ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 117–135
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-117-135

УДК 517.977.52

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАТНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ

© 2022 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. Изучены вопросы слабо обобщенной разрешимости нелинейной обратной задачи в нелинейном оптимальном управлении тепловыми процессами для одного типа параболического дифференциального уравнения с нелинейными отклонениями. Сформулированы необходимые условия оптимальности нелинейного управления. Получены формулы для приближенного вычисления функции состояния управляемого процесса, функции восстановления и функции оптимального управления.

Ключевые слова: нелинейная обратная задача, нелинейное отклонение, необходимые условия оптимальности управления, нелинейность управления, минимизация функционала.

OPTIMAL CONTROL OF INVERSE THERMAL PROCESSES IN A PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR DEVIATIONS IN TIME

© 2022 **T. K. YULDASHEV**

Abstract. In this paper, we examine the weakly generalized solvability of a nonlinear inverse problem in the nonlinear optimal control of thermal processes for one type of parabolic differential equation with nonlinear deviations. We formulate necessary optimality conditions for nonlinear control and obtain formulas for approximate calculating the state functions of the controlled process, the restoration function, and the optimal control function.

Keywords and phrases: nonlinear inverse problem, nonlinear deviation, necessary conditions for optimality of control, nonlinearity of control, minimization of the functional.

AMS Subject Classification: 35B50, 35D30, 35K61, 35Q93, 35R30

1. Постановка задачи. Решение некоторых задач математического моделирования тепловых процессов приводит к рассмотрению нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа. Одним из классов качественно новых задач для дифференциальных уравнений являются нелокальные обратные задачи. Нелокальные задачи, содержащие интегральные условия, встречаются при математическом моделировании явлений различной природы, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить некоторые задачи диффузии частиц в турбулентной плазме и распространения тепла. Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами широко применяется при решении задач аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т. д. (см. [2–11]). Эффективно используются различные аналитические и приближенные методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами (см., например, [12–17, 23–26]). В данной работе рассматриваются вопросы обобщенного и приближенного решения нелинейной обратной задачи оптимального управления процессом распространения тепла по стержню конечной длины для одного типа параболического дифференциального уравнения с нелинейным отклонением при смешанных и нелокальном условиях и с квадратичным критерием оптимальности. Решаются прямая смешанная и обратная нелокальная нелинейная задачи для параболического уравнения. Формулируются необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума, вычисляется управляющая функция.

Рассмотрим следующее параболическое уравнение и управления процессом распространения тепла по стержню конечной длины:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = \eta_1(t)\beta(t,x) + \eta_2(t)U(t,x) + \\ + f(t,x,U(\tau(t,x,U(t,x),x),\beta(t,x),p(t)), \quad (t,x)\in\Omega, \tag{1}$$

при начальном условии

$$U(t,x) = \varphi(t,x), \quad t\in(-\infty,0)\cup(T,\infty), \quad U(0,x)=\varphi(x), \quad x\in\Omega_l \tag{2}$$

и при граничных условиях Бенара

$$U(t,0) = U(t,l) = 0, \quad t\in\Omega_T, \tag{3}$$

а также при дополнительном условии в интегральной форме

$$\int_0^T \Theta(t,s)U(s,x)ds = \psi(t,x), \tag{4}$$

где $f(t,x,U,\beta,p)\in C(\Omega\times R\times R\times\Upsilon)$ — функция внешнего источника, $\tau(t,x,U)\in C(\Omega\times R)$ — нелинейное отклонение, $\tau(t,x,U)\neq t$, $p(t)\in C(\Omega_T)$ — управляющая функция, $U(t,x)\in C(\Omega)$ — функция состояния управляемого процесса, $\varphi(t,x)$ — функция распределения тепла по стержню в начальный момент времени, $\varphi(0,x)=\varphi(x)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)\in C^2(\Omega_l)$, $\beta(t,x)\in C(\Omega)$ — функция восстановления, $\eta_i(t)\in C(\Omega_T)$, $i=1,2$, $\Theta(t,s)\in C(\Omega_T\times\Omega_T)$, $\psi(t,x)\in C(\Omega)$, $\Upsilon\equiv[0,M^*]$, $0<M^*<\infty$, $\Omega\equiv\Omega_T\times\Omega_l$, $\Omega_T\equiv[0,T]$, $\Omega_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$.

Дифференциальное уравнение (1) содержит тройку неизвестных функций:

$$\{U(t,x)\in C(\Omega),\ \beta(t,x)\in C(\Omega),\ p(t)\in C(\Omega_T)\}.$$

Для полного определения этой тройки недостаточно одних условий (2)–(4). Поэтому в работе рассматриваются вопросы минимизации квадратичного функционала качества. В отличие от [18], в работе исследуется параболическое уравнение, которое относительно функции состояния $U(t,x)$ и относительно функции восстановления $\beta(t,x)$ является нелинейным. Рассматривается нелокальная обратная задача нелинейного оптимального управления. Изучаются вопросы разрешимости функции состояния $U(t,x)$ и переопределения функции восстановления $\beta(t,x)$. Интегральная форма в условии (4) связана с тем, что часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования в обратной задаче либо принципиально недоступен для измерения, либо проведение такого измерения дорого. Тогда в качестве дополнительной информации для однозначного определения функции восстановления служит нелокальное условие в интегральной форме. В работе также формулируются необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума, и вычисляются функция управления и функция состояния. Данная работа является дальнейшим развитием работ [19, 22].

Методику данной работы также можно применять при решении других задач нелинейного оптимального управления, связанных с процессом теплопередачи, например в задачах управления металлургическими печами. При решении таких задач оптимального управления требуется исследование математических моделей управления процессами, позволяющими в режиме реального времени прогнозировать распределение температуры нагреваемых материалов в зависимости от изменения подаваемой мощности, времени нагрева тел, режимов нагрева и т. д.

