ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 77–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-77-95

УДК 517, 531.01

# ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. I. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы, пространствами положений которых являются четырехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к соответствующим многообразиям. Рассматриваемые динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость более общих классов однородных динамических систем с переменной диссипацией на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям.

***Ключевые слова***: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

# INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS. I. EQUATIONS OF GEODESIC LINES

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, systems arise whose position spaces are four-dimensional manifolds. Naturally, the phase spaces of such systems are the tangent bundles of the corresponding manifolds. Dynamical systems considered have variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of transcendental functions expressed in terms of finite combinations of elementary functions. In this paper, we prove the integrability of more general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds.

***Keywords and phrases***: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

***AMS Subject Classification***: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

## 1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к четырехмерному многообразию

Необходимо напомнить ряд результатов, без которых рассмотрение систем с диссипацией невозможно (см. также [1, 4, 13, 61, 65]).

**1.1. Общие обозначения.** Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие $M^4$ с метрикой $g_{ij}$, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ на многообразии порождает гладкую аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение

$$T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; x^1, x^2, x^3, x^4\}$$

к гладкому многообразию $M^4$, где $z = (z_4, z_3, z_2, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, 4$, где точкой обозначена производная по натуральному параметру, то уравнения геодезических линий на нем примут вид

$$\begin{gathered}\ddot{x}^i + \Gamma^i_{11}(x)(\dot{x}^1)^2 + 2\Gamma^i_{12}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^2) + 2\Gamma^i_{13}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^3) + 2\Gamma^i_{14}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^4) + \\ + \Gamma^i_{22}(x)(\dot{x}^2)^2 + 2\Gamma^i_{23}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^3) + 2\Gamma^i_{24}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^4) + \Gamma^i_{33}(x)(\dot{x}^3)^2 + \\ + 2\Gamma^i_{34}(x)(\dot{x}^3)(\dot{x}^4) + \Gamma^i_{44}(x)(\dot{x}^4)^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

**1.2. Специальные обозначения.** Обозначим для наглядности в случае четырехмерного многообразия координаты $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ через $(\alpha, \beta)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Тогда уравнения (1.1.1) на касательном расслоении $T_*M^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + \\ \qquad + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^\alpha_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^\alpha_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \\ \qquad + 2\Gamma^\alpha_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \Gamma^1_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^1_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + \\ \qquad + \Gamma^1_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^1_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^1_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \\ \qquad + 2\Gamma^1_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \Gamma^2_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^2_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + \\ \qquad + \Gamma^2_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \Gamma^2_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \\ \qquad + 2\Gamma^2_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + \Gamma^3_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^3_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^3_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + \\ \qquad + \Gamma^3_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^3_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \Gamma^3_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \\ \qquad + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^3_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

**Пример 1.** В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства, уравнения (1.2.1) примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2\beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2\beta_1 \sin^2\beta_2] \sin\alpha\cos\alpha = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2\beta_2)\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 \dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} = 0, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

т.е. 12 ненулевых коэффициентов связности равны

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha, & \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1, & \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2,\\
\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, & \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin^2\beta_2\sin\beta_1\cos\beta_1,\\
\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2,\\
\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}.
\end{array}
$$

**Пример 2.** В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, но когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. [6, 41–43]), уравнения (1.2.1) примут вид

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2\right]\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0,\\
\ddot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - (\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2)\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,\\
\ddot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dot\beta_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0,\\
\ddot\beta_3 + \dot\alpha\dot\beta_3\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_3\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot\beta_2\dot\beta_3\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} = 0,
\end{cases}
\tag{1.2.3}
$$

т.е. 12 ненулевых коэффициентов связности равны

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, & \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1, & \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta) = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2,\\
\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \dfrac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, & \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, & \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin^2\beta_2\sin\beta_1\cos\beta_1,\\
\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \dfrac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, & \Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2,\\
\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \dfrac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, & \Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}.
\end{array}
$$

### 1.3. Замены координат касательного пространства.

Исследуем структуру уравнений (1.1.1) при изменении координат на касательном расслоении $T_*M^4$. Рассмотрим обратимую замену координат касательного пространства, зависящую от точки $x$ многообразия:

$$
\dot x^i = \sum_{j=1}^{4} R^{ij}(x) z_j; \quad z_j = \sum_{i=1}^{4} T_{ji}(x)\dot x^i, \tag{1.3.1}
$$

