ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 100–112
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-100-112

УДК 517.922, 517.983.5

О РАЗРЕШИМОСТИ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ОТ ФУНКЦИОНАЛОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2022 г. **М. В. ФАЛАЛЕЕВ, Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА**

Аннотация. В работе исследуется задача Коши для дифференциального уравнения с производными от функционалов в банаховых пространствах. Оператор при старшей производной имеет структуру проектора, т.е. его ядро бесконечномерно. Решение строится в пространстве обобщенных функций с ограниченным слева носителем в виде свертки фундаментального решения дифференциального оператора с правой частью уравнения, включающей в себя свободную функцию и начальные условия исходной задачи. Построение фундаментального решения осуществляется с помощью фундаментальной оператор-функции для специально выстроенного матричного дифференциального оператора с необратимой (вообще говоря) матрицей при производной, т.е. с оператором конечного индекса. Анализ построенного таким образом обобщенного решения позволяет получать достаточные условия разрешимости исходной задачи Коши в классах функций конечной гладкости, а также предложить конструктивные формулы для восстановления такого решения. Приведен иллюстрирующий пример.

***Ключевые слова*:** банаховы пространства, оператор Фредгольма, обобщенное решение, фундаментальная оператор-функция.

ON THE SOLVABILITY IN THE CLASS OF DISTRIBUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DERIVATIVES OF FUNCTIONALS IN BANACH SPACES

© 2022 **M. V. FALALEEV, E. Yu. GRAZHDANTSEVA**

Abstract. The paper considers the initial value problem for a differential equation with the derivatives of the functionals in Banach spaces. The operator of the elder derivative has the structure of projector, i.e. its core is infinite-dimensional. The solution is constructed in the space of generalized functions with the support bounded on the left in the form of convolution of the fundamental solution of the differential operator with the right-hand side of the equation, which includes a free function and some initial conditions of the initial problem. The process of construction of the fundamental solution is realized with the aid of a fundamental operator function for a specially constructed matrix differential operator with an irreversible (generally speaking) matrix in the derivative, i.e. with the operator of finite index. Analysis of the generalized solution constructed by this technique allows one to obtain the sufficient conditions of solvability for our initial-value problem in the classes of finite smoothness functions, and also propose constructive formulas needed to restore such a solution. An illustrative example is given.

***Keywords and phrases*:** Banach spaces, Fredholm operator, generalized solution, fundamental operator-function.

***AMS Subject Classification*:** 34G10

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00407А).

1. Введение. Рассматривается задача Коши вида

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u^{(N)}(t), \alpha_i \rangle a_i - Au(t) = f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \ldots, u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{2}$$

где $N \geqslant 1$, A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\alpha_i \in E_1^*$, $a_i \in E_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2.

Уравнения с необратимым оператором при производной, к которым относится и уравнение (1), разрешимы при заданных начальных данных (2) лишь при специальных условиях согласования между функцией $f(t)$ и условиями (2). Эти эффекты давно известны всем специалистам в данной области и описание условий согласования является одной из задач проводимых ими исследований. Обширную библиографию на эту тему можно найти, например, в монографиях [5, 7, 15, 16]. В частности, случай, когда оператор при производной имеет конечный индекс, исследовался, например, в работах [9–11], в условиях спектральной ограниченности такие задачи изучались в работах [8, 12]. Существенным отличием данной работы от упомянутых выше является отсутствие условий на операторный пучок уравнения в виде существования полных жордановых наборов или специальной конфигурации спектра пучка, что обусловлено структурой уравнения (1). Все исследования проводятся в пространствах распределений, при этом теоремы о разрешимости задачи Коши (1)—(2) в классе функций конечной гладкости получаются как следствия из более общих утверждений.

Известно, что однозначное восстановление обобщенного решения задачи Коши (1)—(2) в классе распределений с ограниченным слева носителем возможно при помощи фундаментальной оператор-функции [15] $\mathcal{E}(t)$, соответствующей уравнению (1), по формуле

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \Big(f(t)\theta(t) + Cu_{N-1}\delta(t) + Cu_{N-2}\delta'(t) + \ldots + Cu_1\delta^{(N-2)}(t) + Cu_0\delta^{(N-1)}(t) \Big), \tag{3}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\delta(t)$ и $\delta^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, — соответственно, дельта-функция Дирака и ее производные,

$$C = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \alpha_i \rangle a_i.$$

Таким образом, восстановление фундаментальной оператор-функции является главной целью исследования. Отметим, что ранее в своих работах [4, 6] авторы уже обращались к исследованию на разрешимость задачи Коши (1)—(2) в пространствах распределений. Однако все исследования проводились в специальном классе обобщенных функций, представимых в виде суммы регулярной составляющей с носителем на положительной полуоси и сингулярной с точечным носителем. Решение при этом фактически восстанавливалось покомпонентно и вопрос о единственности построенного таким способом решения оставался открытым. В данной работе этот вопрос решен для случаев, когда оператор A имеет конечный индекс или непрерывно обратим.

2. Основные определения и обозначения. Пусть E — банахово пространство, E^* — сопряженное банахово пространство к E.

Определение 1. Множеством основных функций $K(E^*)$ будем называть совокупность всех финитных функций $s(t)$) класса C^∞ со значениями в E^*.

Сходимость в $K(E^*)$ вводится естественным образом:

Определение 2. Последовательность функций $s_k(t) \in K(E^*)$ сходится к нулю при $k \to \infty$ в $K(E^*)$, если, во-первых, существует такое $R > 0$, что $\operatorname{supp} s_k(t) \subset [-R; R]$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и, во-вторых, для всех $n \in \mathbb{N}$ функциональная последовательность $\|s_k^{(n)}(t)\|$ сходится равномерно к нулю на $[-R; R]$ при $k \to \infty$.

Определение 3. Обобщенной функцией (распределением) бесконечного порядка будем называть всякий линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве $K(E^*)$.

