ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 120–138
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-120-138

УДК 517, 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. III. СИЛОВЫЕ ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы, пространствами положений которых являются четырехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к соответствующим многообразиям. Рассматриваемые динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость более общих классов однородных динамических систем с переменной диссипацией на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям. Первая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *210.* — С. 77–95. Вторая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *211.* — С. 29–40.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS. III. FORCE FIELDS WITH DISSIPATION

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, systems arise whose position spaces are four-dimensional manifolds. Naturally, the phase spaces of such systems are the tangent bundles of the corresponding manifolds. Dynamical systems considered have variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of transcendental functions expressed in terms of finite combinations of elementary functions. In this paper, we prove the integrability of more general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds. The first part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of four-dimensional manifolds. I. Equations of geodesic lines// *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **210** (2022), pp. 77–95. The second part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of four-dimensional manifolds. II. Potential force fields// *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **211** (2022), pp. 29–40.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [70, 71]. Ссылки вида (1.m.n) и «предложение 2.n» относятся к первой и второй частям работы.

3. Уравнения движения на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в силовом поле с диссипацией

3.1. Приведенная система. Случай I. Модифицируя систему (**??**), получим систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.1.1) (в отличие от системы (**??**)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_1, \ldots, \dot z_4$ соответственно:

$$\tilde F(z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \\ z_4 F_4^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_4 = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 + \\ \qquad + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad - f_2(\alpha) g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \qquad \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Система (3.1.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - [b\tilde\delta(\alpha) + F_4^1(\alpha)]\dot\alpha + F(\alpha) + b\delta(\alpha) F_4^1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \\ \qquad + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - \left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + F_3^1(\alpha)\right\}\dot\beta_1 + \\ \qquad + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - \left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + F_2^1(\alpha)\right\}\dot\beta_2 + \\ \qquad + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 - \left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + F_1^1(\alpha)\right\}\dot\beta_3 + \\ \qquad + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0; \end{cases} \tag{3.1.2}$$

здесь и далее $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.2. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай I. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.1.1) при выполнении свойств (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**). Тогда система (3.1.1) допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_4 = F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_3^2 + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2 + \\ \qquad + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2 + z_4F_4^1(\alpha), \\ \dot z_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_2^2 - \\ \qquad - f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3 - \\ \qquad - f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\beta_2)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3 - \\ \qquad - f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_3f(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_2f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.2.1}$$

при наличии также восьмого уравнения

$$\dot\beta_3 = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{3.2.2}$$

Замечание 3.1. Будем переходить теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.2.1), (3.2.2) при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{3.2.3}$$

Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (**??**), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = 0. \tag{3.2.4}$$

При переходе от системы (3.1.1) к системе (3.2.1), (3.2.2) использовалась система дифференциальных равенств (**??**), а также группа условий (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**). Но нетрудно показать, что из только что всех перечисленных условий условия (3.2.3), (3.2.4) вытекают. Но если систему дифференциальных равенств (**??**) заменить на ее ослабленный вариант — систему дифференциальных равенств (**??**) — то для проведения дальнейшего анализа выполнение условий (3.2.3), (3.2.4) нужно требовать.

Далее наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому также предположим, что выполнены (в некотором смысле, технические) равенства:

$$F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{3.2.5}$$

Для полного интегрирования (по Якоби [4, 12, 17, 18]) рассматриваемой системы (3.2.1), (3.2.2) при условии (3.2.5) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \tag{3.2.6}$$

система (3.2.1), (3.2.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot w_4 = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot w_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{cases} \dot w_2 = \pm w_3 \sqrt{\dfrac{1+w_2^2}{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot\beta_2 = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{cases} \dot w_1 = \pm w_3 \sqrt{1+w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{3.2.9}$$

$$\dot\beta_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \tag{3.2.10}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.2.7)–(3.2.10) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.2.7), по одному — для систем (3.2.8) и (3.2.9) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.2.10)(т.е. всего *пять*).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ выполнены группы равенств

$$f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \tag{3.2.11}$$

а также

$$F(\alpha) = \lambda_0 \frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}, \quad F^1(\alpha) = \lambda_1 \frac{d}{d\alpha}\delta(\alpha), \quad F_4^1(\alpha) = \lambda_4 \frac{d}{d\alpha}\delta(\alpha). \tag{3.2.12}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.2.11) *и* (3.2.12)*. Тогда система* (3.2.7) — (3.2.10) *обладает полным набором, состоящим из пяти независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Условие (3.2.11) назовем *геометрическим*, а условия группы (3.2.12) — *энергетическими*.

