



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 36–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-36-49

УДК 515.12

СВОЙСТВО УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ, НЕПРЕРЫВНО СОДЕРЖАЩИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, И ИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2023 г. С. Д. ИЛИАДИС, Ю. В. САДОВНИЧИЙ

Аннотация. В статье рассматриваются (сепарабельные метрические) пространства, непрерывно содержащие топологические группы, и отображения таких пространств. Доказано, что в некоторых классах таких пространств и классах отображений, связанных с насыщенными классами пространств, существуют правильно (и изометрично) универсальные элементы.

Ключевые слова: топологическая группа, сепарабельное метрическое пространство, изометрия, правильное отображение, насыщенный класс пространств, универсальное пространство, универсальное отображение.

UNIVERSALITY PROPERTY FOR SPACES THAT CONTINUOUSLY CONTAIN TOPOLOGICAL GROUPS AND THEIR MAPPINGS

© 2023 S. D. ILIADIS, Yu. V. SADOVNICHII

ABSTRACT. In the paper, (separable metric) spaces continuously containing topological groups and mappings of such spaces are considered. It is proved that in some classes of such spaces and classes of mappings associated with saturated classes of spaces there exist regular (and isometrically) universal elements.

Keywords and phrases: topological group, separable metric space, isometry, regular mapping, saturated class of spaces, universal space, universal mapping.

AMS Subject Classification: 54H11

1. Введение. В этой статье предполагаем все пространства и топологические группы (в частности, элементы классов пространств) T_0 -пространствами веса $\leq \tau$, где τ — произвольный фиксированный бесконечный кардинал (который отождествляется с множеством всех ординалов мощности $< \tau$). Через ω обозначаем первый бесконечный кардинал. Через $\mathcal{F}$ обозначаем множество всех конечных подмножеств кардинала τ . При введении новых обозначений используем символ $\equiv$. Кроме того, предполагаем, что всякий рассматриваемый класс $\mathbb{S}$ пространств обладает тем свойством, что если топологическое или метрическое пространство Q гомеоморфно элементу класса $\mathbb{S}$, то Q также является элементом класса $\mathbb{S}$.

Классический результат Урысона, который гласит, что любое сепарабельное метризуемое пространство вкладывается в гильбертово пространство, т.е. гильбертово пространство топологически универсально для класса всех сепарабельных метризуемых пространств, стимулировало интерес к поиску других классов пространств, в которых имеются топологически универсальные элементы. Было опубликовано множество статей, в которых строились такие классы.

В [1] были поставлены следующие общие задачи (см. раздел 3.3, задачи 7 и 8) для произвольных классов топологических пространств:

Задача 7. Пусть дан класс $\mathcal{P}$ топологических пространств. Указать (если возможно) «стандартные» топологические пространства Y , в которые можно вложить каждое пространство из класса $\mathcal{P}$. Найти наиболее простые среди таких пространств Y .

Разновидностью задачи 7 является следующая задача об универсальном объекте:

Задача 8. Для каких классов $\mathcal{P}$ топологических пространств существует в классе $\mathcal{P}$ пространство X , в которое вкладывается каждое пространство из $\mathcal{P}$?

В книге [15] был предложен метод построения так называемых содержащих пространств для любого класса $\mathcal{P}$ топологических пространств. Эти пространства можно рассматривать как удовлетворительное решение общей задачи 7 статьи [1]. Кроме того, содержащие пространства можно использовать для нахождения классов $\mathcal{P}$, в которых имеются универсальные элементы, что дает удовлетворительное решение общей задачи 8 статьи [1].

На самом деле процитированные выше задачи можно ставить не только для классов топологических пространств, но также и в любой категории, в которой определено понятие вложения одного объекта в другой. Обычно рассматриваются категории топологических пространств, в которых морфизмами являются непрерывные отображения, с теми или иными дополнительными свойствами. В литературе можно найти много статей, посвященных универсальным объектам в таких категориях. Среди других рассматриваемых категорий — категории отображений, групп, решеток и пучков абелевых групп. Метод построения содержащих пространств из книги [15] применялся к этим категориям, например, в статьях [8–12, 14, 16–20].

В этой статье будем рассматривать так называемые насыщенные классы пространств и ω^+ -насыщенные классы пространств (они *насыщены* универсальными элементами), а также изометрические отображения. (Определения этих классов в терминах содержащих пространств можно найти в разделе «Предварительные сведения».) Ниже приведены примеры насыщенных классов:

- (1) класс $\mathcal{S}$ всех пространств (см. [13, предложения 2.9 и 2.10]);
- (2) класс $\mathcal{S}[\mathbf{r}]$ всех регулярных пространств (см. [13, предложение 3.5]);
- (3) класс $\mathcal{S}[\mathbf{cr}]$ всех вполне регулярных пространств (см. [13, следствие 3.8]);
- (4) класс $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq n]$ всех пространств размерности $\mathbf{ind} \leq n \in \omega$ (см. [15, следствие 3.1.6]);
- (5) класс $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq \alpha]$ всех пространств размерности $\mathbf{ind} \leq \alpha \in \omega^+$ (см. [15, следствие 3.1.6]);
- (6) класс $\mathcal{S}[\mathbf{cd}]$ всех счетномерных пространств (см. [15, предложение 4.4.4]);
- (7) класс $\mathcal{S}[\mathbf{scd}]$ всех сильно счетномерных пространств (см. [15, предложение 4.4.4]);
- (8) класс $\mathcal{S}[\mathbf{lfd}]$ всех локально конечномерных пространств (см. [15, предложение 4.4.4]);
- (9) пересечение любых классов среди вышеперечисленных (см. [13, предложение 3.3]).

Во всех перечисленных случаях под *размерностью* подразумевается малая (трансфинитная) индуктивная размерность. Классы 1–9 являются также ω^+ -насыщенными. Однако, вообще говоря, насыщенный класс не обязан быть ω^+ -насыщенным, и наоборот. Таким образом, результаты настоящей статьи остаются верными, если в их формулировках заменить насыщенные или ω^+ -насыщенные классы пространств любыми классами из перечисленных выше классов 1–9. Этим путем для разных классов пространств получаются разные независимые друг от друга результаты, но схемы доказательств у них общие.

Отметим, что для $\tau = \omega$ существование топологически универсальных пространств в классах метризуемых элементов классов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\mathbf{cd}]$, $\mathcal{S}[\mathbf{scd}]$, $\mathcal{S}[\mathbf{lfd}]$ были построены в статьях [3, 23, 23–25, 27, 29].

В книге [15] для $\tau = \omega$ были построены изометрично универсальные пространства в классе всех метрических пространств из любого ω^+ -насыщенного класса пространств. В частности, такие элементы были построены в классах всех метрических элементов классов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\mathbf{cd}]$, $\mathcal{S}[\mathbf{scd}]$ и $\mathcal{S}[\mathbf{lfd}]$. Касательно класса $\mathcal{S}$ всех сепарабельных метрических пространств отметим, что построенные изометрично универсальные пространства отличаются от хорошо известного универсального метрического пространства Урысона (см. [26]), а также от пространства

$C[0, 1]$ всех непрерывных функций на единичном отрезке $[0, 1]$ с топологией равномерной сходимости, которое, согласно [6], также универсально для этого класса. В 1986 г. результат Урысона был обобщен (см. [22]) на метрические пространства веса $\leq \tau$, где τ удовлетворяет некоторым специальным условиям.

В этой статье рассматриваем классы (сепарабельных метрических) пространств, непрерывно содержащие топологические группы, и правильные (изометрические) отображения этих пространств. Понятие пространства, непрерывно содержащего все элементы семейства $\mathbb{G}$ топологических групп, было введено в [2] в качестве альтернативы понятию универсального элемента в $\mathbb{G}$. Универсальные элементы в классе всех топологических групп веса $\leq \omega$ были построены в [4, 28] (см. также [5, 7], где универсальные элементы были построены для абелевых топологических групп). Однако проблема существования универсальных элементов в классе всех топологических групп веса $\tau \neq \omega$ (см. [28]) до сих пор не решена. (Другие открытые вопросы, касающиеся существования универсальных элементов в разных классах топологических групп, можно найти в [2, 5].) В [2] было доказано, что существует пространство веса τ , непрерывно содержащее все топологические группы веса $\leq \tau$, а в [21] — что в классе всех пространств веса $\leq \tau$, непрерывно содержащих топологические группы, есть правильно универсальные элементы.

В настоящей статье доказано, что в разных классах (сепарабельных метрических) пространств, непрерывно содержащих топологические группы, имеются правильно (и изометрически) универсальные элементы. Кроме того, универсальные элементы имеются и в разных классах отображений между (сепарабельными метрическими) пространствами, непрерывно содержащими топологические группы.

2. Предварительные сведения. Для произвольного отображения f пространств через Q_d^f обозначаем область определения f , а через Q_r^f — область значений f .

2.1. О пространствах, непрерывно содержащих топологические группы. Напомним определения пространств, непрерывно содержащих топологические группы, а также некоторых связанных с ними понятий. Пусть Q — пространство, $\mathbf{G}$ — семейство топологических групп и $\mathbf{G}^Q$ — индексация семейства $\mathbf{G}$. Предположим, что для каждого $X \in \mathbf{G}^Q$ h_Q^X — такое вложение X в Q , что $\bigcup \{h_Q^X(X) : X \in \mathbf{G}^Q\} = Q$. Будем говорить, что Q — *непрерывно содержащее пространство для $\mathbf{G}^Q$ относительно семейства $h_Q^{\mathbf{G}^Q} \equiv \{h_Q^X : X \in \mathbf{G}^Q\}$ вложений* ($\equiv$ ССТГ-пространство для $\mathbf{G}^Q$ относительно $h_Q^{\mathbf{G}^Q}$), если выполнено следующее условие: для любых $x, y \in X \in \mathbf{G}^Q$ и любой окрестности U точки $h_Q^X(xy^{-1})$ в Q существуют окрестности V и W точек $h_Q^X(x)$ и $h_Q^X(y)$ в Q соответственно такие, что для любых $x', y' \in Y \in \mathbf{G}^Q$, удовлетворяющих условиям $h_Q^Y(x') \in V$ и $h_Q^Y(y') \in W$, имеем $h_Q^Y(x'(y')^{-1}) \in U$.

При рассмотрении ССТГ-пространства Q всегда предполагаем, что задано фиксированное индексированное семейство топологических групп $\mathbf{G}^Q$ и для каждого $X \in \mathbf{G}^Q$ имеется фиксированное топологическое вложение h_Q^X группы X в Q такое, что Q — непрерывно содержащее пространство для $\mathbf{G}^Q$ относительно семейства $h_Q^{\mathbf{G}^Q} \equiv \{h_Q^X : X \in \mathbf{G}\}$ вложений. Будем исследовать топологические и метрические ССТГ-пространства Q . В первом случае Q рассматривается как топологическое пространство, а во втором — как метрическое.

Предположение. Для удобства обозначений всякий раз при рассмотрении ССТГ-пространства Q будем отождествлять каждую точку $x \in X \in \mathbf{G}^Q$ с точкой $h_Q^X(x)$ и, тем самым, группу X с подмножеством $h_Q^X(X)$ пространства Q .

Для каждого ССТГ-пространства Q определим подмножество A_Q произведения $Q \times Q$, отображение $p_Q: A_Q \rightarrow Q$ и отображение $i_Q: Q \rightarrow Q$ следующим образом: включаем точку $(x, y) \in Q \times Q$ в A_Q , если и только если существует элемент $X \in \mathbf{G}^Q$, для которого $x, y \in X$, и полагаем $p_Q(x, y) = xy$ и $i_Q(x) = x^{-1}$ (произведение и операция перехода к обратному элементу рассматриваются в $X = h_Q^X(X)$). В силу [21, лемма 2.1] отображения p_Q и i_Q определены корректно (т.е. не зависят от топологической группы $X \in \mathbf{G}^Q$, фигурирующей в их определении) и непрерывны.

Примеры ССТG-пространств — любая топологическая группа Q , для которой $\mathbf{G}^Q$ — семейство всех подгрупп Q и $h_Q^{\mathbf{G}^Q}$ состоит из тождественных отображений, произведение любого пространства X и любой топологической группы G , для которого $\mathbf{G}^{X \times G} = \{\{x\} \times G : x \in X\}$ и $h_Q^{\mathbf{G}^Q}$ состоит из тождественных отображений, и любой пучок $\mathcal{A}$ абелевых групп на пространстве X , для которого $\mathbf{G}^{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_x : x \in X\}$ и $h_Q^{\mathbf{G}^Q}$ состоит из тождественных отображений. Произвольное пространство Q тоже можно рассматривать как ССТG-пространство, считая, что $\mathbf{G}$ состоит только из тривиальной группы e и $\mathbf{G}^Q = \{e_x : x \in X\}$, где $e_x = e$ и $h_Q^{e_x}(e_x) = x$.

Правильные отображения ССТG-пространств. Пусть Q_1 и Q_2 — ССТG-пространства. Непрерывное отображение f пространства Q_1 в Q_2 называется *правильным*, если существует отображение $\varphi_{\mathbf{G}^{Q_2}}^{\mathbf{G}^{Q_1}} : \mathbf{G}^{Q_1} \rightarrow \mathbf{G}^{Q_2}$ такое, что для каждого $X \in \mathbf{G}^{Q_1}$ сужение $f|_X$ отображения f на X является гомоморфизмом X на $\varphi_{\mathbf{G}^{Q_2}}^{\mathbf{G}^{Q_1}}(X)$. (Таким образом, если f — вложение, то $f|_X$ — изоморфизм группы X на $\varphi_{\mathbf{G}^{Q_2}}^{\mathbf{G}^{Q_1}}(X)$.) В случае, когда Q_1 и Q_2 — метрические ССТG-пространства, правильное отображение f называется *правильной изометрией*, если f является изометрией.

Универсальные ССТG-пространства. Пусть $\mathbb{C}$ — класс топологических ССТG-пространств (класс метрических ССТG-пространств). Элемент $T \in \mathbb{C}$ называется *правильно* (соответственно, *правильно и изометрически*) универсальным в $\mathbb{C}$, если для каждого $Q \in \mathbb{C}$ существует правильное (соответственно, правильное и изометрическое) вложение i_T^Q пространства Q в T .

Универсальные отображения ССТG-пространств. Пусть $\mathbb{F}$ — класс правильных (правильных и изометрических) сюръективных отображений топологических (соответственно, метрических) ССТG-пространств, и пусть $F : T_1 \rightarrow T_2$ и $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ — два элемента класса $\mathbb{F}$. Предположим, что существуют правильные (соответственно, правильные и изометрические) вложения $i_{T_1}^{Q_1}$ пространства Q_1 в T_1 и $i_{T_2}^{Q_2}$ пространства Q_2 в T_2 такие, что

$$\varphi_{\mathbf{G}^{T_2}}^{\mathbf{G}^{T_1}} \circ \varphi_{\mathbf{G}^{T_1}}^{\mathbf{G}^{Q_1}} = \varphi_{\mathbf{G}^{T_2}}^{\mathbf{G}^{Q_2}} \circ \varphi_{\mathbf{G}^{Q_2}}^{\mathbf{G}^{Q_1}}, \quad F \circ i_{T_1}^{Q_1} = i_{T_2}^{Q_2} \circ f.$$

В этом случае будем говорить, что F *правильно* (соответственно, *правильно и изометрически*) *содержит* f . Если, сверх того, вложения $i_{T_1}^{Q_1}$ и $i_{T_2}^{Q_2}$ сюръективны, то будем говорить, что F и f *правильно* (соответственно, *правильно и изометрически*) *гомеоморфны*. Назовем элемент $F : T_1 \rightarrow T_2$ класса $\mathbb{F}$ *правильно* (соответственно, *правильно и изометрически*) универсальным в $\mathbb{F}$, если F содержит любой элемент класса $\mathbb{F}$.

2.2. О содержащих пространствах. Пусть $\mathbf{S}$ — произвольное семейство топологических пространств веса $\leq \tau$. При построении универсальных пространств методом содержащих пространств используем понятия базы $\mathbf{B}$ семейства $\mathbf{S}$, расширения базы $\mathbf{B}$, допустимого семейства $\mathbf{R}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, финального измельчения допустимого семейства $\mathbf{R}$, допустимого семейства $\mathbf{R}_{\mathbf{B}} \equiv \{\sim_{\mathbf{B}}^s : s \in \mathcal{F}\}$, $\mathbf{B}$ -допустимого семейства отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, содержащего пространства $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{B}, \mathbf{R})$, стандартной базы $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ открытых подмножеств пространства $\mathbf{T}$ и естественного вложения $i_{\mathbf{T}}^X$ пространства $X \in \mathbf{S}$ в $\mathbf{T}$. Определения всех этих понятий можно найти, например, в разделе «Предварительные сведения» статьи [21]. (Доказательства содержатся в работах, цитированных в списке литературы в [21]; дополнительную информацию можно найти в [15, гл. 1].) В терминах этих понятий насыщенный класс пространств определяется следующим образом.

Класс $\mathbb{S}$ пространств называется *насыщенным*, если у каждого индексированного семейства $\mathbf{S}$ элементов $\mathbb{S}$ имеется база $\mathbf{B}_0$ такая, что для любого расширения $\mathbf{B}$ базы $\mathbf{B}_0$ существует $\mathbf{B}$ -допустимое семейство $\mathbf{R}_0$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ с тем свойством, что для каждого допустимого семейства $\mathbf{R}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, являющегося финальным измельчением семейства $\mathbf{R}_0$, содержащее пространство $\mathbf{T}(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ принадлежит классу $\mathbb{S}$. В этом случае база $\mathbf{B}_0$ называется *инициальной базой для семейства $\mathbf{S}$ (соответствующей классу $\mathbb{S}$)*, а семейство $\mathbf{R}_0$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ называется *инициальным семейством отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ (соответствующим базе $\mathbf{B}$ и классу $\mathbb{S}$)*. Заметим, что расширение инициальной базы само

является инициальной базой, а семейство отношений эквивалентности, являющееся финальным измельчением инициального, само является инициальным семейством отношений эквивалентности.

В настоящей статье рассматриваем ω^+ -допустимые семейства отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ вместо допустимых семейств ($\equiv \omega$ -допустимых). Напомним определение этих семейств (см. [15, гл. 9]): семейство $R \equiv \{\sim^s: s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ называется ω^+ -допустимым, если

- (а) для каждого $s \in \mathcal{F}$ число классов эквивалентности отношения $\sim^s$ меньше ω^+ , т.е. конечно или счетно, и
- (б) для любых $s \subset t \in \mathcal{F}$ выполнены отношения $\sim^t \subset \sim^s$.

Таким образом, единственное отличие между ω^+ -допустимым семейством и допустимым семейством состоит в числе классов эквивалентности для отношений эквивалентности из этих классов: для допустимых семейств число классов эквивалентности конечно.

Заметим, что во всех приведенных выше определениях, в которых фигурируют допустимые семейства (в том числе, в определении насыщенного класса), не используется конечность числа классов эквивалентности для отношений из рассматриваемых допустимых семейств. Это означает, что в этих определениях можно заменить допустимые семейства на ω^+ -допустимые. При этом, если вес всех элементов семейства $\mathbf{S}$ не превосходит бесконечного кардинала τ и R — ω^+ -допустимое семейство, то вес соответствующего содержащего пространства $\mathbf{T}$ так же не превосходит τ .

Таким образом, получаем определения новых понятий, соответствующих перечисленным выше «старым» понятиям. Будем называть новые семейства отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, соответствующие допустимым или $\mathbf{B}$ -допустимым семействам, ω^+ -допустимыми или $(\mathbf{B}, \omega^+)$ -допустимыми соответственно, а новые насыщенные классы пространств — ω^+ -насыщенными. Названия других понятий не будем менять, поскольку из контекста всегда будет ясно, какие модификации имеются в виду, «новые» или «старые».

Как уже отмечалось, вообще говоря, из определений не следует, что насыщенный класс пространств является ω^+ -насыщенным и наоборот. Однако можно доказать, что некоторые конкретные насыщенные классы являются ω^+ -насыщенными. Например, если доказательство того, что класс $\mathbb{S}$ является насыщенным, не использует конечность числа классов эквивалентности для отношений из рассматриваемых допустимых семейств, то такой класс является ω^+ -насыщенным. Можно проверить, что ω^+ -насыщены классы пространств $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}(\tau)$, $\mathcal{S}(\text{cr})$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\text{cd}]$, $\mathcal{S}[\text{scd}]$, $\mathcal{S}[\text{lfd}]$, а также все попарные пересечения этих классов.

3. Формулировки результатов.

3.1. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств веса $\leq \omega$ (т.е. $\tau = \omega$) и $\mathbf{G}$ — семейство топологических групп. Тогда в классе $\mathbb{C}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ всех метрических CCTG-пространств $Q \in \mathbb{S}$, для которых $\mathbf{G}^Q$ — индексация семейства $\mathbf{G}$, существует правильно и изометрически универсальный элемент.

3.1А. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств веса $\leq \omega$ (т.е. $\tau = \omega$). Тогда в классе $\mathbb{C}^m(\mathbb{S})$ всех метрических CCTG-пространств $Q \in \mathbb{S}$ существует правильно и изометрически универсальный элемент.

3.2. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств (веса $\leq \tau$) и $\mathbf{G}$ — семейство топологических групп. Тогда в классе $\mathbb{C}_{\mathbf{G}}(\mathbb{S})$ всех CCTG-пространств $Q \in \mathbb{S}$, для которых $\mathbf{G}^Q$ является индексацией семейства $\mathbf{G}$, существует правильно универсальный элемент.

3.2А. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств (веса $\leq \tau$). Тогда в классе $\mathbb{C}(\mathbb{S})$ всех CCTG-пространств $Q \in \mathbb{S}$ существует правильно универсальный элемент.

3.3. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств веса $\leq \omega$ (т.е. $\tau = \omega$) и $\mathbf{G}$ — семейство топологических групп. Тогда в классе $\mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ всех правильных и изометрических сюръективных отображений f , для которых $Q_d^f \in \mathbb{S}$ является метрическим CCTG-пространством

и $\mathbf{G}^{Q_d^f}$ является индексацией семейства $\mathbf{G}$, существует правильно и изометрически универсальный элемент.

3.3А. Теорема. Пусть $\mathbb{S} - \omega^+$ -насыщенный класс пространств веса $\leq \omega$ (т.е. $\tau = \omega$). Тогда в классе $\mathbb{F}^m(\mathbb{S})$ всех правильных и изометрических сюръективных отображений f , для которых $Q_d^f \in \mathbb{S}$ — метрическое CCTG-пространство, существует правильно и изометрически универсальный элемент.

3.4. Теорема. Пусть $\mathbb{S}_d$ и $\mathbb{S}_r$ — два ω^+ -насыщенных класса пространств (веса $\leq \tau$), и пусть $\mathbf{G}_d$ и $\mathbf{G}_r$ — два семейства топологических групп. Тогда в классе $\mathbb{F}_{\mathbf{G}_d, \mathbf{G}_r}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$ всех правильных сюръективных отображений f , чьи область определения Q_d^f и область значений Q_r^f являются CCTG-пространствами, причем $Q_d^f \in \mathbb{S}_d$, $Q_r^f \in \mathbb{S}_r$, $\mathbf{G}^{Q_d^f}$ является индексацией семейства $\mathbf{G}_d$ и $\mathbf{G}^{Q_r^f}$ является индексацией семейства $\mathbf{G}_r$, существует правильно универсальный элемент.

3.4А. Теорема. Пусть $\mathbb{S}_d$ и $\mathbb{S}_r$ — два ω^+ -насыщенных класса пространств (веса $\leq \tau$). Тогда в классе $\mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$ всех правильных сюръективных отображений f , чьи область определения Q_d^f и область значений Q_r^f являются CCTG-пространствами, причем $Q_d^f \in \mathbb{S}_d$ и $Q_r^f \in \mathbb{S}_r$, существует правильно универсальный элемент.

3.5. Следствие. Для $\tau = \omega$ теоремы 3.1, 3.1А, 3.3 и 3.3А остаются верными, если в качестве класса $\mathbb{S}$ взять любой из классов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\text{cd}]$, $\mathcal{S}[\text{scd}]$, $\mathcal{S}[\text{lfd}]$ или пересечение любых двух из этих классов. Для произвольного τ теоремы 3.2, 3.2А, 3.4 и 3.4А остаются верными, если в качестве классов $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ взять один из классов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}(r)$, $\mathcal{S}(\text{cr})$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\text{cd}]$, $\mathcal{S}[\text{scd}]$, $\mathcal{S}[\text{lfd}]$ или пересечение любых двух из этих классов.

4. Доказательства.

Доказательство теоремы 3.1. Из теоретико-множественных соображений заключаем, что существуют семейство $\mathbf{S}$ элементов класса $\mathbb{C}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ с тем свойством, что для каждого элемента класса $\mathbb{C}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ существует правильный и изометрический гомеоморфизм между этим элементом и элементом семейства $\mathbf{S}$. Следовательно, любое метрическое CCTG-пространство $T \in \mathbb{C}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$, правильно и изометрически содержащее все элементы семейства $\mathbf{S}$, является нужным универсальным элементом семейства $\mathbb{S}$.

Требуемое универсальное пространство T строится как содержащее пространство $T(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ для некоторой индексированной базы $\mathbf{B}$ семейства $\mathbf{S}$ и подходящего $(\mathbf{B}, \omega^+)$ -допустимого семейства $\mathbf{R}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$. В качестве базы $\mathbf{B}$ семейства $\mathbf{S}$ возьмем произвольную инициальную базу семейства $\mathbf{S}$, соответствующую ω^+ -насыщенному классу $\mathbb{S}$:

$$\mathbf{B} \equiv \{\{U_i^Q : i \in \omega\} : Q \in \mathbf{S}\}.$$

(Следовательно, $\{U_i^Q : i \in \omega\}$ — индексированная база открытых подмножеств пространства $Q \in \mathbf{S}$.)

Прежде чем переходить к построению семейства $\mathbf{R}$, напомним два определения (см. [15, раздел 9.1]). Для каждого $Q \in \mathbf{S}$ обозначим через $\{a_i^Q : i \in \omega\}$ произвольное индексированное плотное подмножество пространства Q и положим

$$\mathbf{P} \equiv \{\{a_i^Q : i \in \omega\} : Q \in \mathbf{S}\}.$$

Определение 1. Для любых $Q \in \mathbf{S}$, $n \in \omega$ и $i, j \in n + 2$ элементы $k_0(Q, n, i, j)$, $k_1(Q, n, i, j)$ и $k(Q, n, i)$ множества $\omega \cup \{\infty\}$ определяются следующим образом:

(а) $k_0(Q, n, i, j)$ — элемент k множества ω , однозначно определенный условием

$$\frac{k}{n+2} \leq \rho_Q(a_i^Q, Q \setminus U_j^Q) < \frac{k+1}{n+2}$$

для $U_j^Q \neq Q$; если $U_j^Q = Q$, то $k_0(Q, n, i, j) = \infty$;

(b) $k_1(Q, n, i, j)$ — элемент k множества ω , однозначно определенный условием

$$\frac{k}{n+2} \leq \rho_Q(a_i^Q, a_j^Q) < \frac{k+1}{n+2};$$

(c) $k(Q, n, i)$ — элемент k множества ω , однозначно определенный условием

$$\frac{k}{n+2} \leq \text{Diam}(U_i^Q) < \frac{k+1}{n+2},$$

если $\text{Diam}(U_i^Q) < \infty$; если $\text{Diam}(U_i^Q) = \infty$, то $k(Q, n, i) = \infty$.

Определение 2. Скажем, что ω^+ -допустимое семейство

$$R \equiv \{\sim^s: s \in \mathcal{F}\}$$

отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ является $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ -допустимым, если для каждого $n \in \omega$ существует неотрицательное целое $m \geq n$, такое, что

(*) $\sim^m \subset \sim_{\mathbf{B}}^n$ и

(**) для любых $\sim^m$ -эквивалентных $Q_1, Q_2 \in \mathbf{S}$ и любых $i, j \in n+2$ выполнены соотношения

$$k_0(Q_1, n, i, j) = k_0(Q_2, n, i, j); \quad k_1(Q_1, n, i, j) = k_1(Q_2, n, i, j); \quad k(Q_1, n, i) = k(Q_2, n, i).$$

Обозначим наименьшее неотрицательное целое m , для которого выполнены эти условия, через $m(n)$. Заметим, что любое ω^+ -допустимое семейство отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, являющееся финальным измельчением $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ -допустимого семейства, само является $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ -допустимым.

Назовем семейство отношений эквивалентности

$$R \equiv \{\sim^s: s \in \mathcal{F}\}$$

$(\mathbf{B}, \omega^+)$ -допустимым, если оно является инициальным семейством отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, соответствующим базе $\mathbf{B}$ и классу $\mathbf{S}$, и удовлетворяет следующим условиям:

(A) для каждого $s \in \mathcal{F}$ и любых $\sim^s$ -эквивалентных элементов Q_0 и Q_1 семейства $\mathbf{S}$ и того факта, что

$$(U_{i_1}^{Q_0} \times U_{i_2}^{Q_0}) \cap A_{Q_0} \subset (p_{Q_0})^{-1}(U_{i_0}^{Q_0})$$

для некоторых $i_0, i_1, i_2 \in s$, вытекает, что

$$(U_{i_1}^{Q_1} \times U_{i_2}^{Q_1}) \cap A_{Q_1} \subset (p_{Q_1})^{-1}(U_{i_0}^{Q_1});$$

(B) для каждого $s \in \mathcal{F}$ и любых $\sim^s$ -эквивалентных элементов Q_0 и Q_1 семейства $\mathbf{S}$ из того факта, что

$$U_{i_1}^{Q_0} \subset i_{Q_0}^{-1}(U_{i_0}^{Q_0})$$

для некоторых $i_0, i_1 \in s$, вытекает, что

$$U_{i_1}^{Q_1} \subset i_{Q_1}^{-1}(U_{i_0}^{Q_1});$$

(C) семейство R $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ -допустимо.

Лемма 1. Существует ω^+ -допустимое семейство $R \equiv \{\sim^s: s \in \omega\}$, удовлетворяющее условиям (A)–(C).

Доказательство. Сперва зафиксируем $s \in \mathcal{F}$ и $i_0, i_1, i_2 \in s$ и определим отношение эквивалентности $\sim (A, s, i_1, i_2, i_3)$ на $\mathbf{S}$ следующим образом: элементы $Q_0, Q_1 \in \mathbf{S} \sim (A, s, i_1, i_2, i_3)$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено условие (A). Затем положим

$$\sim_A^s = \bigcap \{ \sim (A, s, i_1, i_2, i_3) : (i_1, i_2, i_3) \in s^3 \}, \quad R_A = \{ \sim_A^s : s \in \mathcal{F} \}.$$

Очевидно, число классов эквивалентности для отношения $\sim (A, s, i_1, i_2, i_3)$ равно одному или двум, так что число классов эквивалентности для отношения $\sim_A^s$ конечно. Кроме того, если $s \subset t \in \mathcal{F}$, то $\sim_A^t \subset \sim_A^s$. Значит, семейство R_A отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ допустимо.

Аналогичным образом зафиксируем отношения эквивалентности $\sim (B, s, i_1, i_2)$ и $\sim_B^s$, где $i_1, i_2 \in s \in \mathcal{F}$, и положим

$$R_B = \{ \sim_B^s : s \in \mathcal{F} \}.$$

Как и выше, R_B является допустимым семейством отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$.

Затем зафиксируем $n \in \omega \subset \mathcal{F}$ и $i, j \in n + 2$ и определим отношение эквивалентности $\sim (a, n, i, j)$ (а также отношения $\sim (b, n, i, j)$ и $\sim (c, n, i)$) на $\mathbf{S}$ следующим образом: элементы $Q_0, Q_1 \in \mathbf{S} \sim (a, n, i, j)$ -эквивалентны (соответственно, $\sim (b, n, i, j)$ -эквивалентны, $\sim (c, n, i)$ -эквивалентны), если и только если выполнено условие (а) (соответственно, условие (b), условие (с)) в определении 1. Положим

$$\begin{aligned}\sim_a^n &= \bigcap \{ \sim (a, n, i, j) : (i, j) \in n^2 \}, \\ \sim_b^n &= \bigcap \{ \sim (b, n, i, j) : (i, j) \in n^2 \} \\ \sim_c^n &= \bigcap \{ \sim (c, i) : i \in n \}.\end{aligned}$$

Ясно, что число классов эквивалентности для каждого из отношений $\sim (a, n, i, j)$, $\sim (b, n, i, j)$ и $\sim (c, n, i)$ и, следовательно, отношений $\sim_a^n$, $\sim_b^n$ и $\sim_c^n$, конечно или счетно.

Теперь зафиксируем произвольный элемент s семейства $\mathcal{F}$ и число $n = \max\{k \in \omega : k \in s\}$. Положим $\sim_a^s = \sim_a^n$, $\sim_b^s = \sim_b^n$ и $\sim_c^s = \sim_c^n$. Легко видеть, что если $s \subset t \in \mathcal{F}$, то $\sim_a^t \subset \sim_a^s$, $\sim_b^t \subset \sim_b^s$ и $\sim_c^t \subset \sim_c^s$. Следовательно, семейства

$$R_a \equiv \{ \sim_a^s : s \in \mathcal{F} \}, \quad R_b \equiv \{ \sim_b^s : s \in \mathcal{F} \}, \quad R_c \equiv \{ \sim_c^s : s \in \mathcal{F} \}$$

отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ ω^+ -допустимы. Положим

$$R_C = \{ \sim_a^s \cap \sim_b^s \cap \sim_c^s : s \in \mathcal{F} \} \equiv \{ \sim_C^s : s \in \mathcal{F} \}.$$

Наконец, пусть

$$R_{in} \equiv \{ \sim_{in}^s : s \in \mathcal{F} \}$$

— инициальное семейство отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, соответствующее базе $\mathbf{B}$ и ω^+ -насыщенному классу $\mathbb{S}$; тогда R_{in} ($\mathbf{B}, \omega^+$)-допустимо. Семейство

$$R \equiv \{ \sim_{in}^s \cap \sim_A^s \cap \sim_B^s \cap \sim_C^s : s \in \mathcal{F} \}$$

является требуемым ω^+ -допустимым семейством отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$. $\square$

Теперь рассмотрим случай (1) теоремы из [21] для $\tau = \omega$. В этом случае класс $\mathbb{S}$, фигурирующий в теореме, совпадает с классом $\mathbf{S}$, фигурирующим в теореме 3.1 настоящей статьи. Заметим, что в доказательстве теоремы из [21] не используется конечность числа классов эквивалентности для рассматриваемых отношений эквивалентности; оно остается верным и в случае счетных классов. С другой стороны, определенные выше семейство $\mathbf{S}$, база $\mathbf{B}$ и семейство R отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ удовлетворяют всем условиям случая (1) теоремы из [21]. Это означает, что $T \equiv T(\mathbf{B}, R)$ является топологическим CCTG-пространством, принадлежащим классу $\mathbb{S}$, и что для каждого $Q \in \mathbf{S}$ вложение i_T^Q пространства Q в T правильно.

Остается доказать, что пространство $T(\mathbf{B}, R)$ метрическое и для каждого $Q \in \mathbf{S}$ вложение i_T^Q изометрично. Для этого заметим, что семейство $\mathbf{S}$, база $\mathbf{B}$ и семейство R отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ удовлетворяют всем условиям из [15, раздел 9.1], которые требуются для определения метрики ρ_T на множестве $T(\mathbf{B}, R)$ (см. [15, предложение 9.1.7]). Значит, согласно [15, предложение 9.1.8], топология, порожденная этой метрикой совпадает с топологией пространства $T(\mathbf{B}, R)$, и, согласно [15, предложение 9.1.9], для каждого $Q \in \mathbf{S}$ естественное вложение пространства Q в $T(\mathbf{B}, R)$ является изометрией, так что T — требуемое правильно и изометрически универсальное пространство в классе $\mathbb{S}$. $\square$

Доказательство теоремы 3.1А аналогично доказательству теоремы 3.1.

Доказательство теоремы 3.2. Единственное отличие формулировки теоремы 3.2 от формулировки теоремы в статье [21] (случай (1)) состоит в том, что в теореме из [21] класс $\mathbb{S}$ предполагается насыщенным, тогда как в теореме 3.2 он ω^+ -насыщен. Однако, как уже было отмечено выше, в доказательстве теоремы из [21] не используется конечность числа классов эквивалентности для рассматриваемых отношений эквивалентности: в случае, когда это число счетно, доказательство не меняется. Таким образом, доказательство теоремы 3.2 повторяет доказательство теоремы из [21]. $\square$

По тем же причинам, что и выше, доказательство теоремы 3.2А совпадает с доказательством случая (2) в теореме из статьи [21].

Доказательство теоремы 3.3А. По теоретико-множественным причинам существует семейство $\mathbf{F}$ элементов класса $\mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ такое, что каждый элемент $g \in \mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ правильно и изометрически го-меоморфен элементу семейства $\mathbf{F}$. Следовательно, элемент $F \in \mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$, который правильно и изометрически содержит все элементы семейства $\mathbf{F}$, является требуемым универсальным элементом семейства $\mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$.

Рассмотрим индексированные семейства пространств

$$\mathbf{S}_d \equiv \{Q_d^f : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{S}_r \equiv \{Q_r^f : f \in \mathbf{F}\}.$$

Пусть

$$\mathbf{B}_d^0 \equiv \{\{U_{d,n}^{f,0} : n \in \omega\} : f \in \mathbf{F}\}$$

— база для $\mathbf{S}_d$. Тогда

$$\mathbf{B}_r^0 \equiv \{\{U_{r,n}^{f,0} = f(U_{d,n}^{f,0}) : n \in \omega\} : f \in \mathbf{F}\}$$

является базой для $\mathbf{S}_r$. Пусть

$$\mathbf{B}_d \equiv \{\{U_{d,n}^f : n \in \omega\} : f \in \mathbf{S}_d\}, \quad \mathbf{B}_r \equiv \{\{U_{r,n}^f : n \in \omega\} : f \in \mathbf{S}_r\}$$

— инициальные базы для $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$, являющиеся расширениями баз $\mathbf{B}_d^0$ и $\mathbf{B}_r^0$ соответственно. Без потери общности можно считать, что для любых $n \in \omega$ и $f \in \mathbf{F}$

$$U_{d,2n+1}^f = U_{d,n}^{f,0}, \quad U_{r,2n+1}^f = U_{r,n}^{f,0} = f(U_{d,n}^{f,0}).$$

Следовательно,

$$\mathbf{B}_{d,\text{odd}} \equiv \{\{U_{d,2n+1}^f : n \in \omega\} : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{B}_{r,\text{odd}} \equiv \{\{U_{r,2n+1}^f : n \in \omega\} : f \in \mathbf{F}\}$$

являются базами для $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$ соответственно.

Для каждого $f \in \mathbf{F}$ возьмем произвольное счетное индексированное плотное подмножество пространства Q_d^f :

$$\{a_{d,n}^f \in Q_d^f : n \in \omega\}.$$

Тогда индексированное множество

$$\{a_{r,n}^f \equiv f(a_{d,n}^f) \in Q_r^f : n \in \omega\}$$

является индексированным плотным подмножеством пространства Q_r^f . Положим

$$\mathbf{P}_d = \{a_{d,n}^f : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{P}_r = \{a_{r,n}^f : f \in \mathbf{F}\}.$$

В теореме 3.1 заменим базу $\mathbf{B}$ семейства $\mathbf{S} \subset \mathbb{S}$ базой $\mathbf{B}_d$ семейства $\mathbf{S}_d \subset \mathbb{S}$, а множество $\mathbf{P}$ — множеством $\mathbf{P}_d$. Согласно этой теореме существует семейство $\mathbf{R}_d^0 \equiv \{\sim_{0,d}^s : s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_d$ (соответствующее семейству $\mathbf{R}$ из теоремы 3.1), удовлетворяющее условиям (А)–С (в применении к базам $\{U_{d,n}^f : n \in \omega\}$, $f \in \mathbf{F}$). Заменяя в теореме 3.1 базу $\mathbf{B}$ для $\mathbf{S} \subset \mathbb{S}$ на базу $\mathbf{B}_r$ для $\mathbf{S}_r \subset \mathbb{S}_r$ и множество $\mathbf{P}$ на множество $\mathbf{P}_r$, получаем семейство $\mathbf{R}_r^0 \equiv \{\sim_{0,r}^s : s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_r$ (соответствующее семейству $\mathbf{R}$ в теореме 3.1), удовлетворяющее условиям (А)–С (в применении к базам $\{U_{r,n}^f : n \in \omega\}$, $f \in \mathbf{F}$).

Пусть $\mathbf{R}_d \equiv \{\sim_d^s : s \in \mathcal{F}\}$ — семейство отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_d$, определенное следующим образом: элементы Q_d^f и Q_d^g семейства $\mathbf{S}_d \sim_d^s$ -эквивалентны для $s \in \mathcal{F}$, если и только если они $\sim_{0,d}^s$ -эквивалентны и элементы Q_r^f и Q_r^g семейства $\mathbf{S}_r \sim_{0,r}^s$ -эквивалентны. Аналогичным образом определим семейство $\mathbf{R}_r \equiv \{\sim_r^s : s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_r$: элементы Q_r^f и Q_r^g семейства $\mathbf{S}_r \sim_r^s$ -эквивалентны для $s \in \mathcal{F}$, если и только если они $\sim_{0,r}^s$ -эквивалентны и элементы Q_d^f и Q_d^g семейства $\mathbf{S}_d \sim_{0,d}^s$ -эквивалентны. Очевидно, семейство $\mathbf{R}_d$ является финальным измельчением семейства $\mathbf{R}_d^0$, а семейство $\mathbf{R}_r$ является финальным измельчением семейства $\mathbf{R}_r^0$; следовательно, семейства $\mathbf{R}_d$ и $\mathbf{R}_r$ также удовлетворяют соответствующим условиям (А)–(С). Заметим, что в силу определений семейств $\mathbf{R}_d$ и $\mathbf{R}_r$ два элемента Q_d^f и Q_d^g семейства $\mathbf{S}_d \sim_d^s$ -

эквивалентны для некоторого $s \in \mathcal{F}$, если и только если элементы Q_r^f и Q_r^g семейства $\mathbf{S}_r \sim_r^s$ -эквивалентны. Значит, между множеством $C(\sim_d^s)$ классов $\sim_d^s$ -эквивалентности и множеством $C(\sim_r^s)$ классов $\sim_r^s$ -эквивалентности имеется *естественное взаимно однозначное соответствие*, так что между множеством $C(R_d)$ всех классов эквивалентности для всех отношений эквивалентности из R_d и соответствующим множеством $C(R_r)$ тоже возникает *естественное взаимно однозначное соответствие*.

Таким образом, пространство $T_d \equiv T(\mathbf{B}_d, R_d)$ с метрикой ρ_{T_d} (соответствующей метрике ρ_T из теоремы 3.1) принадлежит классу $\mathbb{C}^m(\mathbb{S})$, и для каждого $f \in \mathbf{F}$ естественное вложение $i_{T_d}^{Q_d^f}$ является изометрическим и правильным; точно так же пространство $T_r \equiv T(\mathbf{B}_r, R_r)$ с метрикой ρ_{T_r} принадлежит классу $\mathbb{C}^m(\mathbb{S})$, и для каждого $f \in \mathbf{F}$ естественное вложение $i_{T_r}^{Q_r^f}$ является изометрическим и правильным.

Определим отображение $F_d: T_d \rightarrow T_r$ следующим образом. Пусть $\mathbf{a}_d$ — точка из T_d , $(a_d, Q_d^f) \in \mathbf{a}_d$. Определим $F(\mathbf{a}_d)$ как точку $\mathbf{a}_r$ из T_r , содержащую пару $(f(a_d), f(Q_d^f) = Q_r^f)$. Сперва проверим, что это определение корректно, т.е. точка $\mathbf{a}_r$ не зависит от выбора элемента (a_d, Q_d^f) множества $\mathbf{a}_d$. Пусть (b_d, Q_d^g) — другой элемент множества $\mathbf{a}_d$. Тогда $Q_d^f \sim_d^s Q_d^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$ и, следовательно, $Q_r^f \sim_r^s Q_r^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$. Предположим, что $(g(b_d), Q_r^g) \in \mathbf{b}_r \in T_r$ и $\mathbf{b}_r \neq \mathbf{a}_r$. Поскольку $\mathbf{B}_{d,\text{odd}}$ и $\mathbf{B}_{r,\text{odd}}$ — базы для $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$ соответственно, множества

$$B_{\text{odd}}^{T_d} \equiv \{U_{2n+1}^{T_d}(\mathbf{H}) : n \in \omega, \mathbf{H} \in C(R_d)\} \subset B^{T_d}, \quad B_{\text{odd}}^{T_r} \equiv \{U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L}) : n \in \omega, \mathbf{L} \in C(R_r)\} \subset B^{T_r}$$

являются базами открытых подмножеств пространств T_d и T_r соответственно (см. [15, лемма 1.2.6]). Следовательно, существует $U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L}) \in B_{\text{odd}}^{T_r}$ такое, что $\mathbf{a}_r \in U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L})$ и $\mathbf{b}_r \notin U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L})$. По определению элементов стандартной базы B^{T_r} открытых подмножеств T_r и в силу того, что $Q_r^f \sim_r^s Q_r^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$, имеем $f(a_d) \in U_{r,2n+1}^f$ и $g(b_d) \notin U_{r,2n+1}^g$; следовательно, $a_d \in U_{d,2n+1}^f$ и $b_d \notin U_{d,2n+1}^g$ в противоречие с тем фактом, что $(a_d, Q_d^f), (b_d, Q_d^g) \in \mathbf{a}_d$. Таким образом, пары $(f(a_d), f(Q_d^f))$ и $(g(b_r), g(Q_d^f))$ принадлежат одному и тому же элементу T_r , так что отображение F_d определено корректно.

Из изложенных выше соображений вытекает также, что для любых $n \in \omega$ и $\mathbf{H} \in C(R_d)$ имеем

$$F_d(U_{2n+1}^{T_d}(\mathbf{H})) \subset U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L}), \quad (1)$$

где $\mathbf{L}$ — элемент множества $C(R_r)$, соответствующий элементу $\mathbf{H}$.

Аналогичным образом определим отображение $F_r: T_r \rightarrow T_d$: для $\mathbf{a}_r \in T_r$ и $(a_r, Q_r^f) \in \mathbf{a}_r$ значение $F_r(\mathbf{a}_r)$ определяется как элемент множества T_d , содержащий пару $(f^{-1}(a_r), f^{-1}(Q_r^f))$. Те же рассуждения, что и выше, доказывают, что отображение F_r определено корректно и для любых $n \in \omega$ и $\mathbf{L} \in C(R_r)$ выполнено соотношение

$$F_r(U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L})) \subset U_{2n+1}^{T_d}(\mathbf{H}), \quad (2)$$

где $\mathbf{H}$ — элемент множества $C(R_d)$, соответствующий элементу $\mathbf{L}$. Очевидно, $F_r^{-1} = F_d$. Значит, отображения F_d и F_r взаимно однозначны и сюръективны. Из соотношений (1) и (2) вытекает, что

$$F_d(U_{2n+1}^{T_d}(\mathbf{H})) = U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L}),$$

а это означает, что F_d и F_r непрерывны и, следовательно, являются гомеоморфизмами.

Покажем, что F_d — правильное отображение. Пространства Q_d^f и Q_r^f являются ССТГ-пространствами относительно некоторых индексированных семейств

$$\mathbf{G}_d^f \equiv \mathbf{G}^{Q_d^f} \equiv \{X_{d,\lambda}^f : \lambda \in \Lambda_d^f\}, \quad \mathbf{G}_r^f \equiv \mathbf{G}^{Q_r^f} \equiv \{X_{r,\lambda}^f : \lambda \in \Lambda_r^f\}$$

топологических групп соответственно. Без потери общности будем считать, что $\Lambda_d^f \cap \Lambda_d^g = \emptyset$ и $\Lambda_r^f \cap \Lambda_r^g = \emptyset$, если f и g — различные элементы семейства $\mathbf{F}$. Кроме того, существует отображение

$\varphi_{\mathbf{G}_r^f}^{\mathbf{G}_d^f}$ из $\mathbf{G}_d^f$ в $\mathbf{G}_r^f$ такое, что сужение отображения f на элемент $X \in \mathbf{G}_d^f$ является гомоморфизмом группы X на $\varphi_{\mathbf{G}_r^f}^{\mathbf{G}_d^f}(X)$.

Из доказательства теоремы [21] следует, что пространства $\mathbf{T}_d$ и $\mathbf{T}_r$ являются ССТГ-пространствами относительно индексированных семейств

$$\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d} \equiv \bigcup \{ \{X_{d,\lambda}^f : \lambda \in \Lambda_d^f\} : f \in \mathbf{F} \}, \quad \mathbf{G}^{\mathbf{T}_r} \equiv \bigcup \{ \{X_{r,\lambda}^f : \lambda \in \Lambda_r^f\} : f \in \Lambda_r^f \}$$

топологических групп соответственно. Определим отображение $\varphi_{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}}$ из $\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}$ в $\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}$, полагая $\varphi_{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}}(X_{d,\lambda}^f) = \varphi_{\mathbf{G}_r^f}^{\mathbf{G}_d^f}(X_{d,\lambda}^f)$. Очевидно, отображение $\varphi_{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}}$ сюръективно. Ясно также, что сужение отображения F_d на $X_{d,\lambda}^f \in \mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}$ является гомоморфизмом группы $X_{d,\lambda}^f$ на $\varphi_{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}}(X_{d,\lambda}^f)$ и совпадает с отображением f . Таким образом, F_d — правильная сюръекция.

Покажем, что F_d — изометрия. Пусть $\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d$ — два элемента множества $\mathbf{T}_d$, $(x_d^f, Q_d^f) \in \mathbf{a}_d$, $(y_d^g, Q_d^g) \in \mathbf{b}_d$. Обозначим через $\mathbf{a}_r$ элемент множества $\mathbf{T}_r$, содержащий пару $(f(x_d^f) \equiv x_r^f, Q_r^f)$, а через $\mathbf{b}_r$ — элемент множества $\mathbf{T}_r$, содержащий пару $(g(y_d^g) \equiv y_r^g, Q_r^g)$. Пусть $\{a_{d,i_n}^f : n \in \omega\}$ — последовательность точек Q_d^f , сходящаяся к точке x_d^f , $\{a_{d,j_n}^g : n \in \omega\}$ — последовательность точек Q_d^g , сходящаяся к y_d^g . Поскольку f и g непрерывны, последовательность $\{f(a_{d,i_n}^f) \equiv a_{r,i_n}^f : n \in \omega\}$ сходится к $f(x_d^f)$, а последовательность $\{g(a_{d,j_n}^g) \equiv a_{r,j_n}^g : n \in \omega\}$ сходится к $g(y_d^g)$. Рассмотрим два случая:

- (а) Q_d^f и $Q_d^g \sim_d^s$ -эквивалентны для любого $s \in \mathcal{F}$;
- (б) существует элемент $s \in \mathcal{F}$, для которого Q_d^f и Q_d^g не $\sim_d^s$ -эквивалентны.

В случае (а) имеем

$$\rho_{\mathbf{T}_d}(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_{Q_d^f}(a_{d,i_n}^f, a_{d,j_n}^f))$$

(см. определение метрики $\rho_{\mathbf{T}(\mathbf{E})}$ в [21, гл. 9]). Аналогично,

$$\rho_{\mathbf{T}_r}(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_{Q_r^f}(a_{r,i_n}^f, a_{r,j_n}^f)).$$

Поскольку f — изометрия, имеем

$$\rho_{Q_d^f}(a_{d,i_n}^f, a_{d,j_n}^f) = \rho_{Q_r^f}(a_{r,i_n}^f, a_{r,j_n}^f);$$

значит, $\rho_{\mathbf{T}_d}(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = \rho_{\mathbf{T}_r}(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r)$.

Рассмотрим случай (б). В этом случае по определению метрики $\rho_{\mathbf{T}_d}$ (см. определение метрики $\rho_{\mathbf{T}}$ в [21, гл. 9]) имеем

$$\rho_{\mathbf{T}_d}(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = \min \{ \rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) + \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) : n \in n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2 \} + 1/(n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2).$$

Подобным образом доказывается, что

$$\rho_{\mathbf{T}_r}(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) = \min \{ \rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f) + \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g) : n \in n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2 \} + 1/(n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2).$$

Поскольку f и g — изометрии, имеем также

$$\rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) = \rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f), \quad \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) = \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g),$$

а значит,

$$\begin{aligned} \min \{ \rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) + \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) : n \in n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2 \} &\leq \\ &\leq \min \{ \rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f) + \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g) : n \in n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2 \}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \min \{ \rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f) + \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g) : n \in n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2 \} &\leq \\ &\leq \min \{ \rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) + \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) : n \in n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2 \}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \min\{\rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) + \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) : n \in n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2\} = \\ = \min\{\rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f) + \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g) : n \in n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2\}. \end{aligned}$$

Из определения семейств R_d и R_r вытекает, что $n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r)$, а это, согласно проведенным выше рассуждениям, означает, что $\rho_{T_d}(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = \rho_{T_r}(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r)$, а значит, отображение F_d — изометрия. В силу выбора семейства $\mathbf{F}$ отображение $F \equiv F_d$ является требуемым универсальным элементом в классе $\mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$. $\square$

Доказательство теоремы 3.3 аналогично доказательству теоремы 3.3А.

Доказательство теоремы 3.4А. Теорему 3.4А можно частично вывести из доказательства теоремы 3.3А. По теоретико-множественным соображениям существует семейство $\mathbf{F}$ элементов класса $\mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$ такое, что каждый элемент $g \in \mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$ правильно гомеоморфен элементу семейства $\mathbf{F}$. Следовательно, элемент $F \in \mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$, который правильно содержит все элементы семейства $\mathbf{F}$, является требуемым универсальным элементом класса $\mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$.

Как и в теореме 3.3, рассмотрим индексированные семейства пространств

$$\mathbf{S}_d \equiv \{Q_d^f : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{S}_r \equiv \{Q_r^f : f \in \mathbf{F}\}$$

и инициальные базы

$$\mathbf{B}_d^0 \equiv \{\{U_{d,\delta}^{f,0} : \delta \in \tau\} : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{B}_r \equiv \mathbf{B}_r^0 \equiv \{\{U_{r,\delta}^f : \delta \in \tau\} : f \in \mathbf{F}\}$$

для $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$ соответственно. Для каждого $f \in \mathbf{F}$ рассмотрим индексированное множество

$$B_d^{f,1} = \{f^{-1}(U_{r,\delta}^f) : \delta \in \tau\}$$

и положим

$$B_d^f \equiv \{U_{d,\delta}^f : \delta \in \tau\},$$

где для каждого предельного ординала $\alpha \in \tau_{\text{lim}}$ и каждого $n \in \omega$

$$U_{d,\alpha+2n}^f = U_{d,\alpha+n}^{f,0}, \quad U_{d,\alpha+2n+1}^f = f^{-1}(U_{r,\alpha+n}^f).$$

Очевидно, B_d^f — база открытых подмножеств пространства Q_d^f . Положим

$$\mathbf{B}_d = \{\{U_{d,\delta}^f : \delta \in \tau\} : f \in \mathbf{F}\}.$$

Тогда $\mathbf{B}_d$ — расширение базы $\mathbf{B}_d^0$ и, следовательно, $\mathbf{B}_d$ является также инициальной базой семейства $\mathbf{S}_d$.

Определим семейства R_d и R_r отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$ соответственно точно так же, как в теореме 3.3. Пространство $T_d \equiv T(\mathbf{B}_d, R_d)$ принадлежит классу $\mathbb{C}(\mathbf{S}_d)$, и для каждого $f \in \mathbf{F}$ естественное вложение $i_{T_d}^{Q_d^f}$ является правильным гомеоморфизмом; точно так же, пространство $T_r \equiv T(\mathbf{B}_r, R_r)$ принадлежит классу $\mathbb{C}(\mathbf{S}_r)$, и для каждого $f \in \mathbf{F}$ естественное вложение $i_{T_r}^{Q_r^f}$ является правильным гомеоморфизмом.

Определим отображение $F_d : T_d \rightarrow T_r$ так же, как в теореме 3.3. Докажем, что F_d определено корректно. Пусть (a_d, Q_d^f) и (b_d, Q_d^g) — два элемента множества $\mathbf{a}_d$. Тогда $Q_d^f \sim_d^s Q_d^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$ и, следовательно, $Q_r^f \sim_r^s Q_r^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$. Предположим, что $(f(a_d), Q_r^f) \in \mathbf{a}_r$, $(g(b_d), Q_r^g) \in \mathbf{b}_r \in T_r$ и $\mathbf{b}_r \neq \mathbf{a}_r$. Существует элемент $U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})$ стандартной базы B^{T_r} пространства T_r , где $\alpha \in \tau_{\text{lim}}$, $n \in \omega$ и $\mathbf{L} \in C(R)$, для которого $\mathbf{a}_r \in U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})$ и $\mathbf{b}_r \notin U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})$. По определению элементов стандартной базы пространства T_r и в силу того, что $Q_r^f \sim_r^s Q_r^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$, имеем $f(a_d) \in U_{r,\alpha+n}^f$ и $g(b_d) \notin U_{r,\alpha+n}^g$; следовательно, $a_d \in U_{d,\alpha+2n+1}^f$ и $b_d \notin U_{d,\alpha+2n+1}^g$ в противоречие с тем, что $(a_d, Q_d^f), (b_d, Q_d^g) \in \mathbf{a}_d$. Таким образом, пары $(f(a_d), f(Q_d^f))$ и $(g(b_r), g(Q_d^f))$ принадлежат одному и тому же элементу множества T_r , т.е. F_d определено корректно.

Для любых $\alpha \in \tau_{\text{lim}}$, $n \in \omega$ и $\mathbf{L} \in C(R_r)$ выполняется равенство

$$F_d^{-1}(U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})) = U_{\alpha+2n+1}^{T_d}(\mathbf{H}), \quad (3)$$

где $\mathbf{H}$ — элемент множества $C(R_d)$, соответствующий элементу $\mathbf{L}$. В самом деле, пