ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 139–148
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-139-148

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ. II. ОБЩИЙ КЛАСС ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа является второй частью обзора по вопросам интегрируемости систем с любым числом n степеней свободы (первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *211*. — С. 41–74). Обзор состоит из трех частей. В первой части подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. В данной второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к n-мерной сфере. В третьей части, которая будет опубликована в следующем выпуске, рассмотрены динамические системы на касательных расслоениях к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система с большим числом степеней свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM: ANALYSIS AND INTEGRABILITY. II. GENERAL CLASS OF DYNAMICAL SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLE OF A MULTIDIMENSIONAL SPHERE

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is the second part of a survey on the integrability of systems with a large number n of degrees of freedom (the first part: *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **211** (2022), pp. 41–74). The review consists of three parts. In the first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field is described in detail. In this second part, we consider more general dynamical systems on the tangent bundles to the n-dimensional sphere. In the third part, which will be published in the next issue, we will consider dynamical systems on the tangent bundles to smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

Keywords and phrases: dynamical system with a large number of degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзорной по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с n степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы по системам с четырьмя и пятью степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое n-мерное многообразие, то его касательное (кокасательное) расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи (см. [6, 22, 30, 33]).

Работа состоит из трех частей. В первой части (см. [71]) проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики n-мерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении $(n-1)$-мерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

В данной второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к n-мерной сфере. Указанные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по n-мерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В заключительной третьей части, которая будет опубликована в следующем выпуске, рассмотрены динамические системы на касательных расслоениях к достаточно обширным классам гладких n-мерных многообразий; для таких систем также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

2. Более общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы

Как известно, в динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы с пространствами положений — конечномерными сферами. Таким образом, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. Так, например, изучение n-мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [7, 17, 18, 73]).

Рассмотренные ранее автором задачи из динамики и свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом исследование проводилось, начиная от систем при отсутствии силового поля, и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий (см. [20, 23, 37]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на n-мерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся, в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для n-мерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (см. [42, 43, 45]).

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности $(n-1)$-мерной сферы, вложенной во объемлющее n-мерное пространство, вообще говоря, в неконсервативном поле сил.

В данном разделе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в динамике n-мерного твердого тела, а также в динамике точки, на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные.

2.1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к n-мерному многообразию. Рассмотрим гладкое n-мерное риманово многообразие M^n с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^n)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; x^1, \ldots, x^n\}$, где $z = (z_n, \ldots, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, n$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид (дифференцирование в данном случае выполняется по натуральному параметру)

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.1.1}$$

2.2. Системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. Рассмотрим следующую систему (2.2.1), (2.2.2) порядка $2(n-1)$:

$$\dot{\alpha} = -z_{n-1} + bg(\alpha), \tag{2.2.1a}$$

$$\dot{z}_{n-1} = F(\alpha) - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)f(\alpha), \tag{2.2.1b}$$

$$\dot{z}_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}f(\alpha) + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)f(\alpha), \tag{2.2.1c}$$

$$\dot{z}_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}f(\alpha) - z_{n-3}z_{n-2}f(\alpha)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{2.2.1d}$$

. . . .

$$\dot{z}_1 = z_1 f(\alpha)\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{2.2.1e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-2}f(\alpha), \tag{2.2.2a}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-3}f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{2.2.2b}$$

. . . .

$$\dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1}z_1 f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{2.2.2c}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере

$$\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2} :\ 0 \leqslant \alpha,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ \beta_{n-2} \bmod 2\pi\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — 2π-периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geqslant 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — (внешнее) силовое поле. О задачах как с внешним, так и внутренним полями см. также в [61, 62, 65].

Первое уравнение подсистемы (2.2.1) и подсистема (2.2.2) задают координаты $z_{n-1}, \ldots, z_1$ в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (2.2.1), (2.2.2) без последнего уравнения является независимой подсистемой порядка $2n-3$ (ввиду цикличности переменной β_{n-2}).