Множество всех обобщенных функций, определенных на пространстве $K(E^*)$, будем обозначать $K'(E)$. Сходимость в $K'(E)$ определяется как слабая:

Определение 4. Последовательность $f_k \in K'(E)$ сходится к $f \in K'(E)$, если

$$(f_k, s(t)) \to (f, s(t)) \quad \text{при } k \to \infty \text{ для всех } s(t) \in K(E^*).$$

Множество $K'(E)$ с введенной в нем сходимостью называют пространством обобщенных функций. Далее через $K'_+(E)$ будем обозначать класс обобщенных функций с ограниченным слева носителем. Также будем использовать ставшие уже традиционными (см. [2, 3]) следующие обозначения: $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — пространство обобщенных функций Соболева—Шварца, заданных на основном пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ финитных бесконечно дифференцируемых (числовых) функций одной переменной.

Легко заметить, что если $c(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ и $a \in E$, то их произведение $ac(t) \in K'(E)$, причем

$$(ac(t), s(t)) = (c(t), \langle a, s(t)\rangle) \quad \forall s(t) \in K(E^*).$$

Пусть $\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $f(t) \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^1)$.

Определение 5 (см. [15])**.** Сверткой обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)f(t)$ и обобщенной функции $v(t) \in K'_+(E_1)$ будем называть обобщенную функцию $\mathcal{K}(t)f(t) * v(t) \in K'_+(E_2)$, действующую на основные функции $s(t) \in K(E_2)$ по правилу

$$(\mathcal{K}(t)f(t) * v(t), s(t)) = (f(t), (v(y), \mathcal{K}^*(t)s(t+y)));$$

здесь $\mathcal{K}^*(t) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ и существует при почти всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\alpha \in E^*$ некоторый функционал.

Определение 6. Действием функционала α на обобщенную функцию $v(t) \in K'(E)$ будем называть обобщенную функцию, обозначаемую

$$\langle \cdot, \alpha\rangle\delta(t) * v(t) = \langle v(t), \alpha\rangle \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

и действующую на основные функции $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$(\langle \cdot, \alpha\rangle\delta(t) * v(t), \varphi(t)) = (\langle v(t), \alpha\rangle, \varphi(t)) = (v(t), \alpha\varphi(t)).$$

Корректность этого определения следует из очевидной линейности этого функционала, а также из его непрерывности, вытекающей из следующих соображений: если $\varphi_n(t) \to 0$ в смысле пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ при $n \to \infty$ (см. [2, 3]), то $s_n(t) = \alpha\varphi_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ в пространстве $K(E^*)$, а значит, $(v(t), \alpha\varphi(t)) \to 0$.

В этих обозначениях, если $v(t) = ac(t)$, где $a \in E$, $c(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, то для всех $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ имеем

$$(\langle \cdot, \alpha\rangle\delta(t) * ac(t), \varphi(t)) = (ac(t), \alpha\varphi(t)) = (c(t), \langle a, \alpha\varphi(t)\rangle) = (c(t), \varphi(t))\langle a, \alpha\rangle = (\langle a, \alpha\rangle c(t), \varphi(t)).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\langle ac(t), \alpha\rangle = \langle a, \alpha\rangle c(t).$$

Пусть $\Lambda \equiv \langle \cdot, \alpha\rangle a$ — оператор, действующий из E_1 в E_2, где $\alpha \in E_1^*$, $a \in E_2$ и $f(t) \in K'(E_1)$; тогда под действием оператора Λ на функцию $f(t) \in K'(E_1)$ будем понимать свертку вида $\Lambda\delta(t) * f(t)\colon K'(E_1) \to K'(E_2)$, которую можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}(\Lambda\delta(t) * f(t), s(t)) = (\delta(y), (f(t), \Lambda^* s(t+y))) = (f(t), \Lambda^* s(t)) = (f(t), \langle a, s(t)\rangle\alpha) = \\ = (\langle f(t), \alpha\rangle, \langle a, s(t)\rangle) = (a\langle f(t), \alpha\rangle, s(t)) \quad \forall s(t) \in K(E_2),\end{aligned}$$

т.е. $\Lambda\delta(t) * f(t) = a\langle f(t), \alpha\rangle$; напомним, что в этих равенствах $\langle f(t), \alpha\rangle \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ и $\langle a, s(t)\rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.

3. Теоремы о фундаментальных оператор-функциях. Напомним следующее основное определение.

Определение 7 (см. [15]). Фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора $L_N(\delta(t))$ в классе $K'_+(E_2)$ называют обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}_N(t)$, удовлетворяющую следующим равенствам:

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * u(t) = u(t) \quad \forall u(t) \in K'_+(E_2)$$
$$\mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) * v(t) = v(t) \quad \forall v(t) \in K'_+(E_1).$$

Первое из этих равенств означает, что функция $\mathcal{E}_N(t) * g(t)$, $g(t) \in K'(E_2)$, является решением сверточного уравнения $L_N(\delta(t)) * z(t) = g(t)$ в классе $K'(E_1)$. Второе равенство означает единственность такого решения в $K'(E_1)$, т.е., если $h(t) \in K'(E_1)$ — решение уравнения $L_N(\delta(t)) * z(t) = g(t)$, то $h(t) = \mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) * h(t) = \mathcal{E}_N(t) * g(t)$.