при этом $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, \ldots, 4,$ — функции от $x^1, \ldots, x^4$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (1.3.1) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении $T_*M^4$ (ср. [8, 9, 11]). Справедливы тождества

$$
\dot z_j = \sum_{i=1}^{4} \dot T_{ji}\dot x^i + \sum_{i=1}^{4} T_{ji}\ddot x^i, \quad \dot T_{ji} = \sum_{k=1}^{4} T_{ji,k}\dot x^k, \tag{1.3.2}
$$

где

$$
T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \ldots, 4.
$$

Подставляя в (1.3.2) уравнения (1.1.1), имеем

$$
\dot z_i = \sum_{j,k=1}^{4} T_{ij,k}\dot x^j \dot x^k - \sum_{j,p,q=1}^{4} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot x^p \dot x^q; \tag{1.3.3}
$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, 4$, нужно подставить формулы (1.3.1), и правые части соотношений (1.3.3) будут квадратичными формами по $z_1, \ldots, z_4$ (см. также [3, 10, 15, 16]). Другими словами, равенство (1.3.3) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{4} Q_{ijk} \dot{x}^j \dot{x}^k \big|_{(1.3.1)} = 0, \quad \text{где} \quad Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{4} T_{is}(x) \Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{1.3.4}$$

Непосредственно из формул (1.3.3) вытекает следующее утверждение.

**Предложение 1.1.** *Система* (1.1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.3.1), (1.3.3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.1.1) к эквивалентной системе уравнений (1.3.1), (1.3.3) зависит как от замены переменных (1.3.1) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$. В частности, для примеров 1, 2 получаем в явном виде следующие утверждения.

**Следствие 1.1.** *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства* (*см. также пример* 1), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.2.2), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_4, \qquad \dot{z}_4 = -\dfrac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{\cos\alpha\sin\alpha}, \\ \dot{z}_3 = \dfrac{z_3 z_4}{\cos\alpha\sin\alpha} + \dfrac{z_1^2 + z_2^2}{\cos\alpha\sin\alpha}, \\ \dot{z}_2 = \dfrac{z_2 z_4}{\cos\alpha\sin\alpha} - \dfrac{z_2 z_3}{\cos\alpha\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dfrac{z_1^2}{\cos\alpha\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \dot{z}_1 = \dfrac{z_1 z_4}{\cos\alpha\sin\alpha} - \dfrac{z_1 z_3}{\cos\alpha\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \dfrac{z_1 z_2}{\cos\alpha\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \dot{\beta}_1 = \dfrac{z_3}{\cos\alpha\sin\alpha}, \qquad \dot{\beta}_2 = -\dfrac{z_2}{\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \dot{\beta}_3 = \dfrac{z_1}{\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

*если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы* (1.3.5) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

**Следствие 1.2.** *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *но когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [21, 36, 38, 39], *а также пример* 2), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.2.3), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_4, \qquad \dot{z}_4 = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{z}_3 = z_3 z_4 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_4 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_4 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \dot{\beta}_1 = z_3 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \dot{\beta}_2 = -z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \dot{\beta}_3 = z_1 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{cases} \tag{1.3.6}$$

*если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы* (1.3.6) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Очевидно, что системы (1.3.5) и (1.3.6) имеют аналитический первый интеграл следующего вида:

$$z_1^2 + \ldots + z_4^2 = \mathrm{const}, \tag{1.3.7}$$

т.е. в других координатах для системы (1.3.5) — аналитический первый интеграл

$$\dot\alpha^2 + \dot\beta_1^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \dot\beta_2^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 = \mathrm{const},$$

а для системы (1.3.6) —

$$\dot\alpha^2 + \dot\beta_1^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dot\beta_2^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 = \mathrm{const}.$$

**1.4. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай I.** Рассмотрим кинематические соотношения следующего вида (случай I):

$$\dot\alpha = -z_4, \quad \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{1.4.1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1, \ldots, z_4$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (см. [45, 48, 49, 51]):

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0; \end{cases} \tag{1.4.2}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (1.4.1) уравнения (1.3.3) примут вид

$$\begin{cases} \dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad - f_2(\alpha) g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_4 = f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{cases} \tag{1.4.3}$$

и уравнения геодезических (1.4.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.4.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.4.1), (1.4.3) на многообразии $T_* M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (1.4.1)–(1.4.3) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

**Следствие 1.3.** *Если $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.4.2), *может быть приведена к следующему виду*:

$$
\begin{cases}
\dot{\alpha} = -z_4,\\
\dot{z}_4 = f_1^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot{z}_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot{z}_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot{z}_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 -\\
\qquad - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2,\\
\dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \qquad \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases}
\tag{1.4.4}
$$

$$
\dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2). \tag{1.4.5}
$$

*Если при этом аффинная связность* $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ *при всех* $i$, $j$, $k$ *не зависит от угла* $\beta_3$, *то происходит отделение независимой подсистемы седьмого порядка* (1.4.4).