Условие (3.2.11) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения.

Условия группы (3.2.12) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\delta^2(\alpha)/2$ (или $\delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\delta(\alpha)$). При этом функция $\delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (*знако*)*переменную диссипацию* (см. также [19, 22, 24, 25]).

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.1 для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (3.2.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha)}{-w_4 + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dz}{d\alpha} = \dfrac{[2\Gamma_1(\alpha) + d\ln|f(\alpha)|/d\alpha] w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha)}{-w_4 + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1 \delta(\alpha), \quad w_4 = u_2 \delta(\alpha), \tag{3.2.14}$$

приведем систему (3.2.13) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_1^2 + \delta(\alpha)u_2F_4^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{[2\Gamma_1(\alpha) + d\ln|f(\alpha)|/d\alpha]\delta^2(\alpha)u_1u_2 + \delta(\alpha)u_1F^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}; \end{cases} \tag{3.2.15}$$

с учетом (3.2.4) последняя система почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{H_4(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1^2 + u_2F_4^1(\alpha) + \tilde{\delta}(\alpha)u_2^2 - b\tilde{\delta}(\alpha)u_2}{-u_2 + b}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1u_2 + u_1F^1(\alpha) + \tilde{\delta}(\alpha)u_1u_2 - b\tilde{\delta}(\alpha)u_1}{-u_2 + b}, \end{cases} \tag{3.2.16}$$

где

$$H_4(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.$$

Теперь для интегрирования системы (3.2.16) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (3.2.11) и (3.2.12), которые можно переписать следующим образом.

(i) Для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \tag{3.2.17}$$

(ii) Для некоторых $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ должны выполняться равенства

$$H_4(\alpha) = \lambda_0\tilde{\delta}(\alpha), \quad F^1(\alpha) = \lambda_1\tilde{\delta}(\alpha), \quad F_4^1(\alpha) = \lambda_4\tilde{\delta}(\alpha). \tag{3.2.18}$$

Действительно, после выполнения условий (3.2.11) и (3.2.12) (или (3.2.17) и (3.2.18)) система (3.2.16) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_0 + \kappa u_1^2 + u_2^2 + (\lambda_4 - b)u_2}{(1-\kappa)u_1u_2 + (\lambda_1 - b)u_1}. \tag{3.2.19}$$

Уравнение (3.2.19) имеет вид уравнения Абеля (см. [29, 30, 32]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.2.20}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{w_4^2 + w_3^2 + (\lambda_1 - b)w_4\delta(\alpha) + \lambda_0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{3.2.21}$$

Замечание 3.2. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.2.7) (как часть системы (3.2.7)—(3.2.10)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [21, 23, 25, 31]). При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (3.2.4), геометрического и энергетических условий (3.2.11), (3.2.12) (но при любой гладкой функции $F(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda_1 = \lambda_4 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F(\alpha) + \kappa\dfrac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}w_3^2 - bw_4\tilde{\delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3 = -\kappa\dfrac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}w_3w_4 - bw_3\tilde{\delta}(\alpha). \end{cases} \tag{3.2.22}$$