Здесь, как и в [20, 21, 27], используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения нелокальной обратной задачи (1)–(4) в виде ряда Фурье

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)b_n(x), \tag{5}$$

где функции $b_n(x)$ определены как собственные функции спектральной задачи $b''(x)+\lambda^2 b(x)=0$, $b(0)=b(l)=0$, $0<\lambda$, и образуют полную систему ортонормированных функций $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega_l)$, а λ_n — соответствующие собственные значения. Предполагается, что заданные функции разлагаются в ряды Фурье

$$f(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(U,\beta,p)b_n(x),\quad \beta(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)b_n(x), \tag{6}$$

где

$$f_n(U,\beta,p)=\int_0^l f(t,y,U(\tau,x),\beta(t,y),p(t))b_n(y)dy,\quad \beta_n(t)=\int_0^l \beta(t,y)b_n(y)dy.$$

Задача 1. Найти функцию восстановления $\bar\beta(t,x)$, управляющую функцию

$$\bar p(t)\in\Big\{\bar p:\ |\bar p(t)|\leqslant M^*,\ t\in\Omega_T\Big\}$$

и соответствующую им функцию состояния $\bar u(t,x)$, которые доставляют минимум функционалу

$$J[p]=\int_0^l[U(T,y)-\xi(y)]^2dy+\alpha\int_0^T p^2(t)dt, \tag{7}$$

где $\xi(x)$ — заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\xi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n b_n(x),\quad \xi_n=\int_0^l\xi(y)b_n(y)dy,\quad \xi(0)=0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|<\infty,\quad 0<\alpha=\text{const}.$$

2. Обратная задача (1)–(4)**.** Будем использовать следующие функциональные пространства:

$$\bar C_U^{1,2}(\Omega)=\{U:U(t,x)\in C^{1,2}(\Omega),\ U(t,0)=U(t,l)=0\},$$
$$\bar C_\Phi^{1,2}(\Omega)=\{\Phi:\Phi(t,x)\in C^{1,2}(\Omega),\ \Phi(T,x)=0\}.$$

Замыкания этих пространств по норме

$$\|U\|_{\bar H(\Omega)}=\sqrt{\int_0^T\int_0^l|U(t,y)|^2dydt}<\infty$$

обозначаются соответственно через $\bar H_u(\Omega)$, $\bar H_\Phi(\Omega)$.

Определение 1. *Обобщенным решением* смешанной задачи (1)–(3) называется функция $U(t,x)\in\bar H_u(\Omega)$, удовлетворяющая для любого $\Phi(t,x)\in\bar H_\Phi(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\Big\{U(t,y)\Big[\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t}-\frac{\partial^2\Phi(t,y)}{\partial y^2}\Big]-\Big[\eta_1(t)\beta(t,y)+\eta_2(t)U(t,y)+$$
$$+f\Big(t,y,U\big(\tau(t,y,U(t,y),y)\big),\beta(t,y),p(t)\Big)\Big]\Phi(t,y)\Big\}dydt=\int_0^l\varphi\big[\Phi(t,y)\big]_{t=0}dy.$$

Рассматриваются также следующие банаховы пространства:

(i) пространство $B_2(T)$ с нормой

$$\|a(t)\|_{B_2(\Omega_T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{t\in\Omega_T}|a_n(t)|\right)^2};$$

(ii) координатное гильбертово пространство ℓ_2, с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|^2} < \infty;$$

(iii) пространство $L_2(\Omega_l)$ суммируемых с квадратом функций $\vartheta(x)$ в области Ω_l с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int_0^l |\vartheta(y)|^2 dy} < \infty.$$

Как и в [18], формальное решение смешанной задачи (1)–(3) при помощи определения обобщенного решения и рядов Фурье (5)–(6) представляется в виде ряда Фурье

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)\left\{\omega_n(t) + \int_0^t G_n(t,s)\left[\eta_1(s)\beta_n(s) + \eta_2(s)u_n(s) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau)b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(s)b_n(y), p(s)\right)b_n(y)dy\right] ds\right\}, \quad (8)$$

где

$$\tau = \tau\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)b_n(y)\right), \quad \omega_n(t) = \varphi_n G_n(t,0), \quad G_n(t,s) = \exp\{-\lambda_n^2(t-s)\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\varphi(x) \in L_2(\Omega_l)$, $\|f(t,x,U,\beta,p)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$. *Тогда для функции* (8) *справедливо включение* $U(t,x) \in \bar{H}(\Omega)$.

Доказательство. При фиксированных значениях функции восстановления и функции управления подставляем в интеграл

$$\Im = \int_0^T \int_0^l U^2(t,y)dydt$$

формулу (8):

$$\Im = \int_0^T \int_0^l \left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)\left[\omega_n(t) + \int_0^t G_n(t,s)\left(\eta_1(s)\beta_n(s) + \eta_2(s)u_n(s) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \int_0^l f(s,z,U(\tau(s,z,U(s,z),z),\beta(z),p(s))b_n(z)dz\right)ds\right]\right\}^2 dydt = \int_0^T \int_0^l \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)b_n(y)\right\}^2 dydt +$$
$$+ 2\int_0^T \int_0^l \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)b_n(y)\right\}\left[\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t G_n(t,s)\left(\eta_1(s)\beta_n(s) + \eta_2(s)u_n(s)\right)ds\right\} + \right.$$
$$\left. + \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t G_n(t,s)\int_0^l f(s,z,U(\tau(s,z,U(s,z),z),\beta(s,z),p(s))b_n(z)dzds\right\}\right] b_i(y)dydt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t G_n(t,s)\left[\eta_1(s)\beta_n(s)+\eta_2(s)u_n(s)+\int\limits_0^l f(\cdot)b_n(z)dz\right]dsb_n(y)\right\}^2dydt.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, неравенство Бесселя и учитывая, что собственные функции имеют вид

$$b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}.$$

получаем следующую оценку:

$$\Im\leqslant 2\int\limits_0^T\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n G_n(t,0)|\right]^2dt+\frac{4l}{\pi^2}\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\varphi_n G_n(t,0)\right|\times$$

$$\times\int\limits_0^t\left\{|\eta_1(s)|\left[\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(t,s)\beta_n(s)|\right]+|\eta_2(s)|\left[\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(t,s)u_n(s)|\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|G_n(t,s)\int\limits_0^l f(\cdot)b_n(y)dy\right|\right]\right\}dsdt+$$