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям $z_1,\ldots,z_4$ первого интеграла более общего вида, нежели (1.3.7), а именно,

$$
\sum_{i,j=1; i\leqslant j}^{4} a_{ij}(\alpha,\beta) z_i z_j = \mathrm{const}, \tag{1.4.6}
$$

не требуя даже положительной определенности матрицы $(a_{ij}(\alpha,\beta))$, но мы пока ограничимся следующим случаем (см. также [44, 46, 51, 52]).

**Предложение 1.2.** *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7a}
$$

$$
2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7b}
$$

$$
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7c}
$$

$$
2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7d}
$$

$$
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7e}
$$

$$
f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7f}
$$

*то система* (1.4.4), (1.4.5) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида:*

$$
\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{1.4.8}
$$

*Доказательство.* Действительно, дифференцирование функции (1.4.8) в силу системы (1.4.4), (1.4.5) дает

$$
\begin{aligned}
2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right] z_3^2 z_4 + \\
+ 2\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right] z_2^2 z_4 + \\
+ 2\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\right] z_1^2 z_4 - \\
- 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right] \frac{z_2^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\
- 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\right] \frac{z_1^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\
- 2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\right] \frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)} \equiv 0,
\end{aligned}
$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.4.7). □

Согласно предложению 1.2 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.2.2) и (1.2.3) из примеров 1 и 2, соответственно, и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.4.8).

**Следствие 1.4.** *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства* (*см. также пример* 1), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.2.2) *и имеющая первый интеграл вида* (1.4.8), *примет следующий вид*:

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = -z_4, \qquad \dot z_4 = -(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \\
\dot z_3 = z_3 z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + (z_1^2+z_2^2)\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \\
\dot z_2 = z_2 z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_2 z_3\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}} - \\
\qquad -z_1^2\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \\
\dot z_1 = z_1 z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_1 z_3\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}} + \\
\qquad +z_1 z_2\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \\
\dot\beta_1 = z_3\dfrac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \qquad \dot\beta_2 = -z_2\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \\
\dot\beta_3 = z_1\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R},
\end{cases}
\tag{1.4.9}
$$

*если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы* (1.4.9) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

**Следствие 1.5.** *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *но когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [55,56,58], *а также пример* 2), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.2.3) *и имеющая первый интеграл вида* (1.4.8), *примет следующий вид*:

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = -z_4, \qquad \dot z_4 = -(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},\\
\dot z_3 = z_3z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + (z_1^2+z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot z_2 = z_2z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_2z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}-\\
\qquad -z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot z_1 = z_1z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_1z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}+\\
\qquad +z_1z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot\beta_1 = z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \qquad \dot\beta_2 = -z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot\beta_3 = z_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R},
\end{cases}
\tag{1.4.10}
$$

*если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы* (1.4.10) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Системы (1.3.5) и (1.3.6) получаются из систем (1.4.9) и (1.4.10) при $\nu_1 = -1$ и $\nu_1 = 0$ соответственно.

Важно заметить, что, на первый взгляд, при интегрировании системы равенств (1.4.7) должны получиться шесть произвольных постоянных, определяющие шестипараметрические семейства искомых систем вида (1.4.9) и (1.4.10). Но, оказывается, система равенств (1.4.7) определяет не более чем шестипараметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь однопараметрические искомые семейства.