Действительно, система (3.2.22) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = w_3^2 + w_4^2 - 2bw_4\delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da, \tag{3.2.23}$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}. \tag{3.2.24}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3 f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\} =$$

$$= w_3 f(\alpha) \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_4(b)f^2(b) + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong w_3 \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_4(b)f^2(b)db\right\},$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.2.11) (или (3.2.17)) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4 = -b$, перепишется в виде

$$w_3 \exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db}\ln|\delta(b)|db\right\} \cong w_3\delta(\alpha) \tag{3.2.25}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.2.23), (3.2.24) также является первым интегралом системы (3.2.22). При $\lambda_1 = \lambda_4 \neq -b$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 + (\lambda_1 - b)w_4\delta(\alpha) + \lambda_0\delta^2(\alpha) \tag{3.2.26}$$

и (3.2.24) по отдельности не является первым интегралом системы (3.2.7), однако их отношение является первым интегралом системы (3.2.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda_1 = \lambda_4$, b.

Найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.2.7) при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.2.20) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{\lambda_1 - b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} - \lambda_0. \tag{3.2.27}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 - 4\lambda_0 \geqslant 0, \tag{3.2.28}$$

и фазовое пространство системы (3.2.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.2.27).

Таким образом, в силу соотношения (3.2.20) первое уравнение системы (3.2.16) при условиях (3.2.11) и (3.2.12) и при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{3.2.29}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)}\right\}, \tag{3.2.30}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.2.28). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.2.7) примет вид

$$\int\frac{d\delta(\alpha)}{\delta(\alpha)} = \int\frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)}\}/2}. \tag{3.2.31}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|\delta(\alpha)|$. Если

$$u_2+\frac{\lambda_1-b}{2}=r_1,\quad b_1^2=(\lambda_1-b)^2+C_1^2-4\lambda_0, \tag{3.2.32}$$

то правая часть равенства (3.2.31) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}-b\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\mp\frac{b}{2}I_1, \tag{3.2.33}$$

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{3.2.34}$$

При вычислении интеграла (3.2.34) возможны три случая.

I. $(\lambda_1-b)^2>4\lambda_0$:

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right|+\text{const}. \tag{3.2.35}$$

II. $(\lambda_1-b)^2<4\lambda_0$:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4\lambda_0-(\lambda_1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \tag{3.2.36}$$

III. $(\lambda_1-b)^2=4\lambda_0$:

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \tag{3.2.37}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{z_2}{\delta(\alpha)}+\frac{\lambda_1-b}{2}, \tag{3.2.38}$$

получим окончательный вид для величины I_1:

I. $(\lambda_1-b)^2>4\lambda_0$:

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right|+\text{const}. \tag{3.2.39}$$

II. $(\lambda_1-b)^2<4\lambda_0$:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4\lambda_0-(\lambda_1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \tag{3.2.40}$$

III. $(\lambda_1-b)^2=4\lambda_0$:

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \tag{3.2.41}$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.2.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa=-1$, $\lambda_1=\lambda_4$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [28, 31, 32, 34, 35]).

Замечание 3.3. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.2.20). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{3.2.42}$$

Выражение первого интеграла (3.2.42) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (3.2.7)—(3.2.10) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.2.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу — для систем (3.2.8) и (3.2.9) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.2.10).

Первые интегралы для систем (3.2.8) и (3.2.9) будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2; \tag{3.2.43}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (**??**), (**??**). В предыдущих переменных z первые интегралы (3.2.43) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered}\Theta_3'(z_3, z_2, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Psi_1(\beta_1)} = C_3' = \text{const},\\ \Theta_4'(z_2, z_1; \beta_2) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \Psi_2(\beta_2)} = C_4' = \text{const}.\end{gathered} \tag{3.2.44}$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.2.10), находится по аналогии с (**??**):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \tag{3.2.45}$$

где после взятия интеграла (3.2.45) вместо постоянных C_3, C_4 можно формально подставить левые части равенств (3.2.43) (или (3.2.44)) при $s = 1, 2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.2.7)–(3.2.10) имеет пять первых интегралов, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа). Теорема 3.1 доказана. $\square$

