ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 50–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-50-56

УДК 517.928

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2022 г. **И. В. ЗАХАРОВА**

Аннотация. В работе показана возможность применения общей теории асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, разработанной С. А. Ломовым и его учениками, к построению асимптотики решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений со степенным пограничным слоем.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение, асимптотическое интегрирование, степенной пограничный слой, регуляризирующая функция.

CONSTRUCTION OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF SOME DEGENERATE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

© 2022 **I. V. ZAKHAROVA**

Abstract. The paper describes possible implementation of the general theory of asymptotic integration of singularly perturbed differential equations developed by S. A. Lomov and his disciples to constructing asymptotic solutions for singularly perturbed differential equations with a power boundary layer.

Keywords and phrases: singularly perturbed differential equation, asymptotic integration, power boundary layer, regularizing function.

AMS Subject Classification: 34E15

1. Введение. Построение асимптотического решения сингулярных краевых и начальных задач, как правило, основывается на идее использования функций типа пограничного слоя экспоненциального порядка убывания при $\varepsilon \to 0$. Явление пограничного слоя экспоненциального типа возникает чаще всего в задачах, в которых при $\varepsilon = 0$ порядок дифференциального уравнения понижается. Представляют также интерес задачи, в которых при $\varepsilon = 0$ порядок дифференциального уравнения не понижается, однако уравнение становится вырождающимся на границе области. За счет этого происходит потеря условий. В таких задачах, говоря о пограничном слое, обращают внимание на его степенной характер. Как показано в работе [1], построение степенного пограничного слоя принципиально отлично от построения экспоненциального погранслоя. Аналоги малоизученного класса задач со степенным погранслоем встречаются в ряде прикладных задач аэро- и гидродинамики, приводящих, в частности, к уравнению Лайтхилла [2, 5].

В настоящее время разработан метод построения решений сингулярно возмущенных задач — метод регуляризации [3], который позволяет записать решение сингулярно возмущённой задачи без отдельного описания области пограничного слоя. При этом пограничные эффекты описываются дополнительными независимыми переменными, вводимыми по спектру некоторого оператора. В данной работе показано применение идеи метода регуляризации к построению асимптотики решений сингулярно возмущённых задач со степенным погранслоем.

2. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Для начала рассмотрим задачу Коши в следующей постановке:

$$(\varepsilon + x)y' + a(x)y = h(x), \tag{1}$$

$$y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

где ε — малый параметр, $x \in [0, X]$, $0 < X < \infty$, $a(x) \neq 0$ в отдельных точках и на части множества $[0, X]$, $a(x), h(x) \in C^\infty[0, X]$, $\operatorname{Re} a(x) < 0$. Ничего не изменится, если считать $y(x)$ неизвестной вектор-функцией, $a(x) \neq 0$ — матрицей размерности $n \times n$, $h(x)$ — известной вектор-функцией, y^0 — известным постоянным вектором. При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (1), (2) имеет единственное решение. При $\varepsilon = 0$ получим уравнение

$$xy' + a(x)y = h(x), \tag{3}$$

которое имеет особенность в точке $x = 0$. Поэтому уравнение (3), вообще говоря, не имеет решений, удовлетворяющих условию (2). Начальные задачи для уравнений вида (1) были изучены в работе [2], в которой с помощью первого и второго итерационного процесса было построено асимптотическое решение. Однако асимптотическое, равномерно пригодное на всём отрезке, решение являлось составным, т.е. каждый член асимптотики строился в виде суммы двух слагаемых, описывающих отдельно зону «пограничного слоя» и зону вне его.