Система равенств (1.4.7) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.4.8) (или см. (2.2.1) в части 2) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [20, 26, 27]). Как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ системы равенств (1.4.7) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.4.8) для системы (1.4.4), (1.4.5) уравнений геодезических. Далее будет показано, что данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.4.7) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.4.4), (1.4.5) выполнение условия

$$
f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = f(\alpha); \tag{1.4.11}
$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из системы равенств (1.4.7):

$$
\begin{cases}
2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0,\\
2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0,\\
g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0.
\end{cases}
\tag{1.4.12}
$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности; ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

**Предложение 1.3.** *Если выполнены свойства* (1.4.11), (1.4.12) *и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)=\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{1.4.13}$$

*то система* (1.4.4), (1.4.5) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_3,z_2,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}\,\Phi_0(\alpha)=C_2=\text{const},\quad \Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \tag{1.4.14}$$

*Доказательство.* Дифференцирование функции (1.4.14) в силу системы (1.4.4), (1.4.5) при условиях (1.4.11)—(1.4.13) дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha). \qquad \square$$

**Предложение 1.4.** *Если выполнены условия предложения* 1.3 *и справедливы равенства*

$$g_1(\beta_1)\equiv g_2(\beta_2)=g(\beta_1), \tag{1.4.15}$$

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{1.4.16}$$

*то система* (1.4.4), (1.4.5) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+z_2^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\text{const},\quad \Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \tag{1.4.17}$$

*Доказательство.* Дифференцирование функции (1.4.17) в силу системы (1.4.4), (1.4.5) при условиях (1.4.15), (1.4.16), а также в условиях предложения 1.3 дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_3f(\alpha)\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1). \qquad \square$$

**Предложение 1.5.** *Если выполнены условия предложений* 1.3, 1.4 *и справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)=\Gamma_3(\beta_2), \tag{1.4.18}$$

*то система* (1.4.4), (1.4.5) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)=C_4=\text{const},\quad \Psi_2(\beta_2)=h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}. \tag{1.4.19}$$

*Доказательство.* Дифференцирование функции (1.4.19) в силу системы (1.4.4), (1.4.5) при рассматриваемых условиях дает

$$
\begin{gathered}
z_1 z_4 \Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+\\
+z_1 z_3 f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\\
+z_1 z_2 f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)+\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].
\end{gathered}
$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$
\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),
$$

$$
\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),\quad \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}=\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2). \qquad \square
$$

**Замечание 1.1.** Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.4.7), а также условия (1.4.13), (1.4.16), (1.4.18), то выполнены равенства

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{11}(\alpha), & \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1), & \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1),\\
\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2), & \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2), & \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),
\end{array}
$$

а значит, в системе (1.4.4), (1.4.5) появляется независимая подсистема седьмого порядка, состоящая из первых семи уравнений (уравнение на $\dot\beta_3$ отделяется):

$$
\begin{cases}
\dot\alpha=-z_4,\\
\dot z_4=f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_3^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_3=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\\
\qquad-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_2=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3-\\
\qquad-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_1=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3-\\
\qquad-f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2,\\
\dot\beta_1=z_3f_1(\alpha),\qquad \dot\beta_2=z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases}
\tag{1.4.20}
$$

$$
\dot\beta_3=z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \tag{1.4.21}
$$

**Предложение 1.6.** *Если выполнены условия предложений* 1.3—1.5, *то система* (1.4.20), (1.4.21) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$
\Phi_5(\beta_2,\beta_3)=\beta_3\pm\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b)-C_4^2}}db=C_5=\mathrm{const}, \tag{1.4.22}
$$

*где после взятия интеграла* (1.4.22) *вместо постоянных* $C_3$, $C_4$ *можно формально подставить левые части равенств* (1.4.17), (1.4.19) *соответственно.*

*Схема доказательства.* Если выполнены условия предложений 1.3—1.5, то система (1.4.20), (1.4.21) обладает тремя первыми интегралами (1.4.14), (1.4.17) и (1.4.19). Нам понадобятся лишь два последних из них. На уровнях $C_3$ и $C_4$ первых интегралов (1.4.17) и (1.4.19), соответственно, справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \tag{1.4.23}$$

Угол $\beta_3$ будем искать из уравнения $\dfrac{d\beta_3}{d\beta_2} = \dfrac{z_1}{z_2}h(\beta_2)$, полученного из системы (1.4.20), (1.4.21). Используя в этом уравнении равенство (1.4.23), получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2–1.6 является следующая теорема.

**Теорема 1.1.** *Если выполнены условия предложений* 1.2–1.5, *то система* (1.4.20), (1.4.21) *обладает полным набором, состоящим из пяти независимых первых интегралов вида* (1.4.8), (1.4.14), (1.4.17), (1.4.19), (1.4.22).

Тот факт, что полный набор состоит из *пяти*, а не из семи первых интегралов, будет доказан ниже.

