ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 57–63
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-57-63

УДК 517.988

# О МАЛЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2022 г. **Р. Ю. ЛЕОНТЬЕВ**

Аннотация. Рассматривается нелинейное операторное уравнение с векторным параметром, для которого не выполняется теорема о неявном операторе, поскольку оператор в главной части уравнения не является непрерывно обратимым в заданной точке. Доказана теорема, которая дает достаточные условия существования и позволяет строить малое непрерывное решение в некоторой области.

***Ключевые слова:*** банахово пространство, нелинейный оператор, операторное уравнение, непрерывное решение, секториальная окрестность нуля.

# ON SMALL SOLUTIONS OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS WITH NONINVERTIBLE OPERATOR IN THE PRINCIPAL TERM

© 2022 **R. Yu. LEONTIEV**

Abstract. In this paper, we examine a nonlinear operator equation with vector parameter, which does not satisfy the implicit operator theorem since the operator in the principal term is not continuously invertible at a given point. We prove a sufficient conditions of existing small continuous solution and propose an algorithm of constructing such solution in some domain.

***Keywords and phrases:*** Banach space, nonlinear operator, operator equation, continuous solution, sectorial neighborhood of zero.

***AMS Subject Classification:*** 47J99

Пусть $X$, $Y$ — банаховы пространства, $\Lambda$ — линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x,\lambda) = 0, \tag{1}$$

где $F\colon X \times \Lambda \to Y$.

Оператор $F$ является непрерывным в окрестности нуля по $x$ и $\lambda$. Имеет место равенство $F(0,0) = 0$. Изучим вопрос о существовании таких малых непрерывных решений уравнения (1), что $x(0) = 0$, а также о способе их построения.

**Определение 1.** Будем говорить, что открытое множество $S \subset \Lambda$ есть секториальная окрестность точки $0 \in \Lambda$, если $0 \in \partial S$, где $\partial S$ — граница множества $S$.

Предположим, что оператор $F(x,\lambda)$ имеет производную Фреше по первому аргументу, непрерывную по $x$ и $\lambda$ в окрестности нуля, и пусть выполнена оценка:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \quad \forall \lambda \in S, \tag{2}$$

где $a(\lambda)$ — непрерывный функционал, $a(\lambda)\colon S \to \mathbb{R}_+$; $a(0) = 0$, т.е.

$$\lim_{S \ni \lambda \to 0} a(\lambda) = 0;$$

$S$ — секториальная окрестность нуля.

Приведем для уравнения (1) достаточные условия существования в секториальной окрестности нуля $S$ малого решения $x(\lambda)$, а также предложим способ построения этого решения.

Заметим, что стандартная теорема о неявном операторе в данном случае не применима, так как оператор $F_x(0,0)$ не является непрерывно обратимым в силу оценки (2) и равенства $a(0) = 0$.

В [6] были выделены классы уравнений вида (1), которые при выполнении оценки вида (2) приводятся к эквивалентным уравнениям, имеющим единственное малое решение, существование которого можно доказать при помощи принципа сжимающих отображений. Асимптотику таких решений можно построить с помощью метода последовательных приближений. Ряд результатов, продолжающих это исследование, представлен в работах [1–5].

Пусть $r$ — положительное число и $S$ — секториальная окрестность нуля. Введем множество

$$\Omega = \{(x,\lambda) \in X \times \Lambda, \mid \|x\| \leqslant a(\lambda) r,\ \lambda \in S\}.$$

**Определение 2.** Если найдутся такие числа $r_0 \in (0, r]$ и $\varepsilon > 0$, что из всех малых решений уравнения (1), определенных в области $\Omega$, только одно решение $x^*(\lambda)$ попадает в область

$$\Omega_0 = \{(x,\lambda) \in X \times \Lambda \mid \|x\| \leqslant a(\lambda) r_0,\ \lambda \in S,\ 0 < \|\lambda\| < \varepsilon\},$$

то решение $x^*(\lambda)$ будем называть *минимальным решением* уравнения (1) в области $S$, непрерывным в точке $\lambda = 0$ (далее кратко «минимальной непрерывной ветвью»).

Заметим, что если уравнение (1) при всех $\lambda \in S$ имеет решение $x(\lambda) = 0$, то минимальной непрерывной ветвью будет нулевое решение. Данное определение подразумевает либо единственность решения, которое мы называем минимальной непрерывной ветвью, либо отсутствие такого решения вовсе.

Ниже для уравнения (1) приведена теорема, условия которой являются достаточными для существования минимальной непрерывной ветви в секториальной окрестности нуля $S_0 \subseteq S \subset \Lambda$.

