ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 96–105
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-96-105

УДК 517, 531.01

НЕКОТОРЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

SOME TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLES OF THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we present tensor invariants (differential forms) for homogeneous dynamical systems on the tangent bundles of smooth three-dimensional manifolds and demonstrate the connection between the presence of these invariants and the existence of a complete set of first integrals, which is necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

1. Введение. Известно [14, 15, 60], что наличие достаточного количества не только первых интегралов, но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт достаточно естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими (асимптотическими) предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [25, 55, 57].

Как показано ранее, задача о движении четырехмерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, т. е. в «потоке набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее четырехмерное пространство», приводит к системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [36, 38, 39]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В дальнейшем также разобраны задачи о движении точки по трехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [55–57].

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные (см. также [25, 55, 56]).

2. Инварианты систем уравнений геодезических. Рассмотрим гладкое трехмерное риманово многообразие $M^3\{\alpha,\beta\}$ с координатами (α,β), $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, с аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ (ср. с [13, 57, 58]). Для этого изучим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha),\quad \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \tag{1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических [37, 57, 59], например, с семью ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на трехмерных поверхностях вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

т. е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1) соотношения на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примут вид

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2,\\ \dot z_2 &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,\\ \dot z_3 &= -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{aligned} \tag{3}$$

и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3) на многообразии $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ с новыми координатами z_1, z_2, z_3 на касательном пространстве.

Для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать, вообще говоря, четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [51, 52, 54]).

То, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти, тензорных инвариантов, будет показано ниже.

В [36, 41] рассмотрены примеры систем геодезических на трехмерной сфере с различными метриками, а в [57] — примеры систем геодезических на трехмерных поверхностях вращения и в пространстве Лобачевского.

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{4}$$

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha), \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \end{cases} \tag{6}$$

то система (1), (3) *обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{7}$$

$$\Phi_2(z_2,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \quad \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \tag{8}$$

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1) = z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \quad \Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \tag{9}$$

$$\Phi_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}db = C_4 = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_3(\alpha)\frac{d}{d\tau} \tag{11}$$

и фазовых переменных z_k, $k = 1, 2$, *фазовый поток системы* (1), (3) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^3, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма.*

Система равенств (6) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (13)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [1–3, 11]). Ну а поиск как интеграла (7), так и (8)—(10) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [12, 57, 62].

3. Инварианты потенциальных систем. Несколько модифицируем систему (1), (3), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле в проекциях на оси $\dot z_k$, $k = 1, 2, 3$, соответственно:

$$\tilde F(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) \\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_3(\alpha)f_3(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha),\\
\dot z_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 -\\
\qquad -\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot z_2 = F_2(\beta_1)f_1(\alpha) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot z_1 = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 -\\
\quad -f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2,\\
\dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1),
\end{cases}
\tag{12}
$$

и она почти всюду эквивалентна системе

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha - F_3(\alpha)f_3^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\
\ddot\beta_1 - F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\
\ddot\beta_2 - F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0
\end{cases}
$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (4)–(6), *то система* (12) *обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида*

$$
\Phi_1(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{13}
$$

$$
V(\alpha,\beta) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)da - 2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b)db - 2\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b)db,
$$

а также при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$ — *первых интегралов* (8)–(10).

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной вида (11) *и фазовых переменных* z_k, $k = 1,2$, *фазовый поток системы* (12) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^3, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма.*

4. Инварианты систем со знакопеременной диссипацией. Далее несколько модифицируем систему (12), вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (14) (в отличие от системы (12)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_k$, $k = 1,2,3$, соответственно:

$$
\tilde F(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)\\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha)\\ F_3(\alpha)f_3(\alpha)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1F_1^1(\alpha)\\ z_2F_2^1(\alpha)\\ z_3F_3^1(\alpha)\end{pmatrix}.
$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 - \\ \qquad -\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\beta_1) f_1(\alpha) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad -\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = F_1(\beta_2) f_2(\alpha) g(\beta_1) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad -f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f_1(\alpha), \qquad \dot{\beta}_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{14}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\alpha} - \\ \qquad -F_3(\beta_1) f_3^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_3^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \\ \qquad +\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - \left\{ F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\beta}_1 - \\ \qquad -F_2(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\beta}_2 - \\ \qquad -F_1(\beta_2) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0, \end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Здесь, как и выше, $\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