**1.5. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай II.** Теперь рассмотрим кинематические соотношения в следующем виде (случай II):

$$\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha), \quad \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{1.5.1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1, \ldots, z_4$ в касательном пространстве вводятся, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (см. [60, 62, 64]):

$$\begin{cases}
\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0,
\end{cases} \tag{1.5.2}$$

а остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1.5.1) уравнения (1.3.3) примут вид

$$\begin{cases}
\dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 -\\
\qquad - f_2(\alpha) g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2,\\
\dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2,\\
\dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2,\\
\dot z_4 = -f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2,
\end{cases} \tag{1.5.3}$$

и уравнения геодезических (1.5.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.5.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.5.1), (1.5.3) на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (1.5.1), (1.5.3) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

**Следствие 1.6.** *Если $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.5.2), *может быть приведена к следующему виду*:

$$\begin{cases}\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha),\\ \dot z_4 = -f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 -\\ \qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 -\\ \qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 -\\ \qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 -\\ \qquad - f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2,\\ \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1),\end{cases} \tag{1.5.4}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2). \tag{1.5.5}$$

*Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех $i$, $j$, $k$ не зависит от угла $\beta_3$, то происходит отделение независимой подсистемы седьмого порядка* (1.5.4).

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям $z_1, \dots, z_4$ первого интеграла более общего вида (1.4.6), нежели (1.3.7), для рассматриваемой системы, но мы пока ограничимся следующим случаем.

**Предложение 1.7.** *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.5.6a}$$

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.5.6b}$$

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.5.6c}$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.5.6d}$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{1.5.6e}$$

$$f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{1.5.6f}$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0, \tag{1.5.6g}$$

*то система* (1.5.4), (1.5.5) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4,z_3,z_2,z_1)=z_1^2+\ldots+z_4^2=C_1^2=\mathrm{const}. \tag{1.5.7}$$

*Доказательство.* Дифференцирование функции (1.5.7) в силу системы (1.5.4), (1.5.5) дает

$$\begin{gathered}
-2f_4(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_4^3-\\
-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha1}^1(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\right]\frac{z_3^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha2}^2(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha3}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_1(\alpha)}-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_1(\alpha)}-\\
-2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)}\equiv 0,
\end{gathered}$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.5.6). ☐

**Пример 3.** Уравнения (1.2.1) геодезических в четырехмерном пространстве Лобачевского (с координатами $x=\beta_1$, $y=\beta_2$, $z=\beta_3$, $w=\alpha$) примут вид

$$\ddot\alpha-\frac{1}{\alpha}(\dot\alpha^2-\dot\beta_1^2-\dot\beta_2^2-\dot\beta_3^2)=0,\quad \ddot\beta_1-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_1=0,\quad \ddot\beta_2-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_2=0,\quad \ddot\beta_3-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_3=0, \tag{1.5.8}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности равны

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha},\ \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)=\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)=\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha},\ \Gamma_{\alpha1}^1(\alpha,\beta)=\Gamma_{\alpha2}^2(\alpha,\beta)=\Gamma_{\alpha3}^3(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha}.$$

Согласно предложению 1.7 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.5.8) из примера 3 и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.5.7).

**Следствие 1.7.** *В случае геодезических в четырехмерном пространстве Лобачевского* (*с координатами* $x=\beta_1$, $y=\beta_2$, $z=\beta_3$, $w=\alpha$; *см. также пример* 3) *четырехпараметрическая система, эквивалентная при* $\nu_1,\nu_3\neq 0$, $\alpha\neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.5.8), *и имеющая первый интеграл вида* (1.5.7), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases}
\dot\alpha=z_4\nu_1\alpha, \qquad \dot z_4=-z_3^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}-z_2^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3}-z_1^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_4},\\
\dot z_3=z_3z_4\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2},\qquad \dot z_2=z_2z_4\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3},\qquad \dot z_1=z_1z_4\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_4},\\
\dot\beta_1=z_3\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}},\qquad \dot\beta_2=z_2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_3}},\qquad \dot\beta_3=z_1\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_4}},\qquad \nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\in\mathbb{R},
\end{cases} \tag{1.5.9}$$

*если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы* (1.5.9) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Важно заметить, что, на первый взгляд, при интегрировании системы равенств (1.5.6) должны получиться семь произвольных постоянных, определяющие семипараметрические семейства искомых систем вида (1.5.9). Оказывается, система равенств (1.5.6) определяет не более чем семипараметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь четырехпараметрические искомые семейства.