3.3. Приведенная система. Случай II. Модифицируя систему (**??**), получим систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.3.1) (в отличие от системы (**??**)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot{z}_1, \ldots, \dot{z}_4$ соответственно:

$$\tilde{F}(z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha) f_4(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \\ z_4 F_4^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_* M^4\{z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
\dot z_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 -\\
\qquad -\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha),\\
\dot z_3 = F_3(\beta_1) f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 -\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha),\\
\dot z_2 = F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 -\\
\qquad -f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 -\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha),\\
\dot z_1 = F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 -\\
\qquad -f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 -\\
\qquad -f_2(\alpha) g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha),\\
\dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \qquad \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2).
\end{cases}
\tag{3.3.1}
$$

Система (3.3.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha - \left\{b\tilde\delta(\alpha) + F_4^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\alpha -\\
\qquad -F_4(\beta_1) f_4^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_4^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] +\\
\qquad +\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_1 - \left\{F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_1 -\\
\qquad -F_3(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_2 - \left\{F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_2 -\\
\qquad -F_2(\beta_2) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_3 - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_3 -\\
\qquad -F_1(\beta_3) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 +\\
\qquad +2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0;
\end{cases}
\tag{3.3.2}
$$

здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.4. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай II. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.3.1) при выполнении свойств (**??**),

(**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$ и $\dot z_3$ (т.е. присутствует проекция внешней силы лишь на ось $\dot z_4$):

$$F_1(\beta_3) \equiv F_2(\beta_2) \equiv F_3(\beta_1) \equiv 0.$$

Тогда система (3.3.1) допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_3^2 - \\ \qquad -\dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2 - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2 + z_4F_4^1(\alpha), \\ \dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_2^2 - \\ \qquad -f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3 - \\ \qquad -f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\beta_2)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3 - \\ \qquad -f(\alpha)g(\alpha)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_3f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \end{cases} \tag{3.4.1}$$

при наличии также восьмого уравнения

$$\dot\beta_3 = z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \tag{3.4.2}$$

Замечание 3.4. Будем переходить теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.4.1), (3.4.2) при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{3.4.3}$$

Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (**??**), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) = 0. \tag{3.4.4}$$

При переходе от системы (3.3.1) к системе (3.4.1), (3.4.2) использовалась система дифференциальных равенств (**??**), а также группа условий (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**). Нетрудно показать, что из только что всех перечисленных условий условия (3.4.3), (3.4.4) вытекают. Но если систему дифференциальных равенств (**??**) заменить на ее ослабленный вариант — систему дифференциальных равенств (**??**) — то для проведения дальнейшего анализа выполнение условий (3.4.3), (3.4.4) нужно требовать.

Далее наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому также предположим, что выполнены (в некотором смысле, технические) равенства:

$$F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{3.4.5}$$

Для полного интегрирования (по Якоби, см. [1, 4, 37, 40]) рассматриваемой системы (3.4.1), (3.4.2) при условии (3.4.5) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \tag{3.4.6}$$

система (3.4.1), (3.4.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.4.7}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3 \sqrt{\dfrac{1+w_2^2}{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.4.8}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3 \sqrt{1+w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{3.4.9}$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \tag{3.4.10}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.4.7)—(3.4.10) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.4.7), по одному — для систем (3.4.8) и (3.4.9) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.10) (т.е. всего *пять*).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, 4$, выполнены группы равенств

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{3.4.11}$$

а также

$$F_4(\alpha) = \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_4(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \quad k = 1, \ldots, 4. \tag{3.4.12}$$

Здесь, как уже отмечалось, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda^1$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.4.11) *и* (3.4.12). *Тогда система* (3.4.7)—(3.4.10) *обладает полным набором* (*пятью*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Условие (3.4.11) назовем *геометрическим*, а условия группы (3.4.12) — *энергетическими*.

Условие (3.4.11) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения.

Условия группы (3.4.12) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (*знако*)*переменную диссипацию* (см. также [14, 47, 50]).