$$+\left\{\int\limits_0^T\int\limits_0^t\left\{|\eta_1(s)|\left[\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(t,s)\beta_n(s)|\right]+|\eta_2(s)|\left[\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(t,s)u_n(s)|\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|G_n(t,s)\int\limits_0^l f(\cdot)b_n(y)dy\right|\right]\right\}dsdt\right\}^2\leqslant$$

$$\leqslant 2T[\chi_1\chi_2]^2+\frac{4l}{\pi^2}\chi_0\chi_1(\chi_2)^2\left[\chi_3\|\beta(t)\|_{B_2(T)}+\chi_4\|u(t)\|_{B_2(T)}+\int\limits_0^T\int\limits_0^t\|f(\cdot)\|_{L_2(\Omega_l)}dsdt\right]+$$

$$+(\chi_2)^2\left[\chi_3\|\beta(t)\|_{B_2(T)}+\chi_4\|u(t)\|_{B_2(T)}+\int\limits_0^T\int\limits_0^t\|f(\cdot)\|_{L_2(\Omega_l)}dsdt\right]^2<\infty,$$

где

$$\chi_0=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\leqslant 2,\quad \chi_1=\|\varphi\|_{\ell_2},\quad \chi_2=\|G(t,s)\|_{B_2(T)}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}}=\frac{l^2}{\pi^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}\leqslant\frac{\sqrt{2}l^2}{\pi^2},$$

$$\chi_{2+i}=\int\limits_0^T\int\limits_0^t|\eta_i(s)|dsdt,\quad i=1,2.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1. □

Теперь переходим к определению функции восстановления. Используем нелокальное условие (4). По условию задачи предполагается, что

$$\psi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)b_n(x),\quad\text{где}\quad\psi_n(t)=\int\limits_0^l\psi(t,y)b_n(y)dy.$$

В силу дополнительного условия (4) из формального интегрального представления решения (8) получаем

$$\psi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\left\{\int_0^T\Theta(t,s)\omega_n(s)ds+\int_0^T\Theta(t,s)\int_0^s G_n(s,\theta)\left[\eta_1(\theta)\beta_n(\theta)+\eta_2(\theta)u_n(\theta)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^l f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)b_n(y)dy\right]d\theta ds\right\},$$

где

$$\tau=\tau\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\theta)b_n(y)\right).$$

Отсюда имеем счетную систему нелинейных функционально-интегральных уравнений относительно коэффициента Фурье от функции переопределения:

$$\beta_n(t)=\Im_1(\beta_n,u_n)\equiv\gamma_{1n}(t)-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int_0^T\Theta(t,s)\int_0^s G_n(s,\theta)\left[\eta_2(\theta)u_n(\theta)+\right.$$

$$\left.+\int_0^l f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)b_n(y)dy\right]d\theta ds\Bigg\},\qquad(9)$$

где

$$\tau=\tau\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\theta)b_n(y)\right),$$

$$\gamma_{1n}(t)=\frac{1}{\gamma_{0n}}\left(\psi_n(t)-\int_0^T\Theta(t,s)\omega_n(s)ds\right),\quad \gamma_{0n}(t)=\int_0^T\Theta(t,s)\int_0^s G_n(s,\theta)\eta_1(\theta)d\theta ds\neq 0.$$

С другой стороны, из ряда Фурье (8) имеем счетную систему функционально-интегральных уравнений относительно коэффициента Фурье от основной неизвестной функции

$$u_n(t)=\Im_2(\beta_n,u_n)\equiv\omega_n(t)+\int_0^t G_n(t,s)\left[\eta_1(s)\beta_n(s)+\eta_2(s)u_n(s)+\right.$$

$$\left.+\int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right]ds,\qquad(10)$$

где

$$\tau=\tau\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(s)b_n(y)\right).$$

Теперь рассмотрим систему из двух счетных систем нелинейных уравнений (9) и (10).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если имеею место оценки*

$$\Big|f(t,x,u_1,\beta_1,p)-f(t,x,u_2,\beta_2,p)\Big|\leqslant M_{01}(t,x)\Big[|u_1-u_2|+|\beta_1-\beta_2|\Big],$$

$$\Big|\tau(t,x,u_1)-\tau(t,x,u_2)\Big|\leqslant M_{02}(t,x)|u_1-u_2|,$$

$$\rho=\max\Big\{\Delta_1+\Delta_3;\chi_2(\varepsilon_2+\sigma_1\varepsilon_0)+(\Delta_1+\Delta_3)(1+\Delta_2)\Big\}<1,$$

то при фиксированных значениях функции управления система (9), (10) *имеет единственную пару решений в пространстве* $B_2(T)$, *где*

$$\sigma_1 = \|\gamma_0^{-1}(t)\|_{B_2(T)}, \quad \varepsilon_0 = \max_t \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \int\limits_0^s |\eta_2(\theta)| d\theta ds, \quad \varepsilon_i = \max_t \int\limits_0^t |\eta_i(s)| ds, \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta_1 = \sigma_1 \chi_2 \max_t \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \int\limits_0^s \|M_{01}(\theta, x)\|_{L_2(\Omega_l)} d\theta ds, \quad \Delta_2 = \|f(t, x, u, \beta, p) M_{02}(t, x)\|_{L_2(\Omega_l)},$$

$$\Delta_3 = \chi_2 \left(\varepsilon_1 + \max_t \int\limits_0^t \|M_{01}(s, x)\|_{L_2(\Omega_l)} ds \right).$$

Доказательство. Итерационный процесс для систем (9) и (10) зададим следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_n^0(t) = \gamma_{1n}(t), & \beta_n^{k+1} = \Im_1(\beta_n^k(t), u_n^k(t)), \\ u_n^0(t) = \omega_n(t), & u_n^{k+1}(t) = \Im_1(\beta_n^k(t), u_n^k(t)), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