Систему равенств (1.5.6) по-прежнему можно трактовать как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.5.7) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [5, 20, 26, 27]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

По-прежнему актуально следующее замечание. Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ системы дифференциальных равенств (1.5.6) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.5.7) для системы (1.5.4), (1.5.5) уравнений геодезических. Далее будет показано, что данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Для систем с диссипацией условия (1.5.6) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.5.4), (1.5.5) выполнение условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha); \tag{1.5.10}$$

при этом функции $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять, вообще говоря, преобразованным уравнениям из системы равенств (1.5.6):

$$\begin{cases} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0. \end{cases} \tag{1.5.11}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_4(\alpha)$ будут приведены ниже.

**Предложение 1.8.** *Если выполнены свойства* (1.5.10), (1.5.11) *и справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.5.12}$$

*то система* (1.5.4), (1.5.5) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\, \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad \Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\}. \tag{1.5.13}$$

*Доказательство.* Дифференцирование функции (1.5.13) в силу системы (1.5.4), (1.5.5) при условиях (1.5.10)–(1.5.12) дает

$$-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_4\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha). \qquad \square$$

**Предложение 1.9.** *Если выполнены условия предложения* 1.8, *а также справедливы равенства*

$$g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_2) = g(\beta_1), \tag{1.5.14}$$

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.5.15}$$

*то система* (1.5.4), (1.5.5) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \quad \Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \tag{1.5.16}$$

*Доказательство.* Дифференцирование функции (1.5.16) в силу системы (1.5.4), (1.5.5) при условиях (1.5.14), (1.5.15), а также в условиях предложения 1.8 дает

$$-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_3f(\alpha)\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1). \qquad \square$$

**Предложение 1.10.** *Если выполнены условия предложений* 1.8, 1.9 *и справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{1.5.17}$$

*то система* (1.5.4), (1.5.5) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}, \quad \Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}. \tag{1.5.18}$$

*Доказательство.* Дифференцирование функции (1.5.18) в силу системы (1.5.4), (1.5.5) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_4(\alpha)z_1z_4\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+z_1z_3f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+$$
$$+z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)+\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1), \quad \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} = \left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2). \qquad \square$$

**Замечание 1.2.** Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.5.6), а также условия (1.5.12), (1.5.15), (1.5.17), то выполнены равенства

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha), \qquad \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1), \qquad \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta_1),$$
$$\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2), \qquad \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2), \qquad \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2).$$

Следовательно, в системе (1.5.4), (1.5.5) появляется независимая подсистема седьмого порядка, состоящая из первых семи уравнений (уравнение на $\dot\beta_3$ отделяется):

$$\begin{cases}
\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha),\\
\dot z_4 = -\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha)z_3^2-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3-\\
\qquad -f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2,\\
\dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases} \tag{1.5.19}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \tag{1.5.20}$$

**Предложение 1.11.** *Если выполнены условия предложений* 1.8—1.10, *то система* (1.5.19), (1.5.20) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(\beta_2,\beta_3)=\beta_3\pm\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b)-C_4^2}}db=C_5=\mathrm{const}, \tag{1.5.21}$$

*где после взятия интеграла* (1.5.21) *вместо постоянных* $C_3$, $C_4$ *можно формально подставить левые части равенств* (1.5.16), (1.5.18) *соответственно.*

*Схема доказательства.* Если выполнены условия предложений 1.8—1.10, то система (1.5.19), (1.5.20) обладает тремя первыми интегралами (1.5.13), (1.5.16) и (1.5.18). Нам понадобятся лишь два последних из них. На уровнях $C_3$ и $C_4$ первых интегралов (1.5.16) и (1.5.18) соответственно справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2}=\mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2)-C_4^2}}. \tag{1.5.22}$$

Угол $\beta_3$ будем искать из уравнения $\dfrac{d\beta_3}{d\beta_2}=\dfrac{z_1}{z_2}h(\beta_2)$, полученного из системы (1.5.19), (1.5.20). Используя в этом уравнении равенство (1.5.22), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2–1.6 является следующая теорема.

**Теорема 1.2.** *Если выполнены условия предложений* 1.2–1.5, *то система* (1.5.19), (1.5.20) *обладает полным набором, состоящим из пяти независимых первых интегралов вида* (1.5.7), (1.5.13), (1.5.16), (1.5.18), (1.5.21).

Тот факт, что полный набор состоит из *пяти*, а не семи первых интегралов, будет доказан ниже.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с $n$ эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
3. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики $n$-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.

26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1.* — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4.* — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.

51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
70. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
71. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
72. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`