Будем интегрировать систему шестого порядка (14) при выполнении свойств (4)—(6), а также при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$. При этом происходит отделение независимой подсистемы пятого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad -f(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f(\alpha), \end{cases} \tag{15}$$

при наличии также шестого уравнения

$$\dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \tag{16}$$

Примем также следующие условия на диссипативное силовое поле. Будем предполагать, что выполнены равенства

$$F_1^1(\alpha) \equiv F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{17}$$

Для полного интегрирования системы (15), (16) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \tag{18}$$

система (15), (16) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z} = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) z z_3 + z F^1(\alpha), \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = \pm z\sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \dfrac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{20}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{21}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (19)—(21) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (19), один — системы (20) (после соответствующей замены независимого переменного в ней), и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (21) (т. е. всего *четыре*).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{22}$$

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)},$$

а для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} F_3(\alpha) &= \lambda_3^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_3^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha); \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_3(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{23}$$

Условие (22) назовем «геометрическим», а условия из группы (23) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda^1$, в силу (17).

Условие (22) названо геометрическим, в том числе, потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности Γ_3, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (23) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду также относительно функции $\Delta(\alpha)$ (см. также [46, 47, 49, 51]).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (22) *и* (23). *Тогда система* (19)–(21) *обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами* (см. [10, 24, 26]).

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [10,50]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = G_1\left(\frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ = \frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2 + z^2) + (b - \lambda^1)z_3\delta(\alpha)f_3(\alpha) - \lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)f_3(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \quad (24)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (19) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \quad (25)$$

Первый интеграл для системы (20) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const}; \quad (26)$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (9).

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (21), находится по аналогии с (10):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \mathrm{const}, \quad (27)$$

где после взятия интеграла (27) вместо постоянных C_2, C_3 можно подставить левые части первых интегралов (8), (9) соответственно.

Выражение функций (24), (25) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ дополнительный первый интеграл системы (19) найдется из дифференциального соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_3)du_3}{U_2(C_1, u_3)}, \quad u_3 = \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \quad u = \frac{z}{\Delta(\alpha)},$$

$$U_1(u_3) = u_3^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0, \quad U_2(C_1, u_3) = 2U_1(u_3) - \frac{C_1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_3)}\right\}, \quad C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. *Если для систем вида* (19)–(21) *выполняются геометрическое и энергетические свойства* (22), (23), *то у нее также существуют следующие четыре функционально независимые инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами, зависимые с первыми интегралами* (24)–(27) (ср. [31, 32, 34, 35]):

$$\rho_1(z_3, z; \alpha)dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha, \qquad \rho_2(z_3, z; \alpha)dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha,$$

$$\rho_3(z_*; \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_*^2}}dz_* \wedge d\beta_1, \quad \rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2)dz_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

(*форма* $\rho_3(z_*; \beta_1)$ — *после замены независимого переменного в системе* (20)), *где*

$$\rho_1(z_3, z; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \cdot \frac{u_3^2 + u^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0}{u};$$

$$\rho_2(z_3, z; \alpha) = \Delta(\alpha)\exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \cdot \exp\left\{-\int \frac{(b + u_3)du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\};$$

$$\rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2).$$

Для полной интегрируемости системы (19)—(21) можно использовать или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством четыре (ср. с [33, 36, 40]).

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [23, 27, 57]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле комплексного анализа — наличия существенно особых точек после продолжения функций) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [10, 24, 29, 30].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [23, 28, 42, 43], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к трехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении трехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. также [21–23]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
13. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
14. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
15. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
16. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
17. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В. В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.

23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209-–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
28. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479—481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.

49. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
60. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
61. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
62. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`