $\lambda\neq 0$, откуда следует важность члена $\lambda u_t(t,a^+)$ в условии сопряжения (8).

Итак, задача эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (29), однозначная разрешимость которого зависит от ядра и функции в правой части. Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $0<\theta\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant b$. *Тогда имеют место следующие оценки*:

$$|K_1(t-\eta,x)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(t-\eta)^{\hat\beta}}e^{1,1-\hat\beta}_{1,\hat\beta}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right)\right|\leqslant C_1(t-\eta)^{\hat\beta\theta},\quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$|K_2(t-\eta,x)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(t-\eta)^{\hat\beta}}e^{1,1-\hat\beta}_{1,\hat\beta}\left(-\frac{|x-b+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right)\right|\leqslant C_2(t-\eta)^{\hat\beta\theta},\quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$|K_3(t-\eta,x)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}e^{1,1-\hat\alpha}_{1,\hat\alpha}\left(-\frac{|x+2na|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right)\right|\leqslant C_3(t-\eta)^{\hat\alpha\theta},\quad 0\leqslant x\leqslant a,$$
$$|K_4(t-\eta,x)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}e^{1,1-\hat\alpha}_{1,\hat\alpha}\left(-\frac{|x+(2n+1)a|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right)\right|\leqslant C_4(t-\eta)^{\hat\alpha\theta},\quad 0\leqslant x\leqslant a,$$
$$|K_4(t-\eta,x)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|e^{1,\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-1}_{1,\frac{\gamma_1}{2}}\left(-\frac{|x+(2n+1|\,a)}{(t-\eta)^{\gamma_1/2}}\right)\right|\leqslant C_4(t-\eta)^{\frac{\gamma_1}{2}(1+\theta)},\quad 0\leqslant x\leqslant a,$$

где C_i, $i=\overline{1,4}$, *— положительные константы.*

Доказательство. Ограничимся доказательством первой оценки, так как остальные доказываются аналогично. Используя формулу (20) при

$$\overline{\alpha}=1,\quad k=0,\quad \overline{\beta}=\hat\beta,\quad \delta=1,\quad z=-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}},$$

получим

$$|K_1(t-\eta,x)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|e^{0,1}_{1,\hat\beta}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right)\right|.$$

Далее, используя оценку

$$|x^{\rho-1}y^{\delta-1}e^{\rho,\delta}_{\omega,\tau}(-x^{\omega}y^{-\tau})|\leqslant Cx^{\rho-\omega\theta-1}y^{\delta+\tau\theta-1},\quad 0<\theta\leqslant 1$$

(см. [6]) при $\rho = 0$, $\omega = 1$, $\tau = \widehat{\beta}$, $\delta = 1$, $x = |x - a + 2n(b-a)|$, $y = t - \eta$, получим

$$|K_1(t-\eta, x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{0,1}_{1,\hat\beta} \left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}} \right) \right| \leqslant |t-\eta|^{\hat\beta\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-a+2n(b-a)|^{1+\theta}}.$$

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-a+2n(b-a)|^{1+\theta}}$$

абсолютно сходится; обозначим его сумму через L_1. Вводя обозначение $C_1 = CL_1$, из последнего неравенство получим первое утверждение леммы 2. $\square$

Оценку для ядра (30) находим, учитывая лемму 2, а также предполагая, что заданная функция $P(t,x)$ непрерывна по t в $[0,T]$. Тогда

$$|K^*(t,\zeta)| \leqslant (t-\zeta)^{\frac{\gamma_1}{2}\theta}[C_4 + C_5(t-\zeta)^{\gamma_1-\gamma_2-1} + C_6(t-\zeta)],$$

где

$$C_5 = \frac{M}{\gamma_1(1+\theta/2) - \gamma_2 - 1}, \quad C_6 = \frac{C}{(\gamma_1\theta)/2+1}, \quad M = \sup|p(t,a)| \geqslant 0.$$

Из (31) видно, что если

$$\begin{gathered} t^{2-\gamma_1}\varphi_0(t) \in C[0,T], \quad t^{1-\gamma_2}\varphi_b(t) \in C[0,T], \quad \varphi_0(t) \in C^1[0,T], \quad \varphi_b(t) \in C^1[0,T], \\ \psi_1(x) \in C[0,a], \quad \psi_2(x) \in C[0,a], \quad \psi_3 \in C[a,b], \\ t^{2-\gamma_1} f(t,x) \in C(\overline{\Pi}_1), \quad t^{1-\gamma_2} f(t,x) \in C(\overline{\Pi}_2), \end{gathered} \tag{32}$$

то функция $g(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и непрерывно дифференцируема в $(0,T)$.

На основании установленных свойств функций $K^*(t,\zeta)$ и $g(t)$, согласно теории интегральных уравнений Вольтерра, уравнение (29) однозначно разрешимо, из которого следует разрешимость задачи.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\gamma_1 \geqslant 1 + \gamma_2$. Если $\lambda \neq 0$ и выполнены условия* (32) *и, кроме того, $f(t,x)$ удовлетворяет условию Гельдера по x, то существует единственное регулярное решение задачи.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев О. Х.* Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2016. — № 2. — С. 220–240.
2. *Балкизов Ж. А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа второго и третьего порядков/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик, 2014.
3. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1959. — *14*, № 3. — С. 3–19.
4. *Кадиркулов Б. Ж., Жалилов М. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Хилфера// Бюлл. Ин-та мат. им. В. И. Романовского. — 2020. — № 1. — С. 59–67.
5. *Капустин Н. Ю.* Задачи для параболо-гиперболических уравнений и соответствующие спектральные вопросы с параметром в граничных точках/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — М., 2012.
6. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
7. *Рахманова Л. Х.* Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Казань, 2009.
8. *Сабитов К. Б., Мелишева Е. П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 7. — С. 62–76.
9. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 1. — С. 46–59.
10. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения// Мат. заметки. — 2017. — № 3. — С. 415–435.

11. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2017. — *137*. — С. 26–60.
12. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения// Мат. заметки. — 2017. — *102*, № 3. — С. 415–435.
13. *Тарасенко А. В.* Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5. — С. 263–267.
14. *Юлдашева А. Ю.* Обратная задача для параболо-гиперболического уравнения// в кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. — Ташкент, 2009. — С. 85–88.
15. *Abdullaev O. Kh., Sadarangani K. B.* Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed-type equations involving the Caputo fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — 164.
16. *Berdyshev A. S., Eshmatov B. E., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problems for fourth-order mixed-type equation with fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — 36.
17. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — San Diego, CA: Academic Press, 1999.
18. *Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B.* On a non–local problem for a multi–term fractional diffusion-wave equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2020. — № 2. — P. 324–355.
19. *Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B.* Inverse source problems for positive operators. I. Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations// J. Inv. Ill-posed Probl. — 2019. — *6*. — P. 891–911.
20. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed type with fractional Hilfer operator// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 68.
21. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator// Ural Math. J. — 2020. — № 1. — P. 153–167.
22. *Yuldashev T. K., Karimov E. T.* Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional order Caputo operators and spectral parameters// Axioms. — 2020. — *9*, № 4. — 121.

Уринов Ахмаджон Кушакович
Ферганский государственный университет, Узбекистан
E-mail: `urinovak@mail.ru`

Каримов Эркинжон Тулкинович
Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `erkinjon.karimov@mathinst.uz`

Кербал Себти
Университет Султана Кабуса, Оман
E-mail: `skerbal@squ.edu.om`