**Теорема 1.** *Пусть в области $\Omega$ выполнены следующие условия*:

(i) *оператор $F(x,\lambda)$ непрерывен по $x$ и $\lambda$ и имеет частную производную Фреше $F_x(x,\lambda)$, непрерывную по $x$ и $\lambda$;*

(ii) $F(0,0) = 0$*; оператор $F_x(0,\lambda)$ непрерывно обратим при всех $\lambda \in S$ на всем пространстве $Y$, причем при $S \ni \lambda \to 0$ имеет место оценка* (2)*;*

(iii) *найдется некоторая константа $L > 0$, что для каждого $\lambda \in S$ справедливо неравенство*

$$|F_x(x,\lambda) - F_x(0,\lambda)\| \leqslant L\|x\|;$$

(iv) *при $S \ni \lambda \to 0$ имеет место оценка*

$$\|F(0,\lambda)\| = o(a^2(\lambda)).$$

*Тогда найдутся такие число $r_0 \in (0, r]$ и секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение* (1) *имеет в шаре $\|x\| \leqslant a(\lambda) r_0$ минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \to 0$ при $S_0 \ni \lambda \to 0$, которую можно построить методом последовательных приближений.*

*Доказательство.* Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega$, как указано выше, и $S$ — секториальная окрестность нуля. Перепишем уравнение (1) в эквивалентной форме

$$x = x - F_x^{-1}(0,\lambda) F(x,\lambda),$$

которая справедлива для всех $\lambda \in S$ в силу оценки (2). В полученном уравнении сделаем замену $x = a(\lambda)V$, где $a(\lambda)$ — функционал из (2). Получим

$$a(\lambda)V = a(\lambda)V - F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V,\lambda).$$

Поскольку $a(\lambda) \neq 0$ при всех $\lambda \in S$, получаем

$$V = V - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V,\lambda).$$

Обозначив правую часть последнего равенства через $\Phi(V,\lambda)$, имеем

$$V = \Phi(V,\lambda). \tag{3}$$

Покажем, что существуют такие секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и число $0 < r_0 \leqslant r$, что для всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ к уравнению (3) применим принцип сжимающих отображений.

Для этого сначала покажем, что существует такое число $0 < r_0 \leqslant r$, что для всех $\lambda \in S$ оператор $\Phi(V,\lambda)$ является сжатием в шаре $\|V\| \leqslant r_0$. Действительно, учитывая вид оператора $\Phi(V,\lambda)$, имеем:

$$\|\Phi(V_1,\lambda) - \Phi(V_2,\lambda)\| = \left\|V_1 - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V_1,\lambda) - V_2 + \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V_2,\lambda)\right\|.$$

В полученном выражении перегруппируем слагаемые и вынесем оператор $F_x^{-1}(0,\lambda)$ за скобку:

$$\left\|(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0,\lambda)\Big[F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda)\Big]\right\| =$$
$$= \left\|F_x^{-1}(0,\lambda) \times \left[F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}(F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda))\right]\right\|.$$

Оценим норму произведения:

$$\left\|F_x^{-1}(0,\lambda) \times \left[F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\Big(F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda)\Big)\right]\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\Big(F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda)\Big)\right\|.$$

В последнем выражении воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа, которая имеет вид

$$F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda) = \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big)d\Theta\big(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\big).$$

Тогда, продолжая оценку, имеем:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\Big(F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda)\Big)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big)d\Theta\Big(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\Big)\right\|.$$

Сокращая на $a(\lambda)$ в числителе и знаменателе, получаем:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big)d\Theta\big(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\big)\right\| =$$
$$= \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big)d\Theta(V_1 - V_2)\right\|.$$

Вынесем $V_1 - V_2$ за скобку:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\| F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda\Big) d\Theta (V_1 - V_2) \right\| =$$

$$= \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\| \left[ F_x(0,\lambda) - \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda\Big) d\Theta \right] (V_1 - V_2) \right\|.$$

Внесём $F_x(0,\lambda)$ под знак интеграла, так как он не зависит от $\Theta$:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\| \left[ F_x(0,\lambda) - \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda\Big) d\Theta \right] (V_1 - V_2) \right\| =$$

$$= \big\|F_x^{-1}(0,\lambda)\big\| \times \left\| \int\limits_0^1 \Big[ F_x(0,\lambda) - F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda\Big) \Big] d\Theta (V_1 - V_2) \right\|.$$

Далее применим оценку нормы произведения и оценку нормы интеграла. Получим:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\| \int\limits_0^1 \Big[ F_x(0,\lambda) - F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda\Big) \Big] d\Theta (V_1 - V_2) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \int\limits_0^1 \Big\| F_x(0,\lambda) - F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda\Big) \Big\| d\Theta \|V_1 - V_2\|.$$

Согласно условию (iii) доказываемой теоремы имеем:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \int\limits_0^1 \Big\| F_x(0,\lambda) - F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda\Big) \Big\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \int\limits_0^1 L \Big\| a(\lambda)\big(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)\big) \Big\| d\Theta \|V_1 - V_2\|.$$

Вынесем $L$ и $a(\lambda)$ из под знака интеграла, а под знаком интеграла применим неравенство треугольника для норм:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \int\limits_0^1 L \Big\| a(\lambda)\big(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)\big) \Big\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times La(\lambda) \int\limits_0^1 \Big( \|V_2\| + \Theta\big(\|V_1\| + \|V_2\|\big) \Big) d\Theta \|V_1 - V_2\|.$$

Дальнейшую оценку будем производить в шаре $\|V\| \leqslant r_0$, где $0 < r_0 \leqslant r$:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times La(\lambda) \int\limits_0^1 \Big( \|V_2\| + \Theta\big(\|V_1\| + \|V_2\|\big) \Big) d\Theta \|V_1 - V_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times La(\lambda) r_0 \int\limits_0^1 (1 + 2\Theta) d\Theta \|V_1 - V_2\|.$$

После вычисления интеграла получим:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times La(\lambda)r_0 \int_0^1 (1+2\Theta)d\Theta \|V_1 - V_2\| = a(\lambda)\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times 2Lr_0\|V_1 - V_2\|.$$

Согласно условию (ii) доказываемой теоремы неравенство

$$a(\lambda)\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \leqslant C$$

имеет место при всех $\lambda \in S$, где $C$ — константа. Пусть $q$ — число из интервала $(0,1)$. Выберем $r_0$ так, чтобы $r_0 = \min\{r, q/(2CL)\}$. Тогда оператор $\Phi(V,\lambda)$ будет сжатием с коэффициентом сжатия $q$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ для всех $\lambda \in S$.

Теперь покажем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что для всех $\lambda \in S_0$ и значениях $V$ из шара $\|V\| \leqslant r_0$ значения оператора $\Phi(V,\lambda)$ удовлетворяют оценке $\|\Phi(V,\lambda)\| \leqslant r_0$, т.е. отображают замкнутый шар $\overline{S_{r_0}(0)}$ в себя. Действительно,

$$\|\Phi(V,\lambda)\| = \Big\|\Phi(V,\lambda) - \Phi(0,\lambda) + \Phi(0,\lambda)\Big\| \leqslant \Big\|\Phi(V,\lambda) - \Phi(0,\lambda)\Big\| + \|\Phi(0,\lambda)\|.$$

Здесь мы добавили и вычли $\Phi(0,\lambda)$ и применили неравенство треугольника для норм. Далее, учитывая сжимаемость оператора $\Phi(V,\lambda)$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ при всех $\lambda \in S$, имеем:

$$\Big\|\Phi(V,\lambda) - \Phi(0,\lambda)\Big\| + \|\Phi(0,\lambda)\| \leqslant q\|V\| + \|\Phi(0,\lambda)\| \leqslant qr_0 + \|\Phi(0,\lambda)\|.$$

Выпишем оператор $\Phi(0,\lambda)$ и применим оценку нормы произведения:

$$qr_0 + \|\Phi(0,\lambda)\| = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|F_x^{-1}(0,\lambda)F(0,\lambda)\| \leqslant qr_0 + \frac{\|F_x^{-1}(0,\lambda)\|}{a(\lambda)}\|F(0,\lambda)\|.$$

В силу условий (ii) и (iv) доказываемой теоремы второе слагаемое в последнем выражении является сколь угодно малой величиной при $S \ni \lambda \to 0$. Поэтому существует такая секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$, что для всех $\lambda \in S_0$

$$\frac{\|F_x^{-1}(0,\lambda)\|}{a(\lambda)}\|F(0,\lambda)\| \leqslant (1-q)r_0,$$

откуда и получаем, что для всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ выполняется неравенство $\|\Phi(V,\lambda)\| \leqslant r_0$.

Тогда на основании принципа сжимающих отображений уравнение (3) для всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ имеет единственное малое решение, которое можно строить методом последовательных приближений по формуле

$$V_n = \Phi(V_{n-1},\lambda), \tag{4}$$

сходящимся при любом начальном приближении $V_0$ из шара $\|V_0\| \leqslant r_0$, в том числе при $V_0 = 0$. Тогда искомое решение уравнения (3)

$$V_* = \lim_{n\to\infty} V_n,$$

а $x_* = a(\lambda)V_*$ будет малым решением уравнения (1). Следует отметить, что уравнение (1) кроме $x_*$ может иметь и другие малые решения. □

**Пример 1.** Покажем, что уравнение

$$F(x,\lambda) \equiv \int_0^1 tsx(s)ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^3(s)ds - f(t,\lambda) = 0,$$

где $x(t) \in C_{[0,1]}$, $f(t,\lambda) = m(t)\lambda^n$, $m(t) \in C_{[0,1]}$, $n > 2$, $S$ — проколотая окрестность нуля, имеет непрерывное при $t \in [0,1]$ решение $x_\lambda(t) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$.

*Решение.* Дифференциал Фреше имеет вид

$$F_x(x,\lambda)h = \int_0^1 tsh(s)ds + \lambda h(t) - 3\int_0^1 x^2(s)h(s)ds.$$

Согласно условиям теорем, оценка на норму оператора $F_x^{-1}(0,\lambda)$ должна удовлетворять условию (2). Найдем $F_x^{-1}(0,\lambda)$. Для этого разрешим уравнение

$$\int_0^1 tsh(s)ds + \lambda h(t) = f(t) \tag{5}$$

относительно $h(t)$, где

$$\int_0^1 ts[\cdot]ds + \lambda[\cdot] \equiv F_x(0,\lambda).$$

Вынесем множитель $t$ за знак интеграла и введем обозначение

$$\int_0^1 s\cdot h(s)ds = C_1. \tag{6}$$

Тогда из (5) получим:

$$h(t) = \frac{1}{\lambda}(f(t) - tC_1).$$

Подставляя полученное выражение для $h(t)$ в равенство (6), получим алгебраическое уравнение относительно $C_1$, после разрешения которого получим

$$C_1 = \frac{3}{3\lambda+1}\int_0^1 sf(s)ds.$$

Тогда оператор $F_x^{-1}(0,\lambda)$ имеет вид

$$F_x^{-1}(0,\lambda)f = \frac{f(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda+1)\lambda}\int_0^1 sf(s)ds.$$

Следовательно, оценка (2) выполняется:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \text{при} \quad \lambda\to 0, \quad \lambda\neq 0.$$

Теперь проверим, что выполнены остальные условия теоремы 1.

(i) Оператор $F(x,\lambda)$ является непрерывным по $x$ и $\lambda$ в некоторой окрестности нуля $\|x\|\leqslant r$, $|\lambda|<\rho$. Производная Фреше $F_x(x,\lambda)$ тоже непрерывна по $x$ и $\lambda$ в некоторой окрестности нуля $\|x\|\leqslant r$, $|\lambda|<\rho$.

(ii) Оператор $F_x(0,\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой проколотой окрестности нуля, и имеет место оценка (2).

(iii) Из оценки

$$\|F_x(x,\lambda)h - F_x(0,\lambda)h\| = \left\|3\int_0^1 x^2(s)h(s)ds\right\| \leqslant 3r\|x\|\|h\|,$$

где $\|x\|\leqslant r$, следует, что

$$\|F_x(x,\lambda) - F_x(0,\lambda)\| \leqslant 3r\|x\|.$$

(iv) $\|F(0,\lambda)\| = \|f(t,\lambda)\| = \|m(t)\lambda^n\| = \|m(t)\||\lambda|^n$, где $n>2$.

Следовательно, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому можно утверждать, что данное уравнение имеет решение $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ в некоторой проколотой окрестности нуля $0 < |\lambda| < r_0$. Это решение будет иметь вид $x = \lambda V$, где $V(\lambda)$ строится методом последовательных приближений при начальном приближении $V_0 = 0$. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Леонтьев Р. Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. информ. — 2009. — № 9. — С. 77–83.
2. *Леонтьев Р. Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений// Тр. Междунар. конф. «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования» (Москва, 2009). — М.: Изд-во РУДН, 2009. — С. 276–278.
3. *Леонтьев Р. Ю.* Итерационные методы поиска решений нелинейных уравнений в секториальных областях// Тр. Междунар. науч. семин. по обратным и некорректно поставленным задачам. — М.: Изд-во РУДН, 2015. — С. 116.
4. *Леонтьев Р. Ю.* О малых решениях нелинейных операторных уравнений с векторным параметром// Мат. XII Междунар. конф. «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем». — Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. — С. 80–83.
5. *Леонтьев Р. Ю., Сидоров Н. А.* Униформизация и последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Мат. — 2011. — *4*, № 3. — С. 116–123.
6. *Сидоров Н. А.* Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы// Нелин. границ. задачи. — 2004. — № 14. — С. 161–164.



Леонтьев Роман Юрьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `romanisu@yandex.ru`