Построим регуляризованный асимптотический ряд по степеням ε, который представляет решение $y(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2). Для того чтобы реализовать идеи метода регуляризации [3], перейдём в пространство большей размерности с помощью введения дополнительных (регуляризирующих) независимых переменных. Регуляризирующие функции введём по формуле:

$$\tau = -\int\limits_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon + x} ds \equiv g(x,\varepsilon), \quad (\tau|_{x=0} = 0). \tag{4}$$

Вместо решения $y(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) будем искать функцию $\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)$ — решение «расширенной» задачи. От функции $\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)$ потребуем, чтобы её сужение на множество $\tau \equiv g(x,\varepsilon)$, $x \in [0, X]$, тождественно совпадало с решением задачи (1), (2), т.е.

$$\tilde{y}|_{\tau = g(x,\varepsilon)} \equiv y(x,\varepsilon). \tag{5}$$

Преобразуем задачу (1), (2) с учетом выражения (4). Для определения функции $\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)$ получим следующую задачу:

$$(\varepsilon + x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - a(x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} + a(x)\tilde{y} = h(x), \tag{6}$$

$$\tilde{y}(0,0,\varepsilon) = y^0. \tag{7}$$

Положив в (6) $\varepsilon = 0$ получим:

$$x\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - a(x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} + a(x)\tilde{y} = h(x), \tag{8}$$

$$\tilde{y}(0,0) = y^0. \tag{9}$$

Любое решение предельной задачи (8), (9) принадлежит множеству решений задачи (6), (7). Поскольку задача (6), (7) регулярна по ε, то её решение будем строить в виде ряда классической теории возмущений:

$$\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{y}_i(x,\tau). \tag{10}$$

Задачи для определения коэффициентов ряда (10) имеют вид:

$$x\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial x} - a(x)\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial\tau} + a(x)\tilde{y}_0 = h(x), \tag{11}$$

$$\tilde{y}_0(0,0) = y^0, \tag{12}$$

$$x\frac{\partial\tilde{y}_1}{\partial x} - a(x)\frac{\partial\tilde{y}_1}{\partial\tau} + a(x)\tilde{y}_1 = -\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial x}, \tag{13}$$

$$\tilde{y}_1(0,0) = 0, \tag{14}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x\frac{\partial\tilde{y}_i}{\partial x} - a(x)\frac{\partial\tilde{y}_i}{\partial\tau} + a(x)\tilde{y}_i = -\frac{\partial\tilde{y}_{i-1}}{\partial x}, \tag{15}$$

$$\tilde{y}_i(0,0) = 0. \tag{16}$$

Задачи (11)—(16) недоопределены, т.к. для решения систем уравнений с частными производными у нас имеются «точечные» начальные условия. В работе [3] описано пространство функций, в котором задачи вида (11)—(16) разрешимы. Схему построения решений задач (11)—(16) рассмотрим на примере задачи (11), (12). Решение будем искать в виде:

$$\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0^1 + \tilde{y}_0^2,$$

где $\tilde{y}_0^1$ — частное решение уравнения

$$x\frac{\partial\tilde{y}_0^1}{\partial x} + a(x)\tilde{y}_0^1 = h(x), \tag{17}$$

удовлетворяющее условию

$$|\tilde{y}_0^1(0)| < \infty, \tag{18}$$

$\tilde{y}_0^2$ — общее решение уравнения

$$x\frac{\partial\tilde{y}_0^2}{\partial x} - a(x)\frac{\partial\tilde{y}_0^2}{\partial\tau} + a(x)\tilde{y}_0^2 = 0. \tag{19}$$

Решение уравнения (17) будем искать в виде $\tilde{y}_0^1 = \bar{y}_0^1\varphi(0,x)$, где функция $\varphi(\xi,x)$ — «срезающее» преобразование [4], определяемое формулой

$$\varphi(\xi,x) = \exp\left(-\int\limits_{\xi}^{x}\frac{a(\xi_1)-a(0)}{\xi_1}d\xi_1\right).$$

Функцию $\bar{y}_0^1$ определим из уравнения

$$x\frac{\partial\bar{y}_0^1}{\partial x} + a(0)\bar{y}_0^1 = h(x)\varphi(x,0).$$

Решение уравнения (17) с учетом условия (18) имеет вид

$$\tilde{y}_0^1(x) = x^{-a(0)}\int\limits_0^x h(\xi)\varphi(\xi,x)\xi^{a(0)-1}d\xi.$$

Следуя работе [3], решение уравнения (19) будем строить в виде $\tilde{y}_0^2 = C(x)e^{\tau}$. Тогда решение уравнения (11) будет иметь вид

$$\tilde{y}_0(x,\tau) = x^{-a(0)}\int\limits_0^x h(\xi)\varphi(\xi,x)\xi^{a(0)-1}d\xi + C(x)e^{\tau}.$$