В силу условий теоремы, применяя неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя, из (11) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\|\beta^1(t) - \beta^0(t)\right\|_{B_2(T)} &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_{0n}(t)|} \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \int\limits_0^s G_n(s,\theta) \times \\ &\times \left| \eta_2(\theta) u_n^0(\theta) + \int\limits_0^l f\left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0(\theta) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0(\theta) b_n(y), p(\theta)\right) b_n(y) dy \right| d\theta ds \leqslant \\ &\leqslant \sigma_1 \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \int\limits_0^s \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s,\theta) |\eta_2(\theta) \omega_n(\theta)| d\theta ds + \\ &+ \sigma_1 \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \int\limits_0^s \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s,\theta) \left| \int\limits_0^l f(\cdot) b_n(y) dy \right| d\theta ds \leqslant \\ &\leqslant \sigma_1 \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \cdot \|G(t,s)\|_{B_2(T)} \|\omega(s)\|_{B_2(T)} \int\limits_0^s |\eta_2(\theta)| d\theta ds + \\ &+ \sigma_1 \|G(t,s)\|_{B_2(T)} \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \int\limits_0^s \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^l f(\cdot) b_n(y) dy \right]^2} d\theta ds \leqslant \\ &\leqslant \sigma_1 \varepsilon_0 \chi_1 \chi_2^2 + \sigma_1 \chi_2 \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \int\limits_0^s \|f(\theta, x, u^0, \beta^0, p)\|_{L_2(\Omega_l)} d\theta ds < \infty, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\sigma_1 = \|\gamma_0^{-1}(t)\|_{B_2(T)}, \quad \varepsilon_0 = \max_t \int\limits_0^T |\Theta(t,s)| \int\limits_0^s |\eta_2(\theta)| d\theta ds.$$

Далее,

$$\left\|u^1(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t G_n(t,s)\left[|\eta_1(s)|\cdot|\beta_n^0(s)|+|\eta_2(s)|\cdot|u_n^0(s)|+\right.$$

$$\left.+\left|\int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n^0(s)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^0(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right|\right]ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\max_t\int_0^t|\eta_1(s)|G_n(t,s)|\gamma_{1n}(s)|ds+\sum_{n=1}^{\infty}\max_t\int_0^t|\eta_2(s)|G_n(t,s)|\omega_n(s)|ds+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\max_t\int_0^t G_n(t,s)\left|\int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(s)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{1n}(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right|ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\chi_2\|\gamma_1(t)\|_{B_2(T)}+\varepsilon_2\chi_1\chi_2^2+\chi_2\max_t\int_0^t\|f(s,x,\omega,\gamma_1,p)\|_{L_2(\Omega_l)}ds<\infty, \quad (13)$$

где

$$\varepsilon_i=\max_t\int_0^t|\eta_i(s)|ds, \quad i=1,2.$$

Аналогично, применяя те же приемы, имеем оценку

$$\|\beta^{k+1}(t)-\beta^k(t)\|_{B_2(T)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\gamma_{0n}(t)|}\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s G_n(s,\theta)|\eta_2(\theta)|\cdot|u_n^k(\theta)-u_n^{k-1}(\theta)|d\theta+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\gamma_{0n}(t)|}\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s G_n(s,\theta)\cdot\int_0^l\left|f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n^k(\tau^k)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^k(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{k-1}(\tau^{k-1})b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{k-1}(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)\right||b_n(y)|dyd\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1\varepsilon_0\chi_2\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}+$$

$$+\sigma_1\chi_2\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s\sum_{n=1}^{\infty}|u_n^k(\tau^k)-u_n^{k-1}(\tau^{k-1})|\int_0^l M_{01}(\theta,y)|b_n(y)|dyd\theta ds+$$

$$+\sigma_1\chi_2\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n^k(\theta)-\beta_n^{k-1}(\theta)|\int_0^l M_{01}(\theta,y)|b_n(y)|dyd\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1\varepsilon_0\chi_2\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}+$$

$$+[\|u^k(\tau^k)-u^{k-1}(\tau^{k-1})\|_{B_2(T)}+\|\beta^k(t)-\beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}]\times$$

$$\times\sigma_1\chi_2\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l M_{01}(\theta,y)|b_n(y)|dy\right]^2}d\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1\varepsilon_0\chi_2\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}+\Delta_1[\|u^k(\tau^k)-u^{k-1}(\tau^{k-1})\|_{B_2(T)}+\|\beta^k(t)-\beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}], \quad (14)$$

где

$$\tau^k = \tau\left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(\theta) b_n(y)\right), \quad \Delta_1 = \sigma_1 \chi_2 \max_t \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s \|M_{01}(\theta,x)\|_{L_2(\Omega_l)} d\theta ds.$$

Далее нам понадобится следующая оценка:

$$\|u^k(\tau^k) - u^{k-1}(\tau^{k-1})\|_{B_2(T)} =$$
$$= \left\| u_n^k\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t) b_n(x)\right)\right) - u_n^{k-1}\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{k-1}(t) b_n(x)\right)\right)\right\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \left\| u_n^k\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t) b_n(x)\right)\right) - u_n^{k-1}\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t) b_n(x)\right)\right)\right\|_{B_2(T)} +$$
$$+ \left\| u_n^{k-1}\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t) b_n(x)\right)\right) - u_n^{k-1}\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{k-1}(t) b_n(x)\right)\right)\right\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \|u_n^k(t) - u_n^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \int_0^l |f(\cdot)| \left|\tau\left(t,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t) b_n(y)\right) - \tau\left(t,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{k-1}(t) b_n(y)\right)\right| dy \leqslant$$
$$\leqslant \|u_n^k(t) - u_n^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^k(t) - u_n^{k-1}(t)| \int_0^l |f(\cdot) M_{02}(t,y) b_n(y)| dy \leqslant$$
$$\leqslant (1+\Delta_2)\|u_n^k(t) - u_n^{k-1}(t)\|_{B_2(T)},$$

где

$$\Delta_2 = \max_t \|f(t,x,u,\beta,p) M_{02}(t,x)\|_{L_2(\Omega_l)}.$$

В силу последней оценки из (14) получим

$$\|\beta^{k+1}(t) - \beta^k(t)\|_{B_2(T)} \leqslant (\sigma_1\varepsilon_0\chi_2 + \Delta_1(1+\Delta_2))\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \Delta_1\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}. \quad (15)$$