Схема доказательства. Поставим в соответствие системе третьего порядка (3.4.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{F_4(\alpha) f_4(\alpha) - f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) w_3^2 / f_4(\alpha) + w_4 F_4^1(\alpha)}{w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) w_3 w_4 / f_4(\alpha) + w_3 F^1(\alpha)}{w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.4.13}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_3 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{3.4.14}$$

приведем систему (3.4.13) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4(\alpha) + \Delta(\alpha)F_4^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_4(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.4.15}$$

С учетом (3.4.4) система (3.4.15) почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Big[F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + \\ \qquad + \big[\Delta(\alpha)F_4^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\big]u_2\Big], \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Big[\big[f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)/f_4(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\big]u_1u_2 + \\ \qquad + \big[\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\big]u_1\Big]; \end{cases} \tag{3.4.16}$$

здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (3.4.16) нам потребуется выполнение, которые можно переписать следующим образом:

(i) Для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}. \tag{3.4.17}$$

(ii) Для некоторых $\lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, 4$, должны выполняться равенства

$$F_4(\alpha) = \lambda_4^0\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_4(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad k = 1, \ldots, 4. \tag{3.4.18}$$

Действительно, после выполнения условий (3.4.11) и (3.4.12) (или (3.4.17) и (3.4.18)) система (3.4.16) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_4^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_4^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \tag{3.4.19}$$

Уравнение (3.4.19) имеет вид уравнения Абеля (см. [29,30]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_4^0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{3.4.20}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{3.4.21}$$

Замечание 3.5. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.4.7) (как часть системы (3.4.7)–(3.4.10)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [53,54,57]). При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (3.4.4), геометрического и энергетических условий (3.4.11), (3.4.12) (но при любой гладкой функции $F_4(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_4^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \kappa f_4(\alpha) \dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3^2 - b w_4 f_4(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \kappa f_4(\alpha) \dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 w_4 - b w_3 f_4(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \tag{3.4.22}$$

Действительно, система (3.4.22) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = w_3^2 + w_4^2 + 2b w_4 \Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a) da, \tag{3.4.23}$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3 \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}. \tag{3.4.24}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов имеем

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3 f(\alpha) \exp\left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} =$$

$$= w_3 f(\alpha) \exp\left\{ -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\Gamma_4(b) \frac{f^2(b)}{f_4^2(b)} + \frac{d \ln |f(b)|}{db} \right] db \right\} \cong w_3 \exp\left\{ -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_4(b) \frac{f^2(b)}{f_4^2(b)} db \right\},$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.4.11) (или (3.4.17)) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1 = -b$, перепишется в виде

$$w_3 \exp\left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln |\delta(b)| db \right\} \cong w_3 \delta(\alpha) \tag{3.4.25}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.4.23), (3.4.24) также является первым интегралом системы (3.4.22). При $\lambda^1 = \lambda_4^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 + (b - \lambda^1) w_4 \Delta(\alpha) - \lambda_4^0 \Delta^2(\alpha) \tag{3.4.26}$$

и (3.4.24) по отдельности не является первым интегралом системы (3.4.7), однако их отношение является первым интегралом системы (3.4.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_4^1$, b.

Найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.4.7) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.4.20) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2} \right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_4^0. \tag{3.4.27}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_4^0 \geqslant 0, \tag{3.4.28}$$

и фазовое пространство системы (3.4.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.4.27).

Таким образом, в силу соотношения (3.4.20) первое уравнение системы (3.4.16) при условиях (3.4.11) и (3.4.12) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b) u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b}, \tag{3.4.29}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b) u_2 - \lambda_4^0)} \right\}; \tag{3.4.30}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.4.28). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.4.7) примет вид

$$-\int\frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}=\int\frac{(b+u_2)du_2}{2(\lambda_4^0-(\lambda^1-b)u_2+u_2^2)+C_1\{-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-(\lambda^1-b)u_2-\lambda_4^0)}\}/2}. \quad (3.4.31)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2-\frac{\lambda^1-b}{2}=r_1,\quad b_1^2=(\lambda^1-b)^2+C_1^2+4\lambda_4^0, \quad (3.4.32)$$

то правая часть равенства (3.4.31) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}+b\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\mp\frac{b}{2}I_1, \quad (3.4.33)$$

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \quad (3.4.34)$$

При вычислении интеграла (3.4.34) возможны три случая.