Используя теорему о разрешимости в пространстве безрезонансных решений [3], получим дифференциальное уравнение для определения функции $C(x)$. Решая его при условии $C(0) = y^0$, получим решение задачи (11), (12).

$$\tilde{y}_0(x,\tau) = x^{-a(0)} \int\limits_0^x h(\xi)\varphi(\xi,x)\xi^{a(0)-1}d\xi + y^0 e^{\tau}.$$

Проводя сужение (5) по формуле (4), будем иметь

$$y_0(x,\varepsilon) = x^{-a(0)} \int\limits_0^x h(\xi)\varphi(\xi,x)\xi^{a(0)-1}d\xi + y^0 \exp\left(-\int\limits_0^x \frac{a(\xi)}{\varepsilon+\xi}d\xi\right). \tag{20}$$

Полученное решение удовлетворяет задаче (1), (2) с точностью до слагаемых, содержащих множитель ε. Первое слагаемое в (20) представляет регулярную часть решения $y_0(x,\epsilon)$ и совпадает с решением предельного уравнения (3).

3. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка метод регуляризации можно применить следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$(\varepsilon+x)^2y'' + (\varepsilon+x)y' + a^2y = h(x), \quad a = \text{const} \tag{21}$$

при начальных условиях

$$y(0,\varepsilon) = y^0, \quad y'(0,\varepsilon) = y^1. \tag{22}$$

Введя замену переменной $z = (\varepsilon+x)y'$, сведем задачу (21), (22) к системе уравнений

$$(\varepsilon+x)\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} y(0,\varepsilon) \\ z(0,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $z^0 = \varepsilon y^1$. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы собственные значения матрицы удовлетворяли следующим условиям:

(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

(ii) $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$.

Введем регуляризирующие функции по формуле

$$\tau_j = \int\limits_0^x \frac{\lambda_j}{\varepsilon+s}ds \equiv g_j(x,\varepsilon), \quad j = 1, 2, \tag{25}$$

и вместо задачи (21), (22) рассмотрим «расширенную» задачу

$$(\varepsilon+x)\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + ia\frac{\partial}{\partial \tau_1}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} - ia\frac{\partial}{\partial \tau_2}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(0,0,0,\varepsilon) \\ \tilde{z}(0,0,0,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

для функций $\tilde{y}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$, $\tilde{z}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$. Связь задачи (26), (27) с задачей (23), (24) состоит в том, что если $\tilde{y}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$, $\tilde{z}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$ решение задачи (26), (27), то его «сужение» будет являться решением задачи (23), (24). Решение задачи (23), (24) будем строить в виде ряда:

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon) \\ \tilde{z}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\begin{pmatrix} \tilde{y}(x,\tau_1,\tau_2) \\ \tilde{z}(x,\tau_1,\tau_2) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в расширенную задачу (26), (27) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим задачи для определения коэффициентов ряда (28):

$$\begin{gathered}
\varepsilon^0 : x\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial\tau_1}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial\tau_2}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ h(x)\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\tilde{y}_0(0,0,0)\\ \tilde{z}_0(0,0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y^0\\ z^0\end{pmatrix}\\
\varepsilon^1 : x\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial\tau_1}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial\tau_2}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\tilde{y}_1(0,0,0)\\ \tilde{z}_1(0,0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varepsilon^k : x\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_k\\ \tilde{z}_k\end{pmatrix} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial\tau_1}\begin{pmatrix}\tilde{y}_k\\ \tilde{z}_k\end{pmatrix} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial\tau_2}\begin{pmatrix}\tilde{y}_k\\ \tilde{z}_k\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\tilde{y}_k\\ \tilde{z}_k\end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\tilde{y}_1(0,0,0)\\ \tilde{z}_1(0,0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{29}$$

Рекуррентные задачи (29) решаем в пространстве, описанном в работе [3]. Решение задачи (29) при ε^0 имеет вид:

$$\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} = -hA^{-1} + \frac{1}{2}\left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2} - i\frac{z^0}{a^2}\right)\begin{pmatrix}1\\ ia\end{pmatrix}e^{\tau_1} + \frac{1}{2}\left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2} + i\frac{z^0}{a^2}\right)\begin{pmatrix}1\\ -ia\end{pmatrix}e^{\tau_2}.$$

Проводя сужение полученного решения по формуле (25), получим главный член асимптотики решения задачи (21), (22):

$$y_0(x) = \frac{h(x)}{a^2} + \frac{1}{2}\left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2} - i\frac{z^0}{a^2}\right)\left(\frac{\varepsilon+a}{\varepsilon}\right)^{ia} + \frac{1}{2}\left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2} + i\frac{z^0}{a^2}\right)\left(\frac{\varepsilon+a}{\varepsilon}\right)^{-ia}.$$

4. Уравнение с частными производными. Задача Гурса. Применение метода регуляризации для сингулярно возмущенных уравнений с частными производными рассмотрим на примере задачи Гурса:

$$(\varepsilon+t)U_{xt} + a(x,t)U_x = h(x,t,\varepsilon), \tag{30}$$

$$U(x,0,\varepsilon) = \mu(x,\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \tag{31}$$

$$U(0,t,\varepsilon) = \gamma(t,\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{32}$$

где

$$\begin{gathered}
h(x,t,\varepsilon) = h_0(x,t) + \varepsilon h_1(x,t) + \ldots + \varepsilon^n h_n(x,t) + O(\varepsilon^{n+1}),\\
\gamma(t,\varepsilon) = \gamma_0(t) + \varepsilon\gamma_1(t) + \ldots + \varepsilon^n\gamma_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}),\\
\mu(x,\varepsilon) = \mu_0(x) + \varepsilon\mu_1(x) + \ldots + \varepsilon^n\mu_n(x) + O(\varepsilon^{n+1}).
\end{gathered}$$

Функции $a(x,t)$, $h(x,t,\varepsilon)$ для простоты будем считать бесконечно дифференцируемыми, $\mu(x,\varepsilon)$, $\gamma(t,\varepsilon)$ — непрерывно дифференцируемые функции; $a(x,0) > 0$, $\gamma(0,\varepsilon) = \mu(0,\varepsilon)$.

В уравнении (30) введём обозначение

$$U_x = y(x,t,\varepsilon). \tag{33}$$

Задачу (30), (31) перепишем в виде:

$$(\varepsilon+t)\frac{\partial y}{\partial t} + a(x,t)y = h(x,t,\varepsilon) \tag{34}$$

$$y(x,0,\varepsilon) = \dot{\mu}(x,\varepsilon). \tag{35}$$

Регуляризирующую функцию введём по формуле

$$\tau = -\int\limits_0^t \frac{a(x,s)}{\varepsilon + s} ds \equiv g(x,t,\varepsilon). \tag{36}$$

Тогда для (34), (35) соответствующая расширенная задача примет вид:

$$(\varepsilon + t)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} + a(x,t)\tilde{y} = h(x,t,\varepsilon), \tag{37}$$

$$\tilde{y}(x,0,0,\varepsilon) = \dot{\mu}(x,\varepsilon). \tag{38}$$

Необходимым условием регуляризации является равенство:

$$\tilde{y}|_{g(x,t,\varepsilon)} = y(x,t,\varepsilon).$$

Функцию $\tilde{y}(x,t,\tau,\varepsilon)$ — решение задачи (37), (38) ищем в виде ряда классической теории возмущений:

$$\tilde{y}(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{y}_i(x,t,\tau),$$

где коэффициенты определяются из следующих задач:

$$t\frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial \tau} + a(x,t)\tilde{y}_0 = h_0(x,t), \tag{39}$$

$$\tilde{y}_0(x,0,0) = \dot{\mu}_0(x), \tag{40}$$

$$t\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \tau} + a(x,t)\tilde{y}_i = h_i(x,t) - \frac{\partial \tilde{y}_{i-1}}{\partial t}, \tag{41}$$

$$\tilde{y}_i(x,0,0) = \dot{\mu}_i(x). \tag{42}$$

Схему построения решений задач (39)—(42) рассмотрим на примере задачи (39), (40). Для решения задачи (39), (40) воспользуемся тем же приёмом, что и при решении задачи (11), (12), т.е. функцию $\tilde{y}(x,t,\tau)$ будем искать в виде суммы:

$$\tilde{y}(x,t,\tau) = \tilde{y}_0^1 + y_0^2,$$

где $\tilde{y}_0^1$ — частное решение уравнения:

$$t\frac{\partial \tilde{y}_0^1}{\partial t} + a(x,t)\tilde{y}_0^1 = h_0(x,t),$$

удовлетворяющее условию

$$|\tilde{y}_0^1(x,0)| < \infty. \tag{43}$$

$\tilde{y}_0^2$ — решение уравнения:

$$t\frac{\partial \tilde{y}_0^2}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial \tilde{y}_0^2}{\partial \tau} + a(x,t)\tilde{y}_0^2 = 0. \tag{44}$$

Поступая так же как при решении уравнения (17), получим:

$$\tilde{y}_0^1(x,t) = t^{-a(x,0)}\varphi(x,t,0)\left(C_1(x) + \int\limits_0^t h_0(x,xi)\varphi(x,0,\xi)\xi^{a(x,0)-1}d\xi\right),$$

где

$$\varphi(x,t,0) = \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{a(x,\xi) - a(x,0)}{\xi} d\xi\right).$$

С учётом (43), функция $\tilde{y}_0^1(x,t)$ примет вид

$$\tilde{y}_0^1(x,t) = t^{-a(x,0)} \int\limits_0^t h_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,t)\xi^{a(x,0)-1}d\xi.$$

Решение уравнения (44) будем строить в виде

$$\tilde{y}_0^2(x,t,\tau) = C(x,t)e^{\tau}.$$

Тогда

$$\tilde{y}_0(x,t,\tau) = t^{-a(x,0)} \int\limits_0^t h_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,t)\xi^{a(x,0)-1}d\xi + C(x,t)e^{\tau}. \tag{45}$$

Подставляя последнее выражение в (40), получим начальное условие для определения функции $C(x,t)$:

$$C(x,0) = \dot{\mu}_0(x). \tag{46}$$

Чтобы получить уравнение для определения функции $C(x,t)$, воспользуемся теоремой о разрешимости в пространстве безрезонансных решений [3]. Уравнение для определения функции $C(x,t)$ будет иметь вид:

$$C'_t(x,t) = 0.$$

Присоединяя к этому уравнению условие (46), получим задачу, из которой функция $C(x,t)$ определяется однозначно. Возвращаясь к (45), получим окончательный вид решения задачи (39), (40):

$$\tilde{y}_0(x,t,\tau) = t^{-a(x,0)}\varphi(x,0,t) \int\limits_0^t h_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,0)\xi^{a(x,0)-1}d\xi + \dot{\mu}_0(x)e^{\tau}.$$

Проведя в последнем выражении сужение по формуле (36), получим:

$$y_0(x,t) = t^{-a(x,0)}\varphi(x,0,t) \int\limits_0^t h_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,0)\xi^{a(x,0)-1}d\xi + \dot{\mu}_0(x)\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{a(x,s)}{\varepsilon+s}ds\right).$$

Возвращаясь к функции $U_0(x,t)$ с учетом (32)и (33), будем иметь

$$U_0(x,t) = \int\limits_0^x t^{-a(\zeta,0)}\varphi(\zeta,0,t) \int\limits_0^t h_0(\zeta,\xi)\varphi(\zeta,\xi,0)\xi^{a(\zeta,0)-1}d\xi d\zeta +$$

$$+ \gamma_0(t) + \int\limits_0^x \dot{\mu}_0(\zeta)\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{a(\zeta,s)}{\varepsilon+s}ds\right)d\zeta.$$

Последнее выражение удовлетворяет задаче (30)—(32) с точностью до слагаемых, содержащих множитель ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
2. *Ломов С. А.* Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1966. — *30*, № 3. — С. 525–572.
3. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
4. *Ломов С. А.* Обобщение теоремы Фукса на неаналитический случай// Мат. сб. — 1964. — *65*, № 4. — С. 498–511.
5. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.

Захарова Ирина Валентиновна
Иркутский государственный университет
E-mail: zair@math.isu.ru