Аналогично (15) получаем оценку

$$\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t G_n(t,s) \Bigg[|\eta_1(s)| \cdot |\beta_n^k(s) - \beta_n^{k-1}(s)| + |\eta_2(s)| \cdot |u_n^k(s) - u_n^{k-1}(s)| +$$
$$+ \int_0^l \Bigg| f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(\tau^k) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^k(s) b_n(y), p(s)\right) -$$
$$- f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{k-1}(\tau^{k-1}) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{k-1}(s) b_n(y), p(s)\right)\Bigg| |b_n(y)| dy \Bigg] ds \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1\chi_2\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \varepsilon_2\chi_2\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} +$$
$$+ \|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} \chi_2 \max_t \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l M_{01}(s,y)\cdot|b_n(y)| dy\right]^2} ds \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_3[\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \|u^k(\tau^k) - u^{k-1}(\tau^{k-1})\|_{B_2(T)}] + \varepsilon_2\chi_2\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant (\varepsilon_2\chi_2 + \Delta_3(1+\Delta_2))\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \Delta_3\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}, \quad (16)$$

где

$$\tau^k = \tau\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(s) b_n(y)\right), \quad \Delta_3 = \chi_2\left(\varepsilon_1 + \max_t \int_0^t \|M_{01}(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)} ds\right).$$

Тогда методом суммирования из (15) и (16) приходим к оценке

$$\left\|\beta^{k+1}(t) - \beta^k(t)\right\|_{B_2(T)} + \left\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\right\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \rho \cdot \left[\left\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\right\|_{B_2(T)} + \left\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\right\|_{B_2(T)}\right], \quad (17)$$

где $\rho = \max\left\{\Delta_1 + \Delta_3; \chi_2(\varepsilon_2 + \sigma_1\varepsilon_0) + (\Delta_1 + \Delta_3)(1 + \Delta_2)\right\}$.

Из (17) в силу последнего условия теоремы следует, что операторы в правой части (9) и (10) являются сжимающими и имеют единственную пару неподвижных точек, соответственно, в пространстве $B_2(T)$. Следовательно, из (12), (13) и (17) следует, что система (9) (10) имеет единственную пару решений в пространстве $B_2(T)$. □

Таким образом нетрудно убедиться, что в предположениях поставленной задачи и выполнении условий теорем 1 и 2 обратная задача (1)–(4) имеет единственную пару функций $\{U(t,x); \beta(x)\}$ при фиксированных значениях функции управления $p(t)$, причем абсолютно и равномерно сходятся ряды

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{\mu_n(t) + \int_0^t G_n(t,s) \times\right.$$
$$\times \left[\eta_2(s) u_n(s) + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(s) b_n(y), p(s)\right) b_n(y) dy\right] ds -$$
$$- \frac{1}{\gamma_{0n}(t)} \int_0^t G_n(t,s)\eta_1(s) \int_0^T \Theta(s,\theta) \int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma) \times$$
$$\left.\times \left[\eta_2(\varsigma) u_n(\varsigma) + \int_0^l f\left(\varsigma, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\varsigma) b_n(y), p(\varsigma)\right) b_n(y) dy\right] d\varsigma d\theta ds\right\}, \quad (18)$$

где

$$\mu_n(t) = \omega_n(t) + \gamma_{1n}(t) \int_0^t G_n(t,s)\eta_1(s) ds;$$

$$\beta(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{\gamma_{1n}(t) - \frac{1}{\gamma_{0n}(t)} \int_0^T \Theta(t,s) \int_0^s G_n(s,\theta) \times\right.$$
$$\left.\times \left[\eta_2(\theta) u_n(\theta) + \int_0^l f\left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\theta) b_n(y), p(\theta)\right) b_n(y) dy\right] d\theta ds\right\}, \quad (19)$$

где

$$\tau = \tau\left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta) b_n(y)\right).$$

3. Построение оптимального управления. Применение принципа максимума приводит нашу задачу к следующим необходимым условиям оптимальности (см., например, [24] или [1, с. 36—40])

$$\vartheta(t,x) f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t)) - 2\alpha p(t) = 0, \tag{20}$$

$$\vartheta(t,x) f_{pp}(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t)) - 2\alpha < 0, \tag{21}$$

в котором $\vartheta(t,x)$ — обобщенное решение задачи

$$\vartheta_t(t,x) + \vartheta_{xx}(t,x) = 0, \quad (t,x)\in\Omega,$$
$$\vartheta(t,x) = -2[u(T,x)-\xi(x)], \quad \vartheta(t,0)=\vartheta(t,l)=0,$$

сопряженной с задачей (1)–(3), которое определяется по формуле

$$\vartheta(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) G_n(T,t)\Bigg\{\mu_n(T) + \int_0^T G_n(T,s)\times$$
$$\times\left[\eta_2(s)u_n(s) + \int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right]ds-$$
$$-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int_0^T G_n(T,s)\eta_1(s)\int_0^T\Theta(s,\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\Bigg[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+$$
$$+\int_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\varsigma)b_n(y),p(\varsigma)\right)b_n(y)dy\Bigg]d\varsigma d\theta ds - \xi_n\Bigg\}, \tag{22}$$

где

$$\tau = \tau\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\varsigma)b_n(y)\right).$$

С учетом того, что $f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t)) \neq 0$, условия оптимальности (20), (21) перепишутся в следующем виде:

$$2\alpha p(t) f_p^{-1}(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t)) = \vartheta(t,x), \tag{23}$$

$$f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))\left(\frac{p(t)}{f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))}\right)_p > 0. \tag{24}$$

С учетом неравенства (24) из представлений (22) и (23) получаем

$$\frac{\alpha p(t)}{\int_0^l f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))b_n(y)dy} + \int_0^T G_n(T,t)G_n(T,s)\times$$
$$\times\left[\eta_2(s)u_n(s) + \int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right]ds-$$
$$-\frac{1}{\gamma_{0n}}\int_0^T G_n(T,t)G_n(T,s)\eta_1(s)\int_0^T\Theta(s,\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$
$$\times\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma) + \int_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\varsigma)b_n(y),p(\varsigma)\right)b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds =$$
$$= (\mu_n(T)+\xi_n)G_n(T,t), \tag{25}$$

где

$$\tau = \tau\left(\varsigma, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varsigma) b_n(y)\right).$$