I. $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_4^0$:

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2+4\lambda_4^0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+\text{const}. \quad (3.4.35)$$

II. $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_4^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \quad (3.4.36)$$

III. $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \quad (3.4.37)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{z_3}{\Delta(\alpha)}-\frac{\lambda^1-b}{2}, \quad (3.4.38)$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_4^0$:

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+\text{const}. \quad (3.4.39)$$

II. $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_4^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \quad (3.4.40)$$

III. $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \quad (3.4.41)$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.4.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [17, 52, 59, 63]).

Замечание 3.6. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.4.20). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{3.4.42}$$

Выражение первого интеграла (3.4.42) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (3.4.7)–(3.4.10) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.4.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу — для систем (3.4.8) и (3.4.9) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.10).

Первые интегралы для систем (3.4.8) и (3.4.9) будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2; \tag{3.4.43}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (**??**), (**??**).

В предыдущих переменных z первые интегралы (3.4.43) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered} \Theta_3'(z_3, z_2, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\Psi_1(\beta_1)} = C_3' = \text{const}, \\ \Theta_4'(z_2, z_1; \beta_2) = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Psi_2(\beta_2)} = C_4' = \text{const}. \end{gathered} \tag{3.4.44}$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.10), находится по аналогии с (**??**):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \tag{3.4.45}$$

где после взятия интеграла (3.4.45) вместо постоянных C_3, C_4 можно формально подставить левые части равенств (3.4.43) (или (3.4.44)) при $s = 1, 2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.4.7)—(3.4.10) имеет пять первых интегралов, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа). Теорема 3.2 доказана. □

Заключение

Как известно, понятию интегрируемости придают различные значения в соответствии с тем, в каких функциях производится интегрирование (аналитических, гладких, мероморфных и др.; см. [3, 4, 16, 66, 67]). В данной работе обсуждается вопрос интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе трансцендентных функций, т.е. функций, которые после продолжения в комплексную область имеют существенно особые точки. Понятие интегрируемости в классе трансцендентных функций возникает по причине наличия у системы асимптотических (или притягивающих, или отталкивающих) предельных множеств, т.е. множеств размерности $d \geqslant 1$, или притягивающих, или отталкивающих некоторые области фазового пространства (см. [68, 69, 73]).

Более того, если разрыв трансцендентных интегралов происходит на асимптотических предельных множествах, размерностей $d \geqslant 1$, то удается выяснить наличие в системе, например, предельных циклов. И хотя в последнем случае трансцендентный первый интеграл, как правило, не выражается через элементарные функции, он имеет многообразие неизолированных существенно особых точек.

В работе проанализированы как уже известные ранее работы автора, так и полученные впервые случаи интегрируемости систем с диссипацией разного знака на касательном расслоении к четырехмерному гладкому многообразию, являющемуся пространством положений (конфигурационным пространством) рассматриваемой динамической системы. При этом в работе только что был применен следующий подход. Мы начинаем рассмотрение систем, в которых отсутствует какое-либо («внешнее» или «внутреннее») силовое поле (т.е. мы изучаем по сути дела геодезические потоки). В дальнейшем мы переходим к системам, в которых уже присутствует внешнее силовое поле, но только консервативное. В результате же дальнейшего анализа мы проводим исследование систем, в которых появляется внешнее неконсервативное силовое поле, обладающее диссипацией, причем разных знаков (так называемая (знако)переменная диссипация) (ср. [72,74]).

В следующих работах автора будут получены аналогичные результаты и в системах более высокого порядка (ср. [18, 58, 63, 69, 72]). Более того, в данном случае в многомерных системах будет присутствовать силовое поле существенно неконсервативное, в отличие от монографий автора [67, 68].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
3. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.

18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.

44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.

69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
70. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — xxx. — С. xxx–xxx.
71. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — xxx. — С. xxx–xxx.
72. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
73. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
74. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru