ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 64–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-64-72

УДК 517.9

СМЕШАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. М. В. ПЛЕХАНОВА, А. Ф. ШУКЛИНА

Аннотация. В работе рассматриваются задачи, в которых используются одновременно два типа управляющего воздействия: распределенное и стартовое. Основные результаты касаются разрешимости класса задач оптимального управления для систем, состояние которых описывается уравнением в банаховом пространстве, разрешенным относительно дробной производной Герасимова—Капуто, нелинейным по младшим дробным производным. Рассматриваются выпуклые полунепрерывные снизу, коэрцитивные функционалы, компромиссные или не зависящие от управления. Абстрактные результаты продемонстрированы на примере задачи управления для дробной модели метастабильных состояний в полупроводниках.

***Ключевые слова*:** оптимальное управление, смешанное управление, уравнение дробного порядка, производная Герасимова—Капуто, нелинейное эволюционное уравнение.

MIXED CONTROL FOR SEMILINEAR FRACTIONAL EQUATIONS

© 2022 M. V. PLEKHANOVA, A. F. SHUKLINA

Abstract. In this work, we consider problems in which two types of controls (distributed and starting control functions) are used simultaneously. The main results concern the solvability of a class of optimal control problems for systems whose states are described by equations in Banach spaces that are resolved with respect to the Gerasimov–Caputo fractional derivative and nonlinear in the lowest fractional derivatives. We consider convex lower semicontinuous, coercive functionals, which are compromise or control-independent. Abstract results are demonstrated by an example of a control problem for a fractional model of metastable states in semiconductors.

***Keywords and phrases*:** optimal control, mixed control, fractional equation, Gerasimov–Caputo derivative, nonlinear evolutionary equation.

***AMS Subject Classification*:** 49J27, 49J20, 34J20, 34K35

1. Введение. Поиски новых возможностей моделирования сложных процессов привели к развитию дробного интегро-дифференциального исчисления [1, 9, 10, 18, 20]. Различные задачи для систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, вызывают все больший интерес исследователей [11–13, 17, 19, 27]. В данной работе мы рассмотрим задачу смешанного управления в банаховых пространствах $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ для эволюционного уравнения дробного порядка

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(r)}(t)) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \tag{1}$$

$$z^{(k)}(t_0) = v_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 21-51-54003) и Правительства Российской Федерации (договор 02.A03.21.0011, приказ 211).

$$(u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J(z, u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \to \inf. \tag{4}$$

Здесь $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Герасимова—Капуто, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ (т.е. линейный и непрерывный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$), $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X})$ (линейный и непрерывный оператор из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{X}$), $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ — нелинейный оператор, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое и замкнутое множество допустимых управлений в некотором пространстве управлений, J — функционал качества.

Управление в задаче (1)—(4) состоит из набора функций $(u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$, в котором u представляет распределенное управление, а $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ — стартовое. Внимание авторов сосредоточено на выводе условий разрешимости задачи (1)—(4).

Ранее авторами рассматривались задачи смешанного управления для уравнений целого порядка [7,8,15,23]. Для эволюционных уравнений дробного порядка в работах М. В. Плехановой исследовались задачи с управлением одного типа, стартовым [2] или распределённым [4,5,21,22,24–26].

Доказательства в данной работе опираются на схему исследования А. В. Фурсикова [14], при которой решение находится среди наборов, состоящих из функции состояния и функций стартового управления. Проверяется выполнение условия непустоты множества допустимых наборов, непрерывность в выбранных функциональных пространствах операторов, задающих уравнение состояния, так называемое условие компактности и коэрцитивность выпуклого, ограниченного снизу и полунепрерывного снизу функционала качества. Для непустоты множества допустимых наборов используются условия существования сильного решения задачи Коши (1), (2), полученные в работе [21]. Нелинейный оператор должен удовлетворять условию равномерной липшицевости. В случае, когда нелинейный оператор не обладает таким свойством, но при этом является локально липшицевым по фазовым переменным, также удается установить разрешимость задачи управления при условии существования хотя бы одного допустимого набора «состояние-управление». Именно в подобном ключе рассмотрена задача управления для дробной модели метастабильных состояний в полупроводниках, для установления разрешимости которой использованы полученные абстрактные результаты.

2. Сильное решение для полулинейного дробного уравнения. Примем следующие обозначения: $g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1} t^{\delta-1}$ для $\delta > 0$, $t > 0$, $\tilde{g}_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}(t-t_0)^{\delta-1}$,

$$J_t^\delta h(t) := \int_{t_0}^{t} g_\delta(t-s) h(s)\,ds$$

для $t > t_0$. Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 — тождественный оператор. Производная Герасимова—Капуто функции h определена следующим образом (см. [16, с. 11]):

$$D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}(t)\right), \quad t \geqslant t_0.$$

Результаты этого параграфа, приведенные ниже, получены в работе [5].

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Для нелинейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) \tag{5}$$

рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{6}$$

Здесь нелинейный оператор $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}$ предполагается каратеодориевым, т.е. для всех $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$ он задает измеримое отображение на (t_0, T) и для почти всех $t \in (t_0, T)$ является непрерывным по $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$.

Зафиксируем некоторое $q > 1$. Сильным решением задачи (5), (6) на интервале (t_0, T) называется функция $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, для которой

$$J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z}),$$

выполняются условия (6) и почти всюду на (t_0, T) выполняется равенство (5).

Далее черта над символом будет означать, что речь идет о наборе m элементов с индексами от нуля до $m-1$, например, $\overline{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$. Отображение $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}$ будем называть равномерно липшицевым по $\overline{y}$, если существует такое $l > 0$, что при почти всех $t \in (t_0, T)$, всех $\overline{y}$, $\overline{z}$ из $\mathcal{Z}^m$ выполняется неравентво

$$\|F(t, \overline{y}) - F(t, \overline{z})\|_{\mathcal{Z}} \leqslant l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathcal{Z}}.$$

Теорема 1. *Пусть $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, отображение $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{y}$, при некотором $\overline{v} \in \mathcal{Z}^m$ $F(\cdot, \overline{v}) \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$. Тогда при любых $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$ задача (5), (6) имеет единственное сильное решение на (t_0, T).*

3. Смешанное управление для полулинейного невырожденного уравнения дробного порядка. Пусть $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{Z}$ компактно вложено в $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{U}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$. Введём в рассмотрение пространство управлений $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой

$$\|(u, v)\|_{\mathfrak{U}}^2 = \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^2 + \|v\|_{\mathcal{Z}^m}^2.$$

Рассмотрим задачу смешанного управления

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(r)}(t)) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \tag{7}$$

$$z^{(k)}(t_0) = v_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{8}$$

$$(u, v) = (u, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{9}$$

$$J(z, u, \overline{v}) = J(z, u, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \to \inf, \tag{10}$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, $\mathcal{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$, J — некоторый функционал качества, $m \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha \leqslant m$, $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Лемма 1 (см. [24]). *Пусть $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\mathcal{X}_0$ компактно вложено в $\mathcal{X}$, которое непрерывно вложено в $\mathcal{X}_1$, $q, q_1 \in (1, +\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$ пространство*

$$W_{q,q_1}^m(t_0, T; \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1) \equiv \left\{z \in W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X}_0) : z^{(m)} \in L_{q_1}(t_0, T; \mathcal{X}_1)\right\}$$

с нормой

$$\|x\|_{W_{q,q_1}^m(t_0, T; \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)} = \|x\|_{W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X}_0)} + \|x^{(m)}\|_{L_{q_1}(t_0, T; \mathcal{X}_1)}$$

является банаховым пространством, непрерывно вложенным в $C([t_0, T]; \mathcal{X}_1)$ и компактно вложенным в $W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X})$.

Следствие 1 (см. [24]). *Пусть $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}_0$ компактно вложено в $\mathcal{X}_1$, $q \in (1, +\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$ $W_q^m(t_0, T; \mathcal{X}_0)$ компактно вложено в $W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X}_1)$.*

Решения задачи (7), (8) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) := \left\{z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) : J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z})\right\}.$$

Лемма 2 (см. [21]). *$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ является банаховым пространством с нормой*

$$\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Z})}.$$

Введем в рассмотрение непрерывный оператор $\gamma_0\colon C([t_0,T];\mathcal{Z}) \to \mathcal{Z}$, $\gamma_0 x = x(t_0)$. Естественно, он является непрерывным и на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$, т.е. $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z});\mathcal{Z})$.

Множество наборов $(z,u,\bar{v}) = (z,u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})$ будем называть множеством допустимых наборов $\mathfrak{W}$ задачи (7)—(10), если $z \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ — сильное решение задачи (7), (8) с $(u,\bar{v}) \in \mathcal{U}_\partial$ и $J(z,u,\bar{v}) < \infty$. Решением задачи (7)—(10) называется набор $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующий функционал качества:

$$J(\hat{z},\hat{u},\bar{v}) = \inf_{(z,u,\bar{v})\in\mathfrak{W}} J(z,u,\bar{v}).$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha-m+1)^{-1}$, $r = m-2$, отображение $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}_1^{m-1} \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^{m-1}$, $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}$, при некотором $\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot,\overline{y}) \in L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на множестве $\mathfrak{Y}\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, коэрцитивный на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$. Тогда задача (7)—(10) имеет решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{U}_\partial$.*

Доказательство. С учётом условий на отображение $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ по теореме 1 множество допустимых наборов $\mathfrak{W}$ непусто, поскольку задача (7), (8) разрешима при любом допустимом управлении $(u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial$. Используем [14, с. 17, теорема 2.4] для абстрактной задачи управления с нелинейным уравнением состояния для доказательства существования оптимального управления. Определим пространства $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$, $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, $\mathfrak{V} = L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)\times\mathcal{Z}^m$ и операторы

$$\mathfrak{L}(z,u,\bar{v}) = \Big(D_t^\alpha z - Az - Bu,\ \gamma_0 z - v_0, \gamma_0 z^{(1)} - v_1,\ldots,\gamma_0 z^{(m-1)} - v_{m-1}\Big),$$

$$\mathfrak{F}(z(\cdot)) = -\Big(F(\cdot,z(\cdot),\ z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)),0,0,\ldots,0\Big),$$

задающие уравнение состояния для задачи управления в виде $\mathfrak{L}(z,u,\bar{v})+\mathfrak{F}(z) = 0$. Непрерывность оператора $\mathfrak{L}\colon \mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ следует из неравенств

$$\Big\|(D_t^\alpha z - Az - Bu,\ \gamma_0 z - v_0, \gamma_0 z^{(1)} - v_1,\ldots,\gamma_0 z^{(m-1)} - v_{m-1})\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{Z}^m} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\left(\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|\bar{v}\|_{\mathcal{Z}^m}\right) \leqslant C_1\|(z,u,\bar{v})\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathfrak{U}}.$$

Из соотношения $\|z_n - z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} \to 0$ при $n\to\infty$ и равномерной липшицевости оператора F получим

$$\Big\|F\big(\cdot,z_n(\cdot),z_n^{(1)}(\cdot),\ldots,z_n^{(m-2)}(\cdot)\big) - F\big(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)\big)\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{k=0}^{m-2}\|z_n^{(k)} - z^{(k)}\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z}_1)} \leqslant C_2\sum_{k=0}^{m-2}\|z_n^{(k)} - z^{(k)}\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})} \to 0;$$

следовательно, оператор $\mathfrak{F}\colon \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \to \mathfrak{V}$ непрерывен.

Взяв $\mathfrak{Y}_{-1} = W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, проверим остальные условия теоремы 2.4 [14, с. 17]. Пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в $W_q^{m-1}(t_0,T;\mathcal{Z})$ и поэтому в силу следствия 1 компактно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$. Для $v^* \in (L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*$ в силу равномерной липшицевости F

$$\left|v^*\Big(F\Big(\cdot,z_n(\cdot),z_n^{(1)}(\cdot),\ldots,z_n^{(m-2)}(\cdot)\Big),0,0,\ldots,0\Big) - F\Big(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)\Big),0,0,\ldots,0\Big)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*}\left\|F\Big(\cdot,z_n(\cdot),z_n^{(1)}(\cdot),\ldots,z_n^{(m-2)}(\cdot)\Big) - F\Big(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)\Big)\right\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2\|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*}\|z_n - z\|_{W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)}.$$

Это позволяет сделать вывод о непрерывной продолжимости функционала $w(\cdot) = v^*(\mathfrak{F}(\cdot))$ из $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ на $\mathfrak{Y}_{-1}$. $\square$

Для задачи без учета затрат на управление, т.е. с функционалом

$$J_0(z) \to \inf \tag{11}$$

аналогичный результат получаеся при добавлении требования ограниченности множества допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$, которое позволяет получить коэрцитивность J_0 как функционала от z, u, $\bar{v}$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $r = m - 2$, отображение $F\colon (t_0,T) \times \mathcal{Z}_1^{m-1} \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^{m-1}$, $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}$, при некотором $\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot,\overline{y}) \in L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество в $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал J_0 выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на множестве $\mathfrak{Y}$, коэрцитивный на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$. Тогда задача (7)—(9), (11) имеет решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$.*

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(z,u,\bar{v}) = \|z - z_d\|^{q_1}_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \delta\|u - u_d\|^{q_2}_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \delta\sum_{k=0}^{m-1}\|v_k - v_{dk}\|^{q_3}_{\mathcal{Z}} \to \inf \tag{12}$$

при заданных $q_1,q_2,q_3 \geqslant 1$, $z_d \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$, $u_d \in L_q(t_0,T;\mathcal{U})$, $v_{dk} \in \mathcal{Z}$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $\delta \geqslant 0$.

Следствие 2. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $r = m - 2$, отображение $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}_1^{m-1} \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^{m-1}$, $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}$, при некотором $\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot,\overline{y}) \in L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$. Тогда при $\delta > 0$ существует решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{U}_\partial$ задачи (7)—(9), (12). Для $\delta = 0$ утверждение справедливо при дополнительном условии ограниченности $\mathcal{U}_\partial$.*

Доказательство. Возьмем $\mathfrak{Y} = C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$ и при $\delta > 0$ получим требуемое по теореме 2, а при $\delta = 0$ — по теореме 3, если докажем коэрцитивность функционала. Имеем при $J(z,u,\bar{v}) \leqslant R$ для некоторого $p > 0$

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|\bar{v}\|_{\mathcal{Z}^m} \leqslant \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1J^p(z,u,\bar{v}) + C_2 \leqslant \\
\leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|F(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)) - F(\cdot,\bar{0})\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \\
+ \|F(\cdot,\bar{0})\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1J^p(z,u,\bar{v}) + C_2 \leqslant \\
\leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + l\|z\|_{W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|F(\cdot,\bar{0})\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1J^p(z,u,\bar{v}) + C_2 \leqslant \\
\leqslant C_3J^p(z,u,\bar{v}) + C_4 \leqslant C_3R^p + C_4.
\end{aligned}$$

При $\delta = 0$ здесь используется ограниченность множества $\mathcal{U}_\partial$. $\square$

Аналогичный результат для задачи управления с функционалом

$$J(z,u,v) = \|z - z_d\|^{q_1}_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha z - D_t^\alpha z_d\|^{q_1}_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \delta\|u - u_d\|^{q_2}_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \delta\sum_{k=0}^{m-1}\|v_k - v_{dk}\|^{q_3}_{\mathcal{Z}} \to \inf$$

нетрудно получить, взяв $\mathfrak{Y} = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$. Коэрцитивность в этом случае получается сразу.

В приложениях условие равномерной липшицевости оператора F часто является слишком сильным. Но доказываемая с помощью этого условия непустота множества $\mathfrak{W}$ в некоторых случаях очевидна. Рассмотрим задачу оптимального управления в такой ситуации.

Назовем отображение $F\colon [t_0,T]\times\mathcal{Z}_1^m\to\mathcal{Z}_1$ локально липшицевым по $\overline{z}\in\mathcal{Z}_1$ равномерно по $t\in[t_0,T]$, если для любого $\overline{z}\in\mathcal{Z}_1^m$ существуют $\delta,l>0$, такие, что при всех $\overline{y}\in\mathcal{Z}_1^m$, для которых

$$\sum_{k=0}^{m-1}\|y_k-z_k\|_{\mathcal{Z}_1}<\delta,$$

для всех $t\in[t_0,T]$ выполняется неравенство

$$\Big\|F(t,y_0,y_1,\ldots,y_{m-1})-F(t,z_0,z_1,\ldots,z_{m-1})\Big\|_{\mathcal{Z}_1}\leqslant l\sum_{k=0}^{m-1}\|y_k-z_k\|_{\mathcal{Z}_1}.$$

Теорема 4. *Пусть $\alpha,q>1$, $r=m-2$, отображение $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}_1^{m-1};\mathcal{Z}_1)$ локально липшицево по $\overline{y}\in\mathcal{Z}_1$ равномерно по $t\in[t_0,T]$, при этом $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^{m-1};\mathcal{Z})$, $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U}=L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, для некоторого набора $(u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})\in\mathcal{U}_\partial$ существует сильное решение задачи (7), (8); пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathfrak{Y}\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, коэрцитивный на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$. Тогда существует решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1})\in\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{U}_\partial$ задачи (7)—(10).*

Доказательство. Пусть $\|z_n-z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})}\to 0$ при $n\to\infty$; тогда при достаточно большом $n\in\mathbb{N}$ сразу для всех $t\in[t_0,T]$ $\|z_n^{(k)}(t)-z^{(k)}(t)\|_{\mathcal{Z}}<\delta/m$ при $k=0,1,\ldots,m-1$, поэтому в силу условия локальной липшицевости оператора F

$$\Big\|F\Big(\cdot,z_n(\cdot),z_n^{(1)}(\cdot),\ldots,z_n^{(m-2)}(\cdot)\Big)-F\Big(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)\Big)\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)}\leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{k=0}^{m-2}\|z_n^{(k)}-z^{(k)}\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)}\leqslant C_2\sum_{k=0}^{m-2}\|z_n^{(k)}-z^{(k)}\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})}\to 0.$$

Следовательно, оператор $\mathfrak{F}\colon\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\to\mathfrak{V}:=L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)\times\mathcal{Z}^m$, определенный как при доказательстве теоремы 2, непрерывен.

В остальном доказательство не отличается от доказательства теоремы 2. □

Для задачи без учета затрат на управление добавляем условие ограниченности множества $\mathcal{U}_\partial$.

Теорема 5. *Пусть $\alpha,q>1$, $r=m-2$, отображение $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}_1^{m-1};\mathcal{Z}_1)$ локально липшицево по $\overline{y}\in\mathcal{Z}_1$ равномерно по $t\in[t_0,T]$, при этом $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^{m-1};\mathcal{Z})$, $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество пространства $\mathfrak{U}=L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, для некоторого набора $(u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})\in\mathcal{U}_\partial$ существует сильное решение задачи (7), (8); пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал J_0 выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathfrak{Y}$, коэрцитивный на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$. Тогда существует решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1})\in\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{U}_\partial$ задачи (7)—(9), (11).*

Таким образом, в случае гарантированной непустоты множества допустимых наборов $\mathfrak{W}$ в задаче управления условие равномерной липшицевости по фазовым переменным $\overline{z}$ отображения F можно заменить на значительно более слабое условие его локальной липшицевости по $\overline{z}$, равномерной по $t\in[t_0,T]$.

Следствие 3. *Пусть $\alpha,q>1$, отображение $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}_1^{m-1};\mathcal{Z}_1)$ локально липшицево по $\overline{y}\in\mathcal{Z}_1$ равномерно по $t\in[t_0,T]$, при этом $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^{m-1};\mathcal{Z})$, существует такая функция $f\in C(\overline{\mathbb{R}}_+^{m-1};\overline{\mathbb{R}}_+)$, что для всех $t\in[t_0,T]$, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=0,1,\ldots,m-2$,*

$$\|F(t,z_0,z_1,\ldots,z_{m-2})\|_{\mathcal{Z}}\leqslant f(\|z_0\|_{\mathcal{Z}},\|z_1\|_{\mathcal{Z}},\ldots,\|z_{m-2}\|_{\mathcal{Z}});\qquad(13)$$

$\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U}=L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, для некоторого набора $(u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})\in\mathcal{U}_\partial$ существует сильное решение задачи (7), (8). Тогда

при $\delta > 0$ существует решение $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}_0, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (7)—(9), (12). *Для $\delta = 0$ утверждение справедливо при дополнительном условии ограниченности $\mathcal{U}_\partial$.*

Доказательство. Как и при доказательстве следствия 2, возьмем $\mathfrak{Y} = C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Получим при $J(z, u, \bar{v}) \leqslant R$

$$\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|\bar{v}\|_{\mathcal{Z}^m} \leqslant \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1 J^p(z, u, \bar{v}) + C_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|F(\cdot, z(\cdot), z^{(1)}(\cdot), \ldots, z^{(m-2)}(\cdot))\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1 J^p(z, u, \bar{v}) + C_2 \leqslant$$
$$\leqslant C_3 J^p(z, u, \bar{v}) + C_4 +$$
$$+ C_5 \sup\left\{ \|F(t, z_0, \ldots, z_{m-2})\|_{\mathcal{Z}} : t \in [t_0, T], \sum_{k=0}^{m-2} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant R^p + \|z_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_3 R^p + C_4 + C_5 \sup\left\{ f(t, y_0, y_1 \ldots, y_{m-2}) : t \in [t_0, T],\ y_k \in [0, R^p + \|z_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})}] \right\} \leqslant C_3 R^p + C_6$$

в силу (13). При $\delta > 0$ получим требуемое по теореме 4, а при $\delta = 0$ с учетом ограниченности $\mathcal{U}_\partial$ — по теореме 5. □

4. Смешанное управление для дробной модели метастабильных состояний в полупроводниках. Рассмотрим задачу оптимального управления с начальными условиями

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k}(x_1, x_2, x_3, t_0) = v_k(x_1, x_2, x_3), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad x_j \in (a_j, b_j), \quad j = 1, 2, 3, \tag{14}$$

и краевыми условиями

$$w(a_1, x_2, x_3, t) = w(b_1, x_2, x_3, t), \quad w_{x_1}(a_1, x_2, x_3, t) = w_{x_1}(b_1, x_2, x_3, t), \quad t \in (t_0, T), \tag{15}$$
$$w(x_1, a_2, x_3, t) = w(x_1, b_2, x_3, t), \quad w_{x_2}(x_1, a_2, x_3, t) = w_{x_2}(x_1, b_2, x_3, t), \quad t \in (t_0, T), \tag{16}$$
$$w(x_1, x_2, a_3, t) = w(x_1, x_2, b_3, t), \quad w_{x_3}(x_1, x_2, a_3, t) = w_{x_3}(x_1, x_2, b_3, t), \quad t \in (t_0, T), \tag{17}$$

для нелинейного невырожденного уравнения, при $\alpha = 1$ описывающего метастабильные состояния в полупроводниках при наличии отрицательной дифференциальной поляризуемости,

$$D_t^\alpha w + D_t^\alpha \Delta w + \Delta w + w_{x_1} + w w_{x_1} + u = 0, \quad x_j \in (a_j, b_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad t \in (t_0, T), \tag{18}$$

с функционалом качества

$$J(w, u) = \|w - w_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \delta \|u - u_d\|^q_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \|v - u_{dk}\|^2_{\mathcal{Z}} \to \inf \tag{19}$$

при заданных $\Pi = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$,

$$\mathcal{X} = \Big\{ v \in H^2(\Pi) : v(a_1, x_2, x_3) = v(b_1, x_2, x_3),\ v_{x_1}(a_1, x_2, x_3) = v_{x_1}(b_1, x_2, x_3),$$
$$v(x_1, a_2, x_3) = v(x_1, b_2, x_3),\ v_{x_2}(x_1, a_2, x_3) = v_{x_2}(x_1, b_2, x_3),$$
$$v(x_1, x_2, a_3) = v(x_1, x_2, b_3),\ v_{x_3}(x_1, x_2, a_3) = v_{x_3}(x_1, x_2, b_3) \Big\},$$

$w_d \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $\delta > 0$. Определим $\mathcal{Y} = L_2(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_2(\Pi)$. В качестве множества допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$ возьмем множество функций $(u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \in L_q(t_0, T; L_2(\Pi)) \times (L_2(\Pi))^m$, при $(t, x) \in (t_0, T) \times \Pi$ удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant u(t, x) \leqslant \gamma(t, x), \quad 0 \leqslant v_k(x) \leqslant \gamma_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{20}$$

где $\gamma \in C([t_0, T] \times \overline{\Pi}; \mathbb{R}_+)$, $\gamma_k \in C(\overline{\Pi}; \mathbb{R}_+)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $\overline{\Pi} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Теорема 6. *Пусть $\alpha, q > 1$,*

$$\frac{k_1^2}{(b_1 - a_1)^2} + \frac{k_2^2}{(b_2 - a_2)^2} + \frac{k_3^2}{(b_3 - a_3)^2} \neq \frac{1}{4\pi^2} \tag{21}$$

при любых $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. Тогда существует решение $(\hat{w}, \hat{u}, \hat{v}_0, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (14)—(20).

Доказательство. Для начала определим операторы $L = I + \Delta, M = -\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; L_2(\Pi))$, нелинейный оператор $N(v) = v_{x_1} + vv_{x_1}$. Заметим, что

$$L = P\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

где $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2$. Спектр оператора $\partial/\partial x_j$ с периодическими условиями на концах отрезка (a_j, b_j) есть $\sigma_j = \{2\pi k(b_j - a_j)^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$, поэтому условие (21) влечет существование оператора $A = L^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\Pi); \mathcal{X})$. Возьмём $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $\mathcal{Z}_1 = W_4^1(\Pi)$. Для области Π размерность $d = 3 < 4$, поэтому пространство $\mathcal{Z}$ по теореме Реллиха—Кондрашова компактно вложено в $W_4^1(\Pi)$.

При $v \in W_4^1(\Pi)$ имеем

$$\|L^{-1}Nv\|_{W_4^1(\Pi)} \leqslant C_1\|L^{-1}Nv\|_{H^2(\Pi)} \leqslant C_2\|Nv\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C_2\Big(\|v\|_{W_2^1(\Pi)} + \|v\|_{L_4(\Pi)}\|v\|_{W_4^1(\Pi)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_3\Big(\|v\|_{W_4^1(\Pi)} + \|v\|^2_{W_4^1(\Pi)}\Big) \leqslant C_4\Big(\|v\|_{H^2(\Pi)} + \|v\|^2_{H^2(\Pi)}\Big).$$

Отсюда следует действие отображений $F_1 := L^{-1}N \colon W_4^1(\Pi) \to W_4^1(\Pi)$ и $F := L^{-1}N \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Кроме того, это означает выполнение условия (13) при $f(y) = C_4(y + y^2)$. Аналогично при $v_1, v_2 \in W_4^1(\Pi)$ из фиксированной окрестности в $W_4^1(\Pi)$ получим

$$\Big\|L^{-1}Nv_1 - L^{-1}Nv_2\Big\|_{W_4^1(\Pi)} \leqslant C_1\Big\|L^{-1}Nv_1 - L^{-1}Nv_2\Big\|_{H^2(\Pi)} \leqslant C_2\|Nv_1 - Nv_2\|_{L_2(\Pi)} \leqslant$$
$$\leqslant C_3\Big(\|v_1 - v_2\|_{W_4^1(\Pi)} + \|v_1\|_{W_4^1(\Pi)}\|v_1 - v_2\|_{W_4^1(\Pi)} + \|v_2\|_{W_4^1(\Pi)}\|v_1 - v_2\|_{W_4^1(\Pi)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_3\|v_1 - v_2\|_{W_4^1(\Pi)} \leqslant C_4\|v_1 - v_2\|_{H^2(\Pi)}.$$

Таким образом, отображения F_1, F локально липшицевы.

Из условий задачи очевидно, что для набора управлений $(u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \equiv 0 \in \mathcal{U}_\partial$ существует тождественно нулевое решение начально-краевой задачи (14)—(18). Осталось сослаться на следствие 3. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения// Прикл. мат. мех. — 1948. — *12.* — С. 529–539.
2. *Плеханова М. В.* Задачи стартового управления для эволюционных уравнений дробного порядка// Челяб. физ.-мат. ж. — 2016. — *1*, № 3. — С. 15–36.
3. *Плеханова М. В.* Сильное решение и задачи оптимального управления для класса линейных уравнений дробного порядка// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *167.* — С. 42–51.
4. *Плеханова М. В.* Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Челяб. физ.-мат. ж. — 2017. — *2*, № 1. — С. 53–65.
5. *Плеханова М. В.* Сильные решения нелинейного вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2016. — *16*, № 3. — С. 61–74.
6. *Плеханова М. В., Байбулатова Г. Д.* Задачи оптимального управления для одного класса вырожденных эволюционных уравнений с запаздыванием// Челяб. физ.-мат. ж. — 2018. — *3*, № 3. — С. 319–331.
7. *Плеханова М. В., Исламова А. Ф.* О разрешимости задач смешанного оптимального управления линейными распределенными системами// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 7. — С. 37–47.
8. *Плеханова М. В., Исламова А. Ф.* Задачи с жестким смешанным управлением для линеаризованного уравнения Буссинеска// Диффер. уравн. — 2012. — *48*, № 4. — С. 565.
9. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
10. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
11. *Фалалеев М. В.* Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — *17.* — С. 77–85.
12. *Федоров В. Е., Абдрахманова А. А.* Начальная задача для уравнений распределенного порядка с ограниченным оператором// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *188.* — С. 14–22.

13. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *167*. — С. 97–111.
14. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
15. *Шуклина А. Ф., Плеханова М. В.* Задачи смешанного управления для системы Соболева// Челяб. физ.-мат. ж. — 2016. — *1*, № 2. — С. 78–84.
16. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces/ Ph.D. thesis — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
17. *Falaleev M. V.* Fundamental undamental operator-valued functions of integrodifferential operators in Banach spaces// J. Math. Sci. — 2018. — *230*, № 5. — P. 782–785.
18. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam–Boston–Heidelberg: Elsevier, 2006.
19. *Mainardi F., Luchko Y. F., Pagnini G.* The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2001. — *4*, № 2. — P. 153–192.
20. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. — Boston: Academic Press, 1974.
21. *Plekhanova M. V.* Degenerate distributed control systems with fractional time derivative// Ural Math. J. — 2016. — *2*, № 2. — P. 58–71.
22. *Plekhanova M. V.* Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations// J. Comput. Appl. Math. — 2017. — *312*. — P. 39–46.
23. *Plekhanova M. V.* Mixed control problem for the linearized quasi-stationary phase field system of equations// Mat. Sci. Forum. — 2016. — *845*. — P. 170–173.
24. *Plekhanova M. V.* Optimal control existence for degenerate infinite dimensional systems of fractional order// IFAC-PapersOnLine. — 2018. — *51*, № 32. — P. 669–674.
25. *Plekhanova M. V.* Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order// J. Math. Sci. — 2016. — *219*. — P. 236–244.
26. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations// Lect. Notes Comp. Sci. — 2019. — *11548*. — P. 501–512.
27. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. — Beijing: Higher Education Press, 2010.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский государственный университет;
Южно-Уральский государственный университет
E-mail: `mariner79@mail.ru`

Шуклина Анна Фаридовна
Челябинский государственный университет
E-mail: `isaf@csu.ru`