Преобразуем следующий интеграл, применяя дважды формулу Дирихле:

$$\int_0^T Q_{0n}(t,s)\int_0^T \Theta(s,\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$

$$\times\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int_0^l f(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),p(\varsigma))b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds=$$

$$=\int_0^T Q_{0n}(t,s)\int_0^T G_n(0,\varsigma)\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int_0^l f(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),p(\varsigma))b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds=$$

$$=\int_0^T Q_{1n}(t,\varsigma)\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int_0^l f(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),p(\varsigma))b_n(y)dy\right]d\varsigma, \quad (26)$$

где

$$Q_{0n}(t,s)=G_n(T,t)G_n(T,s)\eta_1(s), \quad \nu_n(\varsigma)=\int_\varsigma^T \Theta(T,\theta)G_n(\theta,0)d\theta,$$

$$Q_{1n}(t,\varsigma)=G_n(0,\varsigma)\nu_n(\varsigma)\int_\varsigma^T Q_{0n}(t,s)ds, \quad \tau=\tau(\varsigma,y,U(\varsigma,y)).$$

Подставляя (26) в (25), приходим к следующему сложному интегральному уравнению относительно функции управления $p(t)$:

$$\alpha p(t)\Big/\left\{\int_0^l f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p(t))b_n(y)dy\right\}+$$

$$+\int_0^T Q_{2n}(t,s)\left[\eta_2(s)u_n(s)+\int_0^l f(s,y,U(\tau,y),\beta(s,y),p(s))b_n(y)dy\right]ds-$$

$$-\int_0^T Q_{3n}(t,\varsigma)\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int_0^l f(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),p(\varsigma))b_n(y)dy\right]d\varsigma=F(t), \quad (27)$$

где

$$\tau=\tau(s,x,u(s,x)), \quad Q_{2n}(t,s)=G_n(T,t)G_n(T,s),$$

$$Q_{3n}(t,\varsigma)=\frac{1}{\gamma_{0n}}Q_{1n}(t,\varsigma), \quad F(t)=(\mu_n(T)+\xi_n)G_n(T,t).$$

Для решения уравнения (27) воспользуемся следующим подходом. В уравнении (27) положим

$$\alpha p(t)\Big/\left\{\int_0^l f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p(t))b_n(y)dy\right\}=g(t), \quad (28)$$

где $\tau=\tau(s,x,u(s,x))$, $g(t)\in C(\Omega_T)$ — неизвестная пока функция. Сначала предположим, что она задана. Тогда из (28) имеем относительно функции управления $p(t)$ следующее нелинейное функциональное уравнение

$$p(t)=\frac{g(t)}{\alpha}\int\limits_0^l f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p(t))b_n(y)dy. \qquad (29)$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия*:

$$0<\|f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))\|_{L_2(\Omega_l)}\leqslant M_1,$$
$$|f_p(t,x,U,\beta,p_1(t))-f_p(t,x,U,\beta,p_2(t))|\leqslant M_2(x)|p_1(t)-p_2(t)|,$$
$$q=\alpha^{-1}\max_{t\in\Omega_T}|g(t)|\cdot\|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)}<1.$$

Тогда нелинейное функциональное уравнение (29) *имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций* $C(\Omega_T)$, *которое находится из следующего итерационного процесса*:

$$p_0(t)=0,\quad p_{k+1}(t)=\frac{g(t)}{\alpha}\int\limits_0^l f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p_k(t))b_n(y)dy,\quad k=0,1,2,\ldots \qquad (30)$$

Доказательство. Из последовательных приближений (30) получаем, что справедливы оценки

$$|p_{k+1}(t)-p_0(t)|\leqslant\left|\frac{g(t)}{\alpha}\right|\int\limits_0^l|f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p_k(t))b_n(y)|dy\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|g(t)|}{\alpha}\|f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p_k(t))\|_{L_2(\Omega_l)}\leqslant\frac{|g(t)|}{\alpha}M_1<\infty;$$

$$|p_{k+1}(t)-p_k(t)|\leqslant\left|\frac{g(t)}{\alpha}\right|\int\limits_0^l\Big|f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p_k(t))-$$
$$-f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p_{k-1}(t))\Big|\cdot|b_n(y)|dy\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{g(t)}{\alpha}\right|\int\limits_0^l M_2(y)|p_k(t)-p_{k-1}(t)|\cdot|b_n(y)|dy\leqslant\frac{|g(t)|}{\alpha}|p_k(t)-p_{k-1}(t)|\cdot\|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)}\leqslant$$
$$\leqslant q|p_k(t)-p_{k-1}(t)|.$$

Из справедливости этих оценок следует, что оператор в правой части (29) является сжимающим и для этого оператора существует единственная неподвижная точка в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_T)$. Следовательно, нелинейное функциональное уравнение (29) имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_T)$. Теорема доказана. □

Обозначим это решение через

$$p(t)=h(t,g(t)). \qquad (31)$$

Подставляя (31) в (27), с учетом (28) получаем следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$g(t)=\Im(t;g)\equiv$$
$$\equiv F(t)-\int\limits_0^T Q_{2n}(t,s)\left[\eta_2(s)u_n(s)+\int\limits_0^l f(s,y,U(\tau,y),\beta(s,y),h(s,g(s)))b_n(y)dy\right]ds+$$
$$+\int\limits_0^T Q_{3n}(t,\varsigma)\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int\limits_0^l f\left(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),h(\varsigma,g(\tau))\right)b_n(y)dy\right]d\varsigma. \qquad (32)$$

Для произвольной функции $\psi(t) \in C(\Omega_T)$ используется норма
$$\|\psi(t)\|_C = \max_{t\in\Omega_T} |\psi(t)|.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия*:
$$\xi(x) \in L_2(\Omega_l); \quad 0 < \left\| f(t,x,U,\beta,h(t,g(t))) \right\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant M_1(t),$$
$$\left|(t,x,U,\beta,h_1) - f(t,x,U,\beta,h_2)\right| \leqslant M_2(x)|h_1 - h_2|,$$
$$\left|h(t,g_1(t)) - h(t,g_2(t))\right| \leqslant M_3|g_1(t) - g_2(t)|,$$
$$\tau = M_3\|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)ds < 1,$$
где $K(t,s) \geqslant |Q_{2n}(t,s)| + |Q_{3n}(t,\varsigma)|$. *Тогда нелинейное интегральное уравнение Фредгольма* (32) *имеет единственное решение в классе непрерывных функций:* $g(t) \in C(\Omega_T)$, *которое может быть найдено из следующего итерационного процесса*:
$$g_0(t) = F(t), \quad g_{k+1}(t) = \Im(t; g_k), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{33}$$

Доказательство. Из последовательных приближений (33) получаем, что справедливы следующие оценки
$$|g_{k+1}(t) - g_0(t)\|_C \leqslant \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s) \int\limits_0^l |f(s,y,U(\tau,y),\beta(s,y),h(s,g_k(s)))b_n(y)|dyds \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)\|f(s,x,U(\tau,x),\beta(s,x),h_k(s))\|_{L_2(\Omega_l)}ds \leqslant \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)M_1(s)ds < \infty,$$
где $h_k(s) = h(s,g_k(s))$, $K(t,s) \geqslant |Q_{2n}(t,s)| + |Q_{3n}(t,\varsigma)|$;
$$\|g_{k+1}(t) - g_k(t)\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)\|f(s,x,U(\tau,x),\beta(s,x),h_k(s)) - f(s,x,U(\tau,x),\beta(s,x),h_{k-1}(s))\|_{L_2(\Omega_l)}ds \leqslant$$
$$\leqslant M_3\|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)\|g_k(t) - g_{k-1}(t)\|_C ds =$$
$$= \tau \cdot \|g_k(t) - g_{k-1}(t)\|_C < \|g_k(t) - g_{k-1}(t)\|_C.$$
Из справедливости этих оценок следует, что оператор в правой части (32) является сжимающим и для этого оператора существует единственная неподвижная точка в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_T)$. Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (32) имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций $g(t) \in C(\Omega_T)$. Теорема доказана. □

Подстановкой решения уравнения (32) в (31) определяется управляющая функция $p(t)$.

4. Построение оптимального процесса и вычисление минимального значения функционала. Согласно (18) оптимальный процесс находится по формуле
$$\bar U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \mu_n(t) + \int\limits_0^t G_n(t,s) \times \right.$$
$$\times \left[\eta_2(s)\bar u_n(s) + \int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty} \bar u_n(\tau)b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \bar\beta_n(s)b_n(y), \bar p(s)\right) b_n(y)dy\right] ds-$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^t G_n(t,s)\eta_1(s)\int\limits_0^T \Theta(s,\theta)\int\limits_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$

$$\left.\times\left[\eta_2(\varsigma)\bar{u}_n(\varsigma)+\int\limits_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n(\varsigma)b_n(y),\bar{p}(\varsigma)\right)b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds\right\},\quad (34)$$

где

$$\tau=\tau\left(s,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n(s)b_n(y)\right).$$

Согласно (19) следующим образом определяется функция восстановления:

$$\bar{\beta}(t,x)=\sum_{n=1}^\infty b_n(x)\left\{\gamma_{1n}(t)-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^T \Theta(t,s)\int\limits_0^s G_n(s,\theta)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\eta_2(\theta)\bar{u}_n(\theta)+\int\limits_0^l f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)b_n(y)dy\right]d\theta dt\right\},\quad (35)$$

где

$$\tau=\tau\left(\theta,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n(\theta)b_n(y)\right).$$

Оптимальный процесс (34) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса

$$\bar{U}^{k+1}(t,x)=\sum_{n=1}^\infty b_n(x)\left\{\mu_n(t)+\int\limits_0^t G_n(t,s)\times\right.$$

$$\times\left[\eta_2(s)\bar{u}_n^k(s)+\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n^k(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n^k(s)b_n(y),\bar{p}^k(s)\right)b_n(y)dy\right]ds-$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^t G_n(t,s)\eta_1(s)\int\limits_0^T \Theta(s,\theta)\int\limits_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$

$$\left.\times\left[\eta_2(\varsigma)\bar{u}_n^k(\varsigma)+\int\limits_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n^k(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n^k(\varsigma)b_n(y),\bar{p}^k(\varsigma)\right)b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds\right\},\quad (36)$$

где

$$\tau=\tau\left(s,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n^k(s)b_n(y)\right).$$

Функцию восстановления (35) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса

$$\bar{\beta}^{k+1}(t,x)=\sum_{n=1}^\infty b_n(x)\left\{\gamma_{1n}(t)-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^T \Theta(t,s)\int\limits_0^s G_n(s,\theta)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\eta_2(s)\bar{u}_n^k(\theta)+\int\limits_0^l f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n^k(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n^k(\theta)b_n(y),p^k(\theta)\right)b_n(y)dy\right]d\theta ds\right\},\quad (37)$$

где

$$\tau = \tau \left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^k(\theta) b_n(y) \right).$$

Согласно формулам (7) и (36) минимальное значение функционала находится из следующей формулы

$$J[\bar{p}] = \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\mu_n(t) + \int_0^t G_n(t,s) \times \right.\right.$$
$$\times \left[\eta_2(s)\bar{u}_n(s) + \int_0^l f\left(s, z, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\tau) b_n(z), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n(s) b_n(z), \bar{p}(s) \right) b_n(z) dz \right] ds-$$
$$- \frac{1}{\gamma_{0n}} \int_0^t G_n(t,s)\eta_1(s) \int_0^T \Theta(s,\theta) \int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma) \left[\eta_2(\varsigma)\bar{u}_n(\varsigma) + \right.$$
$$\left.\left.\left. + \int_0^l f\left(\varsigma, z, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\tau) b_n(z), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n(\varsigma) b_n(z), \bar{p}(\varsigma) \right) b_n(z) dz \right] d\varsigma d\theta ds - \xi_n \right] \right\}^2 dy+$$
$$+ \alpha \int_0^T (\bar{p}(t))^2 dt, \quad (38)$$

где

$$\tau = \tau \left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(s) b_n(y) \right).$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда функционал* (38) *принимает конечное значение.*

Доказательство. Достаточно показать, что сходятся следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(t), \quad (39)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t G_n(t,s) \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n(s) b_n(y), \bar{p}(s) \right) b_n(y) dy ds, \quad (40)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0n}(t)} \int_0^t G_n(t,s)\eta_1(s) \int_0^T \Theta(s,\theta) \int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma) \times$$
$$\times \int_0^l f\left(\varsigma, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n(\varsigma) b_n(y), \bar{p}(\varsigma) \right) b_n(y) dy d\varsigma d\theta ds. \quad (41)$$

Покажем абсолютную и равномерную сходимость рядов (39) и (40). Применим неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \gamma_{1n}(t) \int_0^t G_n(t,s)\eta_1(s) ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{\ell_2} \|G(t,0)\|_{B_2(T)} + \varepsilon_1 \|\gamma_1(t)\|_{B_2(T)} \|G(t,s)\|_{B_2(T)} = \chi_2(\chi_1 + \varepsilon_1 \|\gamma_1(t)\|_{B_2(T)}) < \infty,$$

где

$$\varepsilon_1 = \max_t \int_0^t |\eta_1(s)| ds;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left| G_n(t,s) \int_0^l f(\cdot) b_n(y) dy \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \|G(t,s)\|_{B_2(T)} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^l f(\cdot) b_n(y) dy \right|^2} ds \leqslant \chi_2 \int_0^t \|f(s,x,\bar{u},\bar{\beta},\bar{p})\|_{L_2(\Omega_l)} ds < \infty.$$

Сходимость ряда (41) доказывается аналогично. Приближенное значение функционала вычисляется из следующего итерационного процесса:

$$J[\bar{p}^{k+1}] = \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\mu_n(t) + \int_0^t G_n(t,s) \times \right.\right.$$

$$\times \left[\eta_2(s) \bar{u}_n^k(s) + \int_0^l f\left(s, z, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^k(\tau) b_n(z), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n^k(s) b_n(z), \bar{p}^k(s)\right) b_n(z) dz \right] ds -$$

$$- \frac{1}{\gamma_{0n}} \int_0^t G_n(t,s) \eta_1(s) \int_0^T \Theta(s,\theta) \int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma) \Big[\eta_2(\varsigma) \bar{u}_n^k(\varsigma) +$$

$$\left.\left. + \int_0^l f\left(\varsigma, z, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^k(\tau) b_n(z), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n^k(\varsigma) b_n(z), \bar{p}^k(\varsigma)\right) b_n(z) dz \Big] d\varsigma d\theta ds - \xi_n \right] \right\}^2 dy +$$

$$+ \alpha \int_0^T (\bar{p}^k(t))^2 dt, \quad (42)$$

где

$$\tau = \tau\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^k(s) b_n(y)\right). \qquad \square$$

5. Заключение. В работе предложена методика решения нелинейного оптимального управления в нелинейной обратной задаче для одного типа параболического уравнения с нелинейным отклонением, начально-краевыми и нелокальным условиями, основанная на методе Фурье разделения переменных. На основе принципа максимума сформулированы необходимые условия оптимальности функции управления при квадратичных критериях. При помощи метода последовательных приближений однозначно определена функция оптимального управления из сложного интегрального уравнения (27). Получена система из двух счетных систем нелинейных функционально-интегральных уравнений для определения функции восстановления и функции состояния. Функция восстановления и функция состояния оптимального управления построены в виде рядов Фурье (34) и (35). Найдена формула вычисления минимального значения функционала (38). Приведены формулы для приближенного вычисления оптимального процесса, функции восстановления и минимального значения функционала при помощи итерационных процессов (30), (36), (37) и (42). Полученные результаты могут найти дальнейшее применение в развитии математической теории нелинейного оптимального управления в обратных задачах для систем с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высшая школа, 1989.
2. *Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980.
3. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — Наука 1982.
4. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
5. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами/ Дисс. на соиск. уч. степ. д-ра физ.-мат. наук — Бишкек: Ин-т мат. НАН Кыргыз. Респ., 2003.
6. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.
7. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
8. *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами.. — М.: Высшая школа, 2009.
9. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
10. *Керимбеков А., Наметкулова Р. Ж., Кадиримбетова А. К.* Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением// Изв. Иркутск. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — *15.* — С. 50–61.
11. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований// Автомат. телемех. — 2013. — № 12. — С. 56–103.
12. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
13. *Тятюшкин А. И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1992.
14. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
15. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях// Пробл. управл. — 2014. — № 4. — С. 2–8.
16. *Юлдашев Т. К.* О построении приближений для оптимального управления в квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка// Мат. теория игр прилож. — 2014. — *6*, № 3. — С. 105–119.
17. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с максимумами и приближенное вычисление функционала качества// Вестн. Воронеж. ун-та ГУ. Сер. Сист. анал. информ. технол. — 2015. — № 2. — С. 13–20.
18. *Юлдашев Т. К.* Нелинейное оптимальное управление в обратной задаче для одной системы с параболическим уравнением// Вестн. Твер. ун-та. Сер. Прикл. мат. — 2017. — № 2. — С. 59–78.
19. *Юлдашев Т. К.* Об одном оптимальном управлении обратными тепловыми процессами с интегральным условием переопределения// Вестн. Твер. ун-та. Сер. Прикл. мат. — 2019. — № 4. — С. 65–87.
20. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1703–1711.
21. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
22. *Юлдашев Т. К., Шабадиков К. Х.* Смешанная задача для нелинейного псевдопараболического уравнения высокого порядка// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *156.* — С. 73–83.
23. *Khurshudyan A. Zh.* On optimal boundary and distributed control of partial integro-differential equations// Arch. Control Sci. — 2014. — *24 (LX)*, № 1. — P. 5–25.
24. *Kerimbekov A. K.* On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations// Proc. World Cong. Eng. London. — 2011. — *1.* — P. 270–275.
25. *Kowalewski A.* Optimal control of an infinite order hyperbolic system with multiple time-varying lags// Automatyka. — 2011. — *15.* — P. 53–65.

26. *Machado L., Abrunheiro L., Martins N. J.* Variational and optimal control approaches for the second-order Herglotz problem on spheres// Optimal Theory Appl. — 2019 182. — № 3. — P. 965–983.
27. *Yuldashev T. K.* Nonlinear optimal control of thermal processes in a nonlinear inverse problem// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 1. — P. 124–136.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com