Система (2.2.1), (2.2.2) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\ddot\alpha - b\dot\alpha\tilde g(\alpha) + F(\alpha) -$$
$$- \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\frac{1}{f(\alpha)} = 0, \quad (2.2.3a)$$

$$\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1 g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_1\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde f(\alpha)}{f(\alpha)}\right] - \Big[\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2 +$$
$$+ \dot\beta_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-3}\Big]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \quad (2.2.3b)$$

$$\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2 g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_2\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde f(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \Big[\dot\beta_3^2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_3 +$$
$$+ \dot\beta_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-3}\Big]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \quad (2.2.3c)$$

$$\ddot\beta_3 - b\dot\beta_3 g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_3\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde f(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot\beta_1\dot\beta_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot\beta_2\dot\beta_3\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \Big[\dot\beta_4^2 + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_4 +$$
$$+ \dot\beta_6^2\sin^2\beta_4\sin^2\beta_5 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_4\ldots\sin^2\beta_{n-3}\Big]\sin\beta_3\cos\beta_3 = 0, \quad (2.2.3d)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ddot\beta_{n-4} - b\dot\beta_{n-4} g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_{n-4}\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde f(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-4}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots +$$
$$+ 2\dot\beta_{n-5}\dot\beta_{n-4}\frac{\cos\beta_{n-5}}{\sin\beta_{n-5}} - \left[\dot\beta_{n-3}^2 + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-4} = 0, \quad (2.2.3e)$$

$$\ddot\beta_{n-3} - b\dot\beta_{n-3} g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_{n-3}\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde f(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-3}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots +$$
$$+ 2\dot\beta_{n-4}\dot\beta_{n-3}\frac{\cos\beta_{n-4}}{\sin\beta_{n-4}} - \dot\beta_{n-2}^2\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-3} = 0, \quad (2.2.3f)$$

$$\ddot\beta_{n-2} - b\dot\beta_{n-2} g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_{n-2}\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde f(\alpha)}{f(\alpha)}\right] +$$
$$+ 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} = 0, \quad (2.2.3g)$$

где

$$\tilde g(\alpha) = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}, \quad \tilde f(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}.$$

2.3. Первые интегралы, метрики и силовые поля. При $b = 0$ система (2.2.1), (2.2.2) является консервативной и обладает полным набором (n штук) первых интегралов:

$$F_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \mathrm{const},$$

$$F_2(z_{n-2}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi = C_2 = \mathrm{const},$$

$$F_3(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}f(\xi)d\xi\cdot\sin\beta_1=C_3=\mathrm{const},$$

. . . .

$$F_{n-1}(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3})=z_1\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}f(\xi)d\xi\cdot\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}=C_{n-1}=\mathrm{const},$$

$$F_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=C_n=\mathrm{const}.$$

При $b>0$ система (2.2.1), (2.2.2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним.

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.3.1}$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{2.3.2}$$

Случай (2.3.1) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного n-мерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. часть 1 данной работы: [71]).

Случай (2.3.2) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на $(n-1)$-мерной сфере, вложенной во объемлющее n-мерное пространство, также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется естественным образом евклидовой метрикой объемлющего n-мерного пространства. В частности, при $g(\alpha)\equiv F(\alpha)\equiv 0$ система (2.2.1), (2.2.2) описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере.

Замечание 2.3.1. В случае (2.3.1), если

$$g(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}, \tag{2.3.3}$$

то система (2.2.1), (2.2.2) описывает движение свободного n-мерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если

$$F(\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha,\quad g(\alpha)=\sin\alpha, \tag{2.3.4}$$

то система (2.2.1), (2.2.2) описывает также закрепленный n-мерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей n-мерное пространство, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим (асимптотическим) предельным множествам системы (2.2.1), (2.2.2).

