ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-3-9

УДК 517.977.56

ВАРИАЦИОННОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

© 2022 г. **А. В. АРГУЧИНЦЕВ, В. П. ПОПЛЕВКО**

Аннотация. Исследуется линейная задача оптимального управления гиперболической системой первого порядка, в которой граничное условие на одном из концов определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по состоянию. Задача сводится к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный подход основан на использовании точной формулы приращения целевого функционала. Редуцированную задачу можно решать с помощью широкого арсенала эффективных методов, применяемых для задач оптимизации в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: гиперболическая система, система с запаздыванием, точная формула приращения, условие оптимальности.

VARIATIONAL OPTIMALITY CONDITION IN A CONTROL PROBLEM OF A LINEAR FIRST-ORDER HYPERBOLIC SYSTEM WITH BOUNDARY DELAY

© 2022 **A. V. ARGUCHINTSEV, V. P. POPLEVKO**

Abstract. In this paper, we examine a linear optimal-control problem for a first-order hyperbolic system in which a boundary condition at one of the ends is determined from a controlled system of ordinary differential equations with constant state lag. The approach proposed is based on the use of an exact formula for the increment of the cost functional. The reduced problem can be solved by various effective methods used for optimization problems in systems of ordinary differential equations.

Keywords and phrases: hyperbolic system, system with delay, exact increment formula, optimality condition.

AMS Subject Classification: 49J20, 49M05

1. Введение. Дифференциальные уравнения с запаздыванием — это особый вид дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция и её производные входят при различных значениях аргумента. В системе дифференциальных уравнений с запаздыванием производная зависит не только от решения в настоящий момент времени, но и от значения решений в предыдущие моменты времени. Это запаздывание может быть обусловлено самыми различными причинами,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385002).

 © ВИНИТИ РАН, 2022

например, ограниченностью скорости распространения взаимодействия, наличием инерционности некоторых элементов, ограниченностью скорости протекания технологических, экологических процессов и т. д.

Практически сразу после получения первых результатов в теории оптимального управления классическими динамическими системами началось и изучение задач оптимального управления системами с запаздыванием. В 1961 г. Г. Л. Харатишвили [12] обобщил принцип максимума Понтрягина на случай процессов с запаздыванием, причем запаздывающий аргумент содержался только в фазовой переменной. Немного позднее Р. Габасов, С. В. Чуракова [5] доказали существование оптимальных управлений в задаче управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В [17] была рассмотрена общая задача оптимального управления, включающая в себя дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, при ограничениях как на фазовые, так и на управляющие переменные. Получены необходимые условия оптимальности, в которых фигурируют множители Лагранжа. В. А. Срочко, Е. И. Пудалова [11] исследовали задачу с постоянным запаздыванием по состоянию, привели формулу приращения функционала к конструктивному виду, допускающему улучшение управляющих функций через максимум функции Понтрягина, и сконструировали итерационную процедуру улучшения допустимых управлений. В 2009 г. Г. В. Боков [4] сформулировал задачу оптимального управления, которая содержит постоянное запаздывание по времени как в фазовой переменной, так и в переменной управления, а также доказал необходимое условие оптимальности с помощью применения игольчатой вариации, обосновал принцип максимума в задаче с бесконечным интервалом времени. Значительный вклад в теорию особых оптимальных управлений с запаздыванием внес К. Б. Мансимов с соавторами, исследовав широкий спектр задач — от обыкновенных дифференциальных уравнений до стохастических систем [8].

В данной работе рассматривается линейная задача оптимального управления простейшей гиперболической системой первого порядка, в которой граничное условие на одном из концов определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по состоянию. Задачи такого вида возникают при управлении численностью популяции с учетом ее возрастной структуры (управление рождаемостью с целью максимизации численности популяции в конце периода), задачах химической технологии и др. В качестве управляющих воздействий рассматриваются ограниченные и измеримые функции. Система обыкновенных дифференциальных уравнений на границе линейна по состоянию, но матрица коэффициентов при фазовых переменных зависит от управляющих функций. Поэтому условие оптимальности типа принципа максимума Л. С. Понтрягина в данной задаче является необходимым, но не достаточным условием оптимальности. В связи с этим для решения подобных задач обычно применяются те же методы, что и для общих нелинейных задач оптимального управления.

Основным результатом работы является редукция исходной задачи к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный подход основан на использовании точной (без остаточных членов) формулы приращения целевого функционала. Соответствующее утверждение сформулировано в виде вариационного условия оптимальности. Приведен пример, иллюстрирующий процесс редукции. Отметим, что редуцированная задача имеет следующую структуру. Целевой функционал линеен. Система обыкновенных дифференциальных уравнений линейна по состоянию, но матрица коэффициентов при фазовых переменных зависит от управляющих функций. Редуцированную задачу можно решать с помощью широкого арсенала эффективных методов, применяемых для этого класса задач оптимального управления в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$x_t + x_s = \Phi(s,t)x + \overline{f}(s,t), \quad (s,t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1]; \tag{1}$$

$$x(s_0, t) = q(t), \quad t \in [-\alpha; 0]; \quad x(s, t_0) = \mu(s), \quad s \in S; \tag{2}$$

$$\mu(s_0) = q(t_0), \tag{3}$$

где s и t — независимые переменные, $x(s,t)$ — n-мерная вектор-функция, α — положительная константа, являющаяся запаздыванием по состоянию.

Условия на левом конце (при $s = s_0$) определяются из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$x_t(s_0, t) = N(u(t), t)x(s_0, t - \alpha) + b(u(t), t), \quad t \in T. \tag{4}$$

Начальные условия для этой системы задаются формулой (2).

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на T r-мерных вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничениям типа включения

$$u(t) \in U \subset E^r, \quad t \in T, \tag{5}$$

где U — компактное множество.

Требуется найти допустимое управление, доставляющее минимум целевому функционалу

$$J(u) = \int\limits_S \langle c(s), x(s, t_1)\rangle ds \longrightarrow \min, \quad u \in U. \tag{6}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается классическое скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве соответствующей размерности.

Задача (1)—(6) рассматривается при следующих предположениях:

(i) функции $q(t)$ и $\mu(s)$ непрерывны на отрезках T и S соответственно;

(ii) функции $\Phi(s, t)$, $\overline{f}(s, t)$, $N(u, t)$, $b(u, t)$ и $c(s)$ непрерывны по совокупности своих аргументов на $S \times T$, $S \times T$, $U \times T$, $U \times T$ и S соответственно.

Для любого допустимого управления существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1)—(4) из класса непрерывных в Π функций, причем каждая компонента решения x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывно дифференцируема вдоль характеристик системы гиперболических уравнений [2]. Непрерывность решения гарантируется приведенными выше предположениями на параметры задачи и условием согласования (3). Заметим, что данные условия не гарантируют существования в прямоугольнике Π классического решения. Для этого, в частности, требуется выполнение условий согласования более высокого порядка, тесно связанных с самой гиперболической системой [6].

Начально-краевые задачи вида (1)—(4) используются при моделировании целого ряда природных и технологических процессов. В частности, в случае $n = 1$ уравнение (1) используется для описания динамики популяции с возрастной структурой [1]. Независимыми переменными являются время наблюдения и возраст особей, а функция $x(s, t)$ задает возрастную плотность популяции. В случае системы уравнений ($n > 1$) модель (1)—(4) описывает динамику нескольких популяций, причем их взаимодействие может определяться матрицей $\Phi(s, t)$. Управление может осуществляться процессом рождения (вбрасывания). Тогда может быть поставлена задача максимизации плотности популяций к концу процесса наблюдения, то есть цель задается линейным функционалом вида (6).

Другим интересным приложением является математическая модель процессов ректификации в колонне [3, 7, 16]. В этом случае система вида (1) состоит из четного числа дифференциальных уравнений, каждое из которых определяет концентрацию химического компонента в жидкой и паровой фазах.

3. Формула приращения функционала. Отметим, что матрица коэффициентов в (4) зависит от управляющей функции. Поэтому, несмотря на линейность задачи, классический принцип максимума Л. С. Понтрягина не является в данном случае достаточным условием оптимальности. Обычно для решения подобных задач применяют общие методы, разработанные для общих нелинейных систем. В [13] подобная задача исследована в классе гладких допустимых управлений с помощью неклассической внутренней вариации, сохраняющей гладкость управляющих функций и обеспечивающей выполнение ограничений типа включения (5). В настоящей работе мы используем методику, ранее примененную в [14] в задачах при отсутствии запаздывания.

Рассмотрим два произвольных различных допустимых процесса: $\{u, x\}$ и $\{\widetilde{u} = u + \Delta u, \widetilde{x} = x + \Delta x\}$.

Введем обозначение $Dx = x_t + x_s$. Здесь $Dx = (D_1x_1, \ldots, D_nx_n)$ — обобщенная производная x, каждая компонента которой D_ix_i непрерывна вдоль любой характеристики системы гиперболических уравнений (1).

Задача в приращениях имеет вид:

$$\begin{gathered} D\Delta x = \Phi(s,t)\Delta x; \\ \Delta x(s_0,t) = 0, \quad t \in [-\alpha; 0]; \quad \Delta x(s,t_0) = 0, \quad s \in S; \\ \Delta x_t(s_0,t) = N(\widetilde{u},t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) - N(u,t)x(s_0,t-\alpha) + \Delta b(u,t). \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\Delta b(u,t) = b(\widetilde{u},t) - b(u,t)$. Используем следующее представление для правой части равенства (7):

$$\Delta x_t(s_0,t) = \Delta_{\widetilde{u}} N(u,t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) + N(u,t)\Delta x(s_0,t-\alpha) + \Delta b(u,t),$$

где $\Delta_{\widetilde{u}} N(u,t) = N(\widetilde{u},t) - N(u,t)$. Приращение функционала запишем в виде

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = \int\limits_S \langle c(s), \Delta x(s,t_1)\rangle ds. \tag{8}$$

В формуле (8) добавим нулевые слагаемые

$$\iint\limits_\Pi \big\langle \psi(s,t), D\Delta x - \Phi(s,t)\Delta x\big\rangle ds dt,$$

$$\int\limits_T \Big\langle p(t), \Delta x_t(s_0,t) - \Delta_{\widetilde{u}} N(u,t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) - N(u,t)\Delta x(s_0,t-\alpha) - \Delta b(u,t)\Big\rangle dt,$$

где $\psi(s,t)$ и $p(t)$ — пока произвольные вектор-функции. К слагаемым

$$\iint\limits_\Pi \big\langle \psi(s,t), D\Delta x\big\rangle ds dt, \quad \int\limits_T \big\langle p(t), \Delta x_t(s_0,t)\big\rangle dt$$

применим формулы интегрирования по частям. Отметим, что для первого слагаемого необходимо применить обобщенную формулу интегрирования по частям [2], поскольку классических частных производных функции $x(s,t)$ может не существовать. Получим

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = \int\limits_S \big\langle c(s), \Delta x(s,t_1)\big\rangle ds + \int\limits_S \Big[\big\langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\big\rangle - \big\langle \psi(s,t_0), \Delta x(s,t_0)\big\rangle\Big] ds - \\ - \iint\limits_\Pi \big\langle D\psi(s,t), \Delta x\big\rangle ds dt + \int\limits_T \Big[\big\langle \psi(s_1,t), \Delta x(s_1,t)\big\rangle - \big\langle \psi(s_0,t), \Delta x(s_0,t)\big\rangle\Big] dt + \\ + \big\langle p(t_1), \Delta x(s_0,t_1)\big\rangle - \big\langle p(t_0), \Delta x(s_0,t_0)\big\rangle - \int\limits_T \big\langle p_t, \Delta x(s_0,t)\big\rangle dt - \iint\limits_\Pi \big\langle \psi(s,t), \Phi(s,t)\Delta x\big\rangle ds dt - \\ - \int\limits_T \Big\langle p(t),\ \Delta_{\widetilde{u}} N(u,t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) + N(u,t)\Delta x(s_0,t-\alpha) + \Delta b(u,t)\Big\rangle dt. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \int\limits_T \Big\langle p(t), N(u,t)\Delta x(s_0,t-\alpha)\Big\rangle dt = \int\limits_{t_0-\alpha}^{t_0} \Big\langle p(\tau+\alpha),\ N\big(u(\tau+\alpha),\tau+\alpha\big)\Delta x(s_0,\tau)\Big\rangle d\tau + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha} \Big\langle p(\tau+\alpha),\ N\big(u(\tau+\alpha),\tau+\alpha\big)\Delta x(s_0,\tau)\Big\rangle d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $\tau = t - \alpha$, $\tau \in [t_0 - \alpha, t_1 - \alpha]$. Возвратимся к переменной t. С учетом того, что первое слагаемое данного выражения равно нулю, получим:

$$\int\limits_T \Big\langle p(t), N(u,t)\Delta x(s_0, t-\alpha)\Big\rangle dt = \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha} \Big\langle p(t+\alpha),\ N(u(t+\alpha), t+\alpha)\Delta x(s_0,t)\Big\rangle dt.$$

Введем вспомогательные функции

$$H\big(\psi(s,t), x(s,t), s, t\big) = \big\langle \psi(s,t), \Phi(s,t)x + \overline{f}(s,t)\big\rangle,$$
$$h\big(p(t), x(s_0, t-\alpha), u(t)\big) = \big\langle p(t), N(u(t),t)x(s_0, t-\alpha) + b(u(t),t)\big\rangle.$$

Это классические гамильтонианы. Однако в нашем случае они не фигурируют в условиях оптимальности, а введены лишь для сокращения обозначений. Потребуем, чтобы функции $\psi(s,t)$, $p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи

$$\psi_t + \psi_s = -\Phi^T(s,t)\psi, \quad \psi(s,t_1) = -c(s), \quad \psi(s_1,t) = 0; \tag{9}$$

$$p_t = \begin{cases} -N^T\big(u(t+\alpha), t+\alpha\big)p(t+\alpha) - \psi(s_0,t), & t \in [0; t_1-\alpha], \\ -\psi(s_0,t), & t \in [t_1-\alpha; t_1]; \end{cases}$$
$$p(t_1) = 0; \quad p(t) \equiv 0, \quad t > t_1. \tag{10}$$

Тогда формула приращения функционала примет вид

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \Big\langle p(t),\ \Delta_{\widetilde{u}} N(u,t)\widetilde{x}(s_0, t-\alpha) + \Delta b(u,t)\Big\rangle dt. \tag{11}$$

Формула (11) является точной (без остаточных членов) для любой пары допустимых процессов, при этом исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений (4) интегрируется на возмущенном управлении.

4. Условие оптимальности. На основе полученной формулы приращения можно осуществить редукцию исходной задачи оптимального управления гиперболической системой к задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$I(v) = -\int\limits_T \Big\langle p(t,u),\ \big(N(v(t),t) - N(u(t),t)\big)y(t-\alpha, v) + b(v(t),t) - b(u(t),t)\Big\rangle dt \to \min, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \dot{y} = N(v(t),t)y(t-\alpha) + b(v(t),t), \quad t \in T; \\ y(t_0) = y^0; \\ v(t) \in U. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $y(t)$ — n-мерная функция состояния, $u(t)$ и $p(t,u)$ — фиксированные функции, $v(t)$ — управляющее воздействие, удовлетворяющее тем же ограничениям на управления, что и в исходной задаче.

Теорема 1. *Чтобы управление $u^*(t)$ было оптимальным в задаче* (1)—(6), *необходимо и достаточно, чтобы управление $v^* = u^*(t)$ было оптимальным в задаче* (12)—(13). *Кроме того, оптимальное значение функционала равно*

$$J(v^*) = J(u) + I(v^*).$$

Полученный результат можно рассматривать и как вариационное условие оптимальности (в отличие от традиционных конечномерных условий оптимальности).

Опишем схему решения исходной задачи.

1. Задается произвольное допустимое управление $u = u(t)$. Вычисляется соответствующее ему решение $p = p(t,u)$ сопряженной задачи (10). Для этого необходимо также найти решение задачи (9), которое не зависит от выбора допустимого управления.

2. Решается вспомогательная задача оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с линейным целевым функционалом (12).

Таким образом, для решения задачи (1)—(6) необходимо всего лишь два раза проинтегрировать систему дифференциальных уравнений с частными производными (поиск $\psi(s,t)$ и при необходимости $x^*(s,t,v^*)$).

5. Пример. В квадрате $S \times T = [0;5] \times [0;5]$ рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$x_t + x_s = e^s \cdot \cos t,$$
$$x_t(0,t) = u \cdot x(0,t-1); \quad x(0,t) = 0{,}2 \cdot t, \quad t \in [-1;0];$$
$$x(s,0) = 0; \quad u(t) \in [0,1].$$

Целевой функционал:

$$J(u) = \int_S x(s,5)ds \to \min .$$

В данном примере $U = [0,1]$, запаздывание $\alpha = 1$. Вспомогательные функции (гамильтонианы) имеют следующий вид:

$$H(\psi, x, s, t) = \psi \cdot e^s \cdot \cos t, \quad h(p, x(0,t), u, t) = p(t) \cdot u(t) \cdot x(0,t-1).$$

Выпишем сопряженную задачу (9)—(10):

$$\psi_t + \psi_s = 0, \quad \psi(s,5) = -1, \quad \psi(5,t) = 0;$$
$$p_t = \begin{cases} -p(t) \cdot u(t+1) - \psi(s_0,t), & t \in [0;4], \\ -\psi(s_0,t), & t \in [4;5]; \end{cases}$$
$$p(5) = 0.$$

Выберем допустимое управление $u(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,5]$. Тогда решение сопряженной задачи будет иметь вид:

$$\psi(s,t) = \begin{cases} 0, & t < s, \\ -1, & t \geqslant s. \end{cases}$$
$$p(t) = t - 5, \quad t \in [0;5].$$

Исходная задача сводится к следующей задаче оптимального управления:

$$I(v) = \int_0^5 (5-t) \cdot v(t) \cdot y(t-1,v)dt \to \min;$$
$$y_t = v \cdot y(t-1), \quad y(t) = 0{,}2 \cdot t, \quad t \in [-1;0], \quad y(0) = 0;$$
$$v(t) \in [0;1].$$

Для решения редуцированной задачи можно использовать широкий арсенал методов, обзор которых дан в [15,18]. Специфика задачи позволяет рекомендовать предложенные в [9,10] подходы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. В., Крышев И. И., Сазыкина Т. Г.* Физическое и математическое моделирование экосистем. — СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.
2. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. — М.: Физматлит, 2007.
3. *Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.* Оптимальное управление в задаче химической ректификации// Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 8. — С. 53–57.
4. *Боков Г. В.* Принцип максимума Понтрягина в задаче с временным запаздыванием// Фундам. прикл. мат. — 2009. — *15*, № 5. — С. 3–19.
5. *Габасов Р., Чуракова С. В.* О существовании оптимальных управлений в системах с запаздыванием// Диффер. уравн. — 1967. — *3*, № 12. — С. 2067–2080.

6. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
7. *Демиденко Н. Д., Потапов В. И., Шокин Ю. И.* Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. — Новосибирск: Наука, 2006.
8. *Мансимов К. Б., Масталиев Р. О.* Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в задаче оптимального управления стохастической системой с запаздывающим аргументом// Програм. сист.: Теория и прилож. — 2020. — *11*, № 2. — С. 3–22.
9. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2019. — *30*. — С. 83–98.
10. *Срочко В. А., Антоник В. Г.* Условия оптимальности экстремальных управлений для билинейной и квадратичной задач// Изв. вузов. Матем. — 2016. — № 5. — С. 86–92.
11. *Срочко В. А., Пудалова Е. И.* Методы нелокального улучшения допустимых управлений в линейных задачах с запаздыванием// Изв. вузов. Мат. — 2000. — № 12. — С. 76–86.
12. *Харатишвили Г. Л.* Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием// Докл. АН СССР. — 1961. — *136*, № 1. — С. 39–42.
13. *Arguchintsev A. V., Poplevko V. P.* An optimal control problem by a hyperbolic system with boundary delay// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2021. — *35*. — С. 3–17.
14. *Arguchintsev A., Poplevko V.* An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations// Games. — 2021. — *12*, № 1. — 23.
15. *Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P.* Notes on numerical methods for solving optimal control problems// IEEE J. Ind. Appl. — 2016. — *5*. — P. 154–166.
16. *Demidenko N., Kulagina L.* Optimal control of thermal-engineering processes in tube furnaces// Chem. Petrol. Eng. — 2006. — *42*, № 3. — P. 128–130.
17. *Frankena J. F.* Optimal control problems with delay, the maximum principle and necessary conditions// J. Eng. Math. — 1975. — *9*, № 1. — P. 53–64.
18. *Golfetto W., Fernandes S. Silva* A review of gradient algorithms for numerical computation of optimal trajectories// J. Aerosp. Technol. Manag. — 2012. — *4*. — P. 131–143.

Аргучинцев Александр Валерьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `arguch@math.isu.ru`

Поплевко Василиса Павловна
Иркутский государственный университет
E-mail: `vasilisa@math.isu.ru`