3.1. Случай нетеровости оператора A. Пусть в уравнении (1) оператор A нетеров (см. [1]), т.е. $\dim N(A) = m$, $\dim N(A^*) = r$, $m \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $m \neq r$. Следуя [1], введем обозначения: $\{\varphi_j\}$ — базис ядра оператора A, $\varphi_j \in E_1$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\{\psi_k\}$ — базис ядра сопряженного оператора A^*, $\psi_k \in E_2^*$, $k = 1, 2, \ldots, r$; $\{\gamma_j\}$ — система элементов, биортогональная системе $\{\varphi_j\}$, $\gamma_j \in E_1^*$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\{z_k\}$ — биортогональная система элементов для $\{\psi_k\}$, $z_k \in E_2$, $k = 1, 2, \ldots, r$; фиксированным наборам элементов $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_k\}$, $\{\gamma_j\}$, $\{z_k\}$ соответствует единственный псевдообратный оператор A^+ (см. [14]), для которого выполнены операторные равенства

$$AA^+ = I - \sum_{k=1}^{r} \langle \cdot, \psi_k \rangle z_k, \quad A^+A = I - \sum_{j=1}^{m} \langle \cdot, \gamma_j \rangle \varphi_j,$$
$$A^+AA^+ = A^+, \quad AA^+A = A;$$

здесь I — единичный (тождественный) оператор; I_n, I_m, I_r — соответственно n-, m- и r-мерные единичные матрицы; $\langle \cdot, \bar{\alpha} \rangle$ — n-мерный вектор-столбец действий функционалов α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, из уравнения (1); $\langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle$ — m-мерный вектор-столбец действий функционалов γ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\langle \cdot, \bar{\psi} \rangle$ — r-мерный вектор-столбец действий функционалов ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$; $\bar{a}$ — n-мерный вектор-столбец элементов a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ из уравнения (1); $\bar{\varphi}$ — m-мерный вектор-столбец элементов φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\bar{z}$ — r-мерный вектор-столбец элементов z_k, $k = 1, 2, \ldots, r$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов; в этих обозначениях оператор C из уравнения (1) и операторные соотношения для псевдообратного оператора A^+ принимают вид:

$$C = (\langle \cdot, \bar{\alpha} \rangle, \bar{a}), \quad AA^+ = I - (\langle \cdot, \bar{\psi} \rangle, \bar{z}), \quad A^+A = I - (\langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle, \bar{\varphi});$$

$R = \big\| \langle A^+ a_i, \alpha_j \rangle \big\|$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — квадратная матрица размерности n, (здесь и далее везде первый индекс обозначает номер столбца, а второй индекс — номер строки); $H = \big\| \langle a_j, \psi_k \rangle \big\|$ — прямоугольная матрица размерности $r \times n$; $\Phi = \big\| \langle \varphi_i, \alpha_j \rangle \big\|$ — прямоугольная матрица размерности $n \times m$;

$$L = \begin{pmatrix} R & R\Phi \\ H & H\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ H \end{pmatrix} (I_n \Phi), \quad T = \begin{pmatrix} I_n & O_{n\times m} \\ O_{r\times n} & O_{r\times m} \end{pmatrix}$$

— прямоугольные блочные матрицы размерности $(n + r) \times (n + m)$ (здесь и далее O — нулевые матрицы соответствующей размерности).

Введем следующий дифференциальный оператор N-го порядка с производными от функционалов, соответствующий уравнению (1):

$$L_N(\delta(t)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \alpha_i \rangle a_i \right) \delta^{(N)}(t) - A\delta(t).$$

В соответствии с принятыми обозначениями оператор $L_N(\delta(t))$ представим в виде

$$L_N(\delta(t)) = C\delta^{(N)}(t) - A\delta(t).$$

Теорема 1. *Пусть оператор A нетеров, $\dim N(A) = m$, $\dim N(A^*) = r$, $m \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $m \neq r$, $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функция для матричного дифференциального оператора $(L\delta^{(N)}(t) - T\delta(t))$. Тогда дифференциальный оператор $L_N(\delta(t))$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = -A^+\delta(t) + \Big\{\Big((I_n\Phi)\delta^{(N)}(t)*, A^+\bar{a}\Big) + \Big((O_{m\times n}I_m)\delta(t)*,\ \bar{\varphi}\Big)\Big\} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t). \quad (4)$$

Доказательство. Проверим, что $\mathcal{E}_N(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, т.е. проверим справедливость двух равенств

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t), \quad \mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) = I\delta(t).$$

Учитывая, что в принятых обозначениях справедливы равенства

$$AA^+\bar{a} = (I - \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\bar{z})\bar{a} = \big\|a_i - \langle a_i,\bar{\psi}\rangle\bar{z}\big\| = \bar{a} - H^T\bar{z},$$
$$CA^+\bar{a} = \big\|(\langle A^+a_i,\bar{\alpha}\rangle,\bar{a})\big\| = R^T\bar{a}, \quad C\bar{\varphi} = \big\|(\langle\varphi_i,\bar{\alpha}\rangle,\bar{a})\big\| = \Phi^T\bar{a},$$
$$\langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\bar{z}\delta(t) = (I\delta(t)*,\bar{z}) * \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\delta(t), \quad CA^+\delta^{(N)}(t) = (I\delta^{(N)}(t)*,\bar{a}) * \langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),$$

имеем

$$\begin{aligned} L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) &= I\delta(t) - (I\delta(t)*,\bar{z}) * \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\delta(t) - \Big(I\delta^{(N)}(t)*,\bar{a}\Big) * \langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t) + \\ &+ \Big[-\Big((I_n\Phi)\delta^{(N)}(t)*,\bar{a}\Big) + \Big((HH\Phi)\delta^{(N)}(t)*,\bar{z}\Big) + \Big((RR\Phi)\delta^{(2N)}(t)*,\bar{a}\Big) + \\ &+ \Big((O_n\Phi)\delta^{(N)}(t)*,\bar{a}\Big)\Big] * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t) = \\ &= I\delta(t) + \left((HH\Phi)\delta^{(N)}(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t) - \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\delta(t),\bar{z}\right) + \\ &+ \left(\Big[(RR\Phi)\delta^{2(N)}(t) - (I_nO_{n\times m})\delta^{(N)}(t)\Big] * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t) - I\delta^{(N)}(t) * \langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\right) = \\ &= I\delta(t). \end{aligned}$$

Действительно, оператор-функция $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ является фундаментальной для для матричного дифференциального оператора $(L\delta^{(N)}(t) - T\delta(t))$, т.е. справедливо равенство

$$\left(\begin{pmatrix} R & R\Phi\\ H & H\Phi\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t) - \begin{pmatrix} I_n & O_{n\times m}\\ O_{r\times n} & O_{r\times m}\end{pmatrix}\delta(t)\right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) = I\delta(t).$$

Продифференцировав N раз первые n уравнений этой системы, получим

$$\left(\begin{pmatrix} R & R\Phi\\ O_{r\times n} & O_{r\times m}\end{pmatrix}\delta^{(2N)}(t) + \begin{pmatrix} -I_n & O_{n\times m}\\ H & H\Phi\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)\right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \begin{pmatrix} I_n\delta^{(N)}(t)\\ I_r\delta(t)\end{pmatrix}.$$

Построчная запись результата действия этого равенства на обобщенную вектор-функцию

$$\left\|\begin{matrix}\langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t)$$

имеет вид

$$\begin{cases} \Big[(RR\Phi)\delta^{(2N)}(t) - (I_nO_{n\times m})\delta^{(N)}(t)\Big] * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t) = I\delta^{(N)}(t) * \langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\\ (HH\Phi)\delta^{(N)}(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle A^+\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t) = \langle\cdot,\psi\rangle\delta(t), \end{cases}$$

что и завершает доказательство первого равенства из определения фундаментальной оператор-функции.

С другой стороны, поскольку справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{m}\langle\cdot,\gamma_j\rangle\varphi_j\delta(t)=(\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\delta(t),\bar\varphi),\quad \Big\langle I-\sum_{j=1}^{m}\langle\cdot,\gamma_j\rangle\varphi_j,\bar\alpha\Big\rangle=\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle,$$
$$A^+C\delta^{(N)}(t)=(\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t),A^+\bar a),\quad \big\langle A^+C\cdot,\bar\alpha\big\rangle=R\langle\cdot,\bar\alpha\rangle,\quad \big\langle C\cdot,\bar\psi\big\rangle=H\langle\cdot,\bar\alpha\rangle,$$

то

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_N(t)*L_N(\delta(t))=\mathcal{E}_N(t)*\Big(C\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)\Big)=\\
&\qquad=I\delta(t)-\Big(\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\delta(t),\bar\varphi\Big)-\Big(\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t),A^+\bar a\Big)-\\
&-\Big\{\Big((I_n\Phi)\delta^{(N)}(t)*,A^+\bar a\Big)+\Big((O_{m\times n}I_m)\delta(t)*,\bar\varphi\Big)\Big\}*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta(t)+\\
&+\Big\{\Big((I_n\Phi)\delta^{(2N)}(t)*,A^+\bar a\Big)+\Big((O_{m\times n}I_m)\delta^{(N)}(t)*,\bar\varphi\Big)\Big\}*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\begin{pmatrix}R\\H\end{pmatrix}\delta(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)=I\delta(t)+\\
&+\Bigg((O_{m\times n}I_m)\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left[\begin{pmatrix}R\\H\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)-\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta(t)\right]-\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\delta(t),\bar\varphi\Bigg)+\\
&+\Bigg((I_n\Phi)\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left[\begin{pmatrix}R\\H\end{pmatrix}\delta^{(2N)}(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)-\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta^{(N)}(t)\right]-\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t),A^+\bar a\Bigg).
\end{aligned}$$

Покажем, что здесь два последних слагаемых обращаются в ноль. Действительно, поскольку оператор-функция $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ является фундаментальной для матричного дифференциального оператора $(L\delta^{(N)}(t)-T\delta(t))$, то

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left(\begin{pmatrix}R & R\Phi\\ H & H\Phi\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)-\begin{pmatrix}I_n & O_{n\times m}\\ O_{r\times n} & O_{r\times m}\end{pmatrix}\delta(t)\right)=I\delta(t)$$

или

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left(\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)*(I_n\Phi)\delta(t)-\begin{pmatrix}I_n & O_{n\times m}\\ O_{r\times n} & O_{r\times m}\end{pmatrix}\delta(t)\right)=I\delta(t).$$

К результату действия этого равенства на обобщенную вектор-функцию

$$\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \langle\cdot,\bar\gamma\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t)$$

применим проектор $(O_{m\times n}I_m)\delta(t)*$, откуда и получаем обращение в ноль одного из слагаемых

$$(O_{m\times n}I_m)\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left[\begin{pmatrix}R\\H\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)-\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta(t)\right]-\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\delta(t)=0.$$

Аналогично, подействовав равенством

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left(\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta^{(2N)}(t)*(I_n\Phi)\delta(t)-\begin{pmatrix}I_n & O_{n\times m}\\ O_{r\times n} & O_{r\times m}\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)\right)=I\delta^{(N)}(t)$$

на ту же обобщенную вектор-функцию

$$\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \langle\cdot,\bar\gamma\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t)$$

и применив отображение $(I_n\Phi)\delta(t)$, получаем обращение в ноль другого слагаемого

$$(I_n\Phi)\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left[\begin{pmatrix}R\\H\end{pmatrix}\delta^{(2N)}(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)-\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta^{(N)}(t)\right]-\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t)=0.$$

Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. Представление (4) для фундаментальной оператор-функции можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$\mathcal{E}_N(t) = -A^+\delta(t) + \left(\begin{pmatrix} I_n & O_{n\times m} \\ O_n & \Phi \end{pmatrix}\delta^{(N)}(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \begin{Vmatrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{Vmatrix}\delta(t), \begin{Vmatrix} A^+\bar{a} \\ A^+\bar{a} \end{Vmatrix}\right) + \\ + \left((O_{m\times n} I_m)\delta(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \begin{Vmatrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{Vmatrix}\delta(t), \bar{\varphi}\right).$$

Замечание 2. Познакомиться с методикой построения фундаментальной оператор-функции $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ для матричного дифференциального оператора $(L\delta^{(N)}(t) - T\delta(t))$ можно в [11, 15].

3.2. Случай фредгольмовости оператора A. Если в уравнении (1) оператор A фредгольмов [1], т.е. $\dim N(A) = \dim N(A^*) = m \geqslant 1$, как и в предыдущем пункте, следуя [1], введем обозначения: $\{\varphi_k\}$ — базис ядра оператора A, $\varphi_k \in E_1$, $k = 1, 2, \dots, m$; $\{\psi_k\}$ — базис ядра сопряженного оператора A^*, $\psi_k \in E_2^*$, $k = 1, 2, \dots, m$; $\{\gamma_k\}$ — система элементов, биортогональная системе $\{\varphi_k\}$, $\gamma_k \in E_1^*$, $k = 1, 2, \dots, m$; $\{z_k\}$ — биортогональная система элементов для $\{\psi_k\}$, $z_k \in E_2$, $k = 1, 2, \dots, m$; фиксированным наборам элементов $\{\varphi_k\}$, $\{\phi_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{z_k\}$ соответствует единственный ограниченный обратный оператор вида

$$\Gamma = \left(A + \sum_{k=1}^{m}\langle\cdot, \gamma_k\rangle z_k\right)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1),$$

называемый оператором Треногина—Шмидта, для которого выполнены операторные равенства

$$A\Gamma = I - \sum_{k=1}^{m}\langle\cdot, \psi_k\rangle z_k, \quad \Gamma A = I - \sum_{k=1}^{m}\langle\cdot, \gamma_k\rangle\varphi_k$$

(см. [1]); I — единичный (тождественный) оператор; I_n и I_m — соответственно n- и m-мерные единичные матрицы; $\langle\cdot, \bar{\gamma}\rangle$ — m-мерный вектор-столбец действий функционалов γ_k, $k = 1, 2, \dots, m$; $\langle\cdot, \bar{\alpha}\rangle$ — n-мерный вектор-столбец действий функционалов α_i, $i = 1, 2, \dots, n$ из уравнения (1); $\bar{z}$ — m-мерный вектор-столбец элементов z_k, $k = 1, 2, \dots, m$; $\bar{a}$ — n-мерный вектор-столбец элементов a_i, $i = 1, 2, \dots, n$ из уравнения (1); $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов. В этих обозначениях оператор C из уравнения (1) и операторные соотношения для оператора Треногина—Шмидта принимают вид

$$C = (\langle\cdot, \bar{\alpha}\rangle, \bar{a}), \quad A\Gamma = I - (\langle\cdot, \bar{\psi}\rangle, \bar{z}), \quad \Gamma A = I - (\langle\cdot, \bar{\gamma}\rangle, \bar{\varphi});$$

$D = \big\|\langle\Gamma a_i, \alpha_j\rangle\big\|$ — квадратная матрица размерности $n\times n$; $M = \big\|\langle a_i, \psi_k\rangle\big\|$ — матрица размерности $m \times n$; $K = \big\|\langle\varphi_k, \alpha_j\rangle\big|$ — матрица размерности $n \times m$;

$$E = \begin{pmatrix} D & O \\ M & O_m \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I_n & -K \\ O & O_m \end{pmatrix}, \quad \operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\right) = \begin{pmatrix} I_n\delta^{(N)}(t) & O \\ O & I_m\delta(t) \end{pmatrix}$$

— квадратные блочные матрицы размерности $(n+m)\times(n+m)$ (здесь, как и выше, O — нулевая матрица соответствующей размерности).

Теорема 2. *Пусть оператор A фредгольмов, $\dim N(A) = \dim N(A^*) = m \geqslant 1$, $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функция для матричного дифференциального оператора $(E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t))$. Тогда дифференциальный оператор $L_N(\delta(t))$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\delta(t) * \left\{\left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \begin{Vmatrix} \langle\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot, \bar{\gamma}\rangle \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} \bar{a} \\ \bar{z} \end{Vmatrix}\right) * \Gamma\delta(t) - I\delta(t)\right\} = \\ = \left\{\Gamma\delta(t) * \left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \begin{Vmatrix} \langle\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot, \bar{\gamma}\rangle \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} \bar{a} \\ \bar{z} \end{Vmatrix}\right) - I\delta(t)\right\} * \Gamma\delta(t). \quad (5)$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если убедиться, что $\mathcal{E}_N(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, т.е. необходимо проверить справедливость двух равенств

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t), \quad \mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) = I\delta(t).$$

Действительно,

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \Big(C\Gamma\delta^{(N)}(t) - I\delta(t) + \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\bar{z}\delta(t)\Big) *$$
$$* \left\{\left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) * \Gamma\delta(t) - I\delta(t)\right\} =$$
$$= I\delta(t) - \Big(C\delta^{(N)}(t) + \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{z}\delta(t)\Big) * \Gamma\delta(t) -$$
$$- \Big(I\delta(t) - \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\bar{z}\delta(t)\Big) * \left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) * \Gamma\delta(t) +$$
$$+ C\Gamma\delta^{(N)}(t) * \left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) * \Gamma\delta(t).$$

Поскольку справедливы равенства

$$C\delta^{(N)}(t) + \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{z}\delta(t) = (\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle, \bar{a})\delta^{(N)}(t) + \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{z}\delta(t) =$$
$$= \left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right),$$
$$(I\delta(t) - \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\bar{z}\delta(t)) * \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\bar{a} - M^T\bar{z}\\ \bar{0}_m\end{matrix}\right\| = \begin{pmatrix} I_n & -M^T\\ O & O_m\end{pmatrix}\left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|,$$
$$C\Gamma\delta(t) * \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}D^T\bar{a}\\ -K^T\bar{a}\end{matrix}\right\| = \begin{pmatrix} D^T & O\\ -K^T & O_m\end{pmatrix}\left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|,$$

то

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t) + \left[-\left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * I\delta(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) -\right.$$
$$- \left(\begin{pmatrix} I_n & O\\ -M & O_m\end{pmatrix}\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) +$$
$$\left. + \left(\begin{pmatrix} D & -K\\ O & O_m\end{pmatrix}\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(2N)}(t), I_m\delta^{(N)}(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right)\right] * \Gamma\delta(t).$$

Отсюда получаем

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t) + \Big(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) *$$
$$* \left\{-I\delta(t) - \begin{pmatrix} I_n\delta(t) & O\\ -M\delta^{(N)}(t) & O\end{pmatrix} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) + \begin{pmatrix} D\delta^{(N)}(t) & -K\delta(t)\\ O & O\end{pmatrix} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t)\right\} * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\Big) * \Gamma\delta(t) =$$
$$= I\delta(t),$$

так как в силу фундаментальности $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ для матричного дифференциального оператора $(E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t))$ имеем

$$-I\delta(t) - \begin{pmatrix} I_n\delta(t) & O\\ -M\delta^{(N)}(t) & O\end{pmatrix} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) + \begin{pmatrix} D\delta^{(N)}(t) & -K\delta(t)\\ O & O\end{pmatrix} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) =$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} D & O\\ M & O\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t) - \begin{pmatrix} I & K\\ O & O\end{pmatrix}\delta(t)\right\} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) - I\delta(t) =$$
$$= \Big(E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t)\Big)\tilde{\mathcal{E}}_N(t) - I\delta(t) \equiv 0.$$

Таким образом, первое из двух равенств определения фундаментальной оператор-функции доказано.

Второе равенство из определения фундаментальной оператор-функции доказывается по аналогичной схеме. Действительно,

$$\mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) = \left\{ -I\delta(t) + \Gamma\delta(t) * \left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t) \right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{z} \end{matrix} \right\| \right) \right\} *$$
$$* \left(\Gamma C\delta^{(N)}(t) - I\delta(t) + \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{\varphi}\delta(t) \right) = I\delta(t) - \Gamma\delta(t) * \left(C\delta^{(N)}(t) + \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{z}\delta(t) \right) +$$
$$+ \Gamma\delta(t) * \left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t) \right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{z} \end{matrix} \right\| \right) * \Gamma C\delta^{(N)}(t) -$$
$$- \Gamma\delta(t) * \left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t) \right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{z} \end{matrix} \right\| \right) * \left(I\delta(t) - \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{\varphi}\delta(t) \right).$$

Далее путем тождественных преобразований убеждаемся в справедливости следующих двух равенств:

$$\left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t) * \Gamma C\delta^{(N)}(t) = \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t) * \Gamma C\delta^{(N)}(t) \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\delta(t) * \Gamma C\delta^{(N)}(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D\delta^{(N)}(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ M\delta^{(N)}(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \end{matrix} \right\| =$$
$$= \begin{pmatrix} D & O \\ M & O_m \end{pmatrix} \delta^{(N)}(t) * \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\| = E\delta^{(N)}(t) * \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t) * \left(I\delta(t) - \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{\varphi}\delta(t) \right) = \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle - K\langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \\ \bar{0}_m \end{matrix} \right\| =$$
$$= \begin{pmatrix} I_n & -K \\ O & O_m \end{pmatrix} \delta(t) * \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\| = F\delta(t) * \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\|.$$

Поэтому

$$\mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) = I\delta(t) + \Gamma\delta(t) *$$
$$* \left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t) \right) * \left\{ -I\delta(t) + \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * (E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t)) \right\} * \left\| \begin{matrix} \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle \\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{z} \end{matrix} \right\| \right) = I\delta(t),$$

поскольку в силу фундаментальности

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left(E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t) \right) - I\delta(t) \equiv 0.$$

Следовательно, оператор-функция (5) удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции для оператора $L_N(\delta(t))$ и, значит, является для него таковой. Теорема 2 доказана. □

Замечание 3. Познакомиться с методикой построения фундаментальной оператор-функции $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ для матричного дифференциального оператора $(E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t))$ можно в [13, 15].

3.3. Случай обратимости оператора A. В случае, когда оператор A непрерывно обратим, введем в рассмотрение оператор A^{-1}, обратный к оператору A, и квадратную матрицу $B = \left\| \langle A^{-1}a_i, \alpha_j\rangle \right\|$ размерности n.

Теорема 3. *Пусть оператор A обратим, $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функцией для матричного дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - I_n\delta(t))$. Тогда дифференциальный оператор $L_N(\delta(t))$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = A^{-1}\delta(t) * \left\{ \left(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t), \bar{a} \right) * A^{-1}\delta^{(N)}(t) - I\delta(t) \right\} =$$
$$= \left\{ A^{-1}\delta^{(N)}(t) * \left(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t), \bar{a} \right) - I\delta(t) \right\} * A^{-1}\delta(t). \quad (6)$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущих теорем 1 и 2 проверим, что оператор-функция (6) удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, т.е. убедимся в справедливости равенств

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t), \quad \mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) = I\delta(t).$$

Последовательно находим

$$
\begin{aligned}
L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) &= \Big(C\delta^{(N)} - A\delta(t)\Big) * \mathcal{E}_N(t) = \\
&= \Big(CA^{-1}\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big) * \Big\{\Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\Big) * A^{-1}\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big\} = \\
&= I\delta(t) - CA^{-1}\delta^{(N)}(t) + \Big(CA^{-1}\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big) * \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\Big) * A^{-1}\delta^{(N)}(t) = \\
&= I\delta(t) + \Big\{-C\delta(t) + \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta^{(N)}(t), B^T\bar{a}\Big) - \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\Big)\Big\} * A^{-1}\delta^{(N)}(t) = \\
&= I\delta(t) + \Big(\Big[(B\delta^{(N)}(t) - I_n\delta(t)) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) - I\delta(t)\Big] * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\Big) * A^{-1}\delta^{(N)}(t) = I\delta(t)
\end{aligned}
$$

в силу фундаментальности оператор-функции $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ для матричного дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - I_n\delta(t))$. Первое равенство из определения фундаментальной оператор-функции доказано.

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) &= \Big\{A^{-1}\delta^{(N)}(t) * \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\Big) - I\delta(t)\Big\} * \Big(A^{-1}C\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big) = \\
&= I\delta(t) - A^{-1}C\delta^{(N)}(t) + A^{-1}\delta^{(N)}(t) * \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\Big) * \Big(A^{-1}C\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big) = \\
&= I\delta(t) + I\delta^{(N)}(t) * \Big\{-A^{-1}C\delta(t) + \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * B\delta^{(N)}(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t), A^{-1}\bar{a}\Big) - \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t), A^{-1}\bar{a}\Big)\Big\} = \\
&= I\delta(t) + I\delta^{(N)}(t) * \Big(\Big[\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - I_n\delta(t)) - I\delta(t)\Big] * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t), A^{-1}\bar{a}\Big) = I\delta(t).
\end{aligned}
$$

Итак, оператор-функция вида (6) удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции дифференциального оператора $L_N(\delta(t))$. Теорема 3 доказана. □

Если в условиях теоремы 3 матрица B обратима, то

$$
\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = B^{-1}\mathcal{U}_N(B^{-1}t)\theta(t) = B^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}(B^{-1})^{i-1}\cdot\frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}\theta(t),
$$
$$
\tilde{\mathcal{E}}_N(0) = \tilde{\mathcal{E}}'_N(0) = \ldots = \tilde{\mathcal{E}}_N^{(N-2)}(0) = 0, \quad \tilde{\mathcal{E}}_N^{(N-1)}(0) = B^{-1}
$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть оператор A обратим,* $\det B \neq 0$. *Тогда дифференциальный оператор $L_N(\delta(t)) = \big(C\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\big)$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_N(t) &= A^{-1}\delta(t) * \Big\{\Big(\Big[B^{-1}\delta(t) + (B^{-1})^2\mathcal{U}_N(B^{-1}t)\theta(t)\Big] * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\Big) * A^{-1}\delta(t) - I\delta(t)\Big\} = \\
&= \Big\{A^{-1}\delta(t) * \Big(\Big[B^{-1}\delta(t) + (B^{-1})^2\mathcal{U}_N(B^{-1}t)\theta(t)\Big] * \langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\Big) - I\delta(t)\Big\} * A^{-1}\delta(t).
\end{aligned}
$$

В условиях теоремы 4 по формуле (3) восстанавливается единственное решение класса $K'_+(E_1)$ задачи Коши (1)—(2), которое окажется регулярной обобщенной функцией вида

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(t) = -A^{-1}f(t)\theta(t) &+ \Big(B^{-1}\left\|\langle A^{-1}f(t),\bar{\alpha}\rangle\right\|, A^{-1}\bar{a}\Big)\theta(t) + \\
&+ \Big((B^{-1})^2\mathcal{U}_N(B^{-1}t)\theta(t) * \left\|\langle A^{-1}f(t),\bar{\alpha}\rangle\right\|\theta(t), A^{-1}\bar{a}\Big) + \\
&+ \sum_{i=0}^{N-1}\Big(B^{-1}\mathcal{U}_N^{(N-i-1)}(B^{-1}t)\left\|\langle u_i,\bar{\alpha}\rangle\right\|, A^{-1}\bar{a}\Big)\theta(t).
\end{aligned}
$$

Функция $\tilde{u}(t)$ обращает уравнение (1) в тождество. Условия, при которых эта функция удовлетворяет начальным условиям (2) и будут являться условиями разрешимости задачи Коши (1)—(2) в классе $C^N(t \geqslant 0, E_1)$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Если в условиях теоремы 4 функция $f(t) \in C^N(t \geqslant 0, E_2)$, то задача Коши* (1)—(2) *разрешима в классе $C^N(t \geqslant 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

$$\left[I - \left(\langle A^{-1}\cdot, B^{-1}\bar{\alpha}\rangle, \bar{a}\right)\right]\left(Au_i + f^{(i)}(0)\right) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Если в условиях теоремы 3 $\det B = 0$, то

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \tilde{\Gamma}\mathcal{U}_N(\tilde{\Gamma}t)\left[I - \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \tilde{\phi}_i^{(j)}\rangle\tilde{\varphi}_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t) - \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot, \tilde{\phi}_i^{(j)}\rangle\tilde{\varphi}_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(Nk)}(t)\right];$$

здесь $\tilde{n} = \dim\ker B$, $\{\tilde{\varphi}_i^{(j)}\}$ и $\{\tilde{\phi}_i^{(j)}\}$, $i = 1, \ldots, \tilde{n}$, $j = 1, \ldots, p_i$ — полные I-жордановы наборы (см. [1]) матриц B и $B^* = B^t$, $\tilde{\Gamma}$ — матрица Треногина—Шмидта для B (см. [1]). В этом случае обобщенное решение (3) задачи Коши (1)—(2) содержит как сингулярную (с точечным носителем), так и регулярную составляющие. Условия, при которых сингулярная составляющая обращается в нуль, а регулярная составляющая (обращающая уравнение (1) в тождество) удовлетворяет начальным условиям (2) и будут являться условиями разрешимости задачи Коши (1)—(2) в классе $C^N(t \geqslant 0, E_1)$.

Теорема 6. *Если оператор A обратим,* $\det B = 0$ *и* $f(t) \in C^{N(p+1)}(t \geqslant 0, E_2)$, *то задача Коши* (1)—(2) *разрешима в классе $C^N(t \geqslant 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

$$\left[I - \left(\langle A^{-1}\cdot, \tilde{\Gamma}[I-Q]\bar{\alpha}\rangle, \bar{a}\right)\right]\left(Au_l + f^{(l)}(0)\right) + (\bar{G}^{(l)}(0), \bar{a}) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\left\langle \bar{x}_l + \bar{g}^{(l)}(0), \tilde{\phi}_i^{(j)}\right\rangle + \left\langle \bar{g}^{(N+l)}(0), \tilde{\phi}_i^{(j-1)}\right\rangle + \left\langle \bar{g}^{(2N+l)}(0), \tilde{\phi}_i^{(j-2)}\right\rangle + \ldots + \left\langle \bar{g}^{(N(j-1)+l}(0), \tilde{\phi}_i^{(1)}\right\rangle = 0,$$
$$i = 1, \ldots, \tilde{n}, \quad j = 1, \ldots, p_i, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1;$$

здесь $p = \max p_i$, $\bar{g}(t) = \|\langle A^{-1}f(t), \bar{\alpha}\rangle\|$, $\bar{x}_l = \|\langle u_l, \bar{\alpha}\rangle\|$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$Q = \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \tilde{\phi}_i^{(j)}\rangle\tilde{\varphi}_i^{(p_i+1-j)},$$

$$\bar{G}(t) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\bar{g}^{(N(k+1))}(t), \tilde{\phi}_i^{(j)}\right\rangle\tilde{\varphi}_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\right].$$

Замечание 4. Результаты, аналогичные этим, можно получить на основании теорем 1 и 2 для случая, когда оператор A нетеров и фредгольмов, соответственно.

4. Пример. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\Omega} u_t^{(N)}(t, \bar{x})\alpha_i(\bar{x})d\bar{x}\right)a_i(\bar{x}) - (\lambda - \Delta)u(t, \bar{x}) = f(t, \bar{x}), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=0} = u_i(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega; \quad u|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

где $u_i(\bar{x})$, $f(t, \bar{x})$ — заданные функции, $u = u(t, \bar{x})$ — искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, $u = u(t, \bar{x})$ определена на цилиндре $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Для задач Коши—Дирихле (7)—(8) банаховы пространства и оператор A зададим следующим образом:

$$E_1 \equiv \left\{v(\bar{x}) \in W_2^2(\Omega) : \left. v\right|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \quad E_2 \equiv W_2(\Omega), \quad A = \lambda - \Delta,$$

где $W_2^2(\Omega)$ и $W_2(\Omega)$ — пространства Соболева.

Если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, то оператор A непрерывно обратим, т.е. существует $A^{-1} = (\lambda - \Delta)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$, построим матрицу

$$B = \left\| \int\limits_{\Omega} (\lambda - \Delta)^{-1} a_i(\bar{x}) \cdot \alpha_j(\bar{x}) d\bar{x} \right\|.$$

Если эта матрица невырождена, то в соответствии с теоремой 4 получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ и $\det B \neq 0$, то задача Коши—Дирихле (7)—(8) однозначно разрешима в классе функций $C^N(t \geqslant 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начальные условия (8) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям*

$$(\lambda - \Delta)u_j(\bar{x}) + \frac{\partial^j f(0, \bar{x})}{\partial t^j} - \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{\Omega} \left(u_j(\bar{x}) + (\lambda - \Delta)^{-1} \frac{\partial^j f(0, \bar{x})}{\partial t^j} \right) \cdot b_i(\bar{x}) d\bar{x} \right) a_i(\bar{x}) \equiv 0,$$
$$j = 0, 1, \ldots, N-1;$$

здесь $\bar{b} = \|b_i(\bar{x})\| = B^{-1}\|\alpha_i(\bar{x})\| = B^{-1}\bar{\alpha}$.

Замечание 5. В соответствии с теоремой 5 можно получить аналогичные утверждения и для случая $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, $\det B = 0$.

5. Заключение. Представленные результаты допускают обобщение на интегро-дифференциальные уравнения с производными от функционалов вида

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u^{(N)}(t), \alpha_i \rangle a_i - Au(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t). \tag{9}$$

А именно, интегро-дифференциальный оператор, соответствующий уравнению (9), имеет вид

$$L_N(\delta(t)) = C\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t),$$

а его фундаментальная оператор-функция представима в виде следующего ряда

$$\mathcal{E}_N(t) = \bar{\mathcal{E}}_N(t) * \sum_{k=1}^{\infty} \Big(k(t)\theta(t) * \bar{\mathcal{E}}_N(t) \Big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\bar{\mathcal{E}}_N(t) * k(t)\theta(t) \Big)^k * \bar{\mathcal{E}}_N(t);$$

здесь $\bar{\mathcal{E}}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функция для дифференциального оператора

$$C\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)$$

(см. теоремы 1, 2, 3), а под степенью k обобщенной функции понимается её k-кратная свертка с собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
4. *Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013.
5. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
6. *Романова О. А., Фалалеев М. В.* О непрерывных. обобщенных, периодических и конвергентных решениях одного класса диффекренциальных уравнений с производными от функционалов// Деп. ВИНИТИ 19.04.89, № 2565-В89. — Иркутск: Изд-во ИГУ. — 1989.
7. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О. и др.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
8. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов// Усп. мат. наук. — 1994. — *49*, № 4. — С. 47–74.

9. *Сидоров Н. А., Романова О. А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 9. — С. 1516–1526.
10. *Сидоров Н. А., Фалалеев М. В.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной// Диффер. уравн. — 1987. — *23*, № 4. — С. 726–728.
11. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах// Сиб. мат. ж. — 2005. — *46*, № 6. — С. 1393–1406.
12. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 6. — С. 769–774.
13. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах// Сиб. мат. ж. — 2000. — *41*, № 5. — С. 1167-1182.
14. *Nashed M. Z.* Generalized Inverses and Applications. — New York: Academic Press, 1976.
15. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
16. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht: VSP, 2003.

Фалалеев Михаил Валентинович
Иркутский государственный университет
E-mail: `mvfalaleev@gmail.com`

Гражданцева Елена Юрьевна
Иркутский государственный университет
E-mail: `grelyur@mail.ru`