Для полного интегрирования системы (2.2.1), (2.2.2) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных в касательном пространстве

$$\begin{gathered}w_1=\frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}},\quad w_2=\frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2}},\\ w_{n-4}=\frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}},\quad w_{n-3}=\frac{z_2}{z_1},\quad w_{n-2}=w=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2},\quad w_{n-1}=z_{n-1},\end{gathered} \tag{2.3.5}$$

система (2.2.1), (2.2.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_{n-1} + g(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} = F(\alpha) - w_{n-2}^2 f(\alpha), \\ \dot{w}_{n-2} = w_{n-2} w_{n-1} f(\alpha), \end{cases} \tag{2.3.6}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_k = d_k \dfrac{1 + w_k^2}{w_k} \dfrac{\cos \beta_k}{\sin \beta_k}, \\ \dot{\beta}_k = d_k, \ k = 1, \ldots, n-3, \end{cases} \tag{2.3.7}$$

$$\dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1} \mathcal{Z}_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \ldots \sin \beta_{n-3}}, \tag{2.3.8}$$

где $\mathcal{Z}_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (2.3.5), d_k, $k = 1, \ldots, n-3$, — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (2.3.6)–(2.3.8) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.3.6), по одному — для систем (2.3.7) (т.е. $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.8)(т.е. всего n).

2.4. Случай (2.3.1)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a - 1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \tag{2.4.1}$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (2.3.4).

Теорема 2.4.1. *В случаях* (2.3.1), (2.4.1) *система* (2.2.1), (2.2.2) *обладает полным набором* (n *штук*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2.4.1. *Система* (2.2.3) *при условиях* (2.3.1), (2.4.1) *обладает* n*, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_{n-2} = u_1 \tau^a, \quad w_{n-1} = u_2 \tau^a,$$

то поиск ключевого первого интеграла

$$\Phi_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_1$$

системы (2.3.6) приведет к уравнению Абеля (см. [29])

$$[(a+1)u_2 - ab] u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + a u_2^2 - ab u_2] du_1, \tag{2.4.2}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ если и интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций, то выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_2$$

системы (2.3.6) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2) du_2}{1 - U_1^2(u_2) + a u_2^2 - ab u_2}. \tag{2.4.3}$$

Первые интегралы для систем (2.3.7) имеют вид

$$\Phi_{k+2}(w_k; \beta_k) = \frac{\sqrt{1 + w_k^2}}{\sin \beta_k} = C_{k+2} = \mathrm{const}, \quad k = 1, \ldots, n-3, \tag{2.4.4}$$

а дополнительный первый интеграл

$$\Phi_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n,$$

«привязывающий» уравнение (2.3.8), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{z_1}{z_2 \sin \beta_{n-3}}; \tag{2.4.5}$$

при этом, используя первый интеграл (2.4.4) при $k = n-4, n-3$, окончательно получим его вид:

$$\Phi_n(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \operatorname{arctg} \frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \text{const}. \tag{2.4.6}$$

В частности, при $a = 1$ равенство (2.4.2) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}.$$

2.5. Случай (2.3.2)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.5.1}$$

Теорема 2.5.1. *В случаях* (2.3.2), (2.5.1) *система* (2.2.1), (2.2.2) *обладает полным набором* (n *штук*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2.5.1. *Система* (2.2.3) *при условиях* (2.3.2), (2.5.1) *обладает* n*, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad w_{n-2} = u_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k, \quad w_{n-1} = u_2\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k,$$

то поиск ключевого первого интеграла $\Phi_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_1$ системы (2.3.6) приведет к уравнению Абеля (2.4.2) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_2$$

системы (2.3.6) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (2.3.7) имеют вид (2.4.4), а дополнительный первый интеграл

$$\Phi_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n,$$

«привязывающий» уравнение (2.3.8), найдется из равенства (2.4.5), при этом, используя первый интеграл (2.4.4) при $k = n-3, n-4$, окончательно получим его в виде (2.4.6).

В частности, при $k = 1$ равенство (2.4.2) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-1}\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2)\cos^2\alpha - bw_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha\cos\alpha} = C_1 = \text{const}.$$

В предыдущих работах автора [60, 64] уже рассматривались задачи о движении свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к $(n-1)$-мерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по $(n-1)$-мерной сфере в более общих, чем ранее, неконсервативных силовых полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 46–51.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 71–86.
3. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
4. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.

5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
15. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
16. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
17. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
18. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
28. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
31. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.

32. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4.* — С. 57–69.
33. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
34. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
35. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
36. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
37. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
38. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
39. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
40. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
41. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
42. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
43. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
48. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
49. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
50. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
51. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
53. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.

57. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
70. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
71. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *211*. — С. xx–xx.
72. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
73. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
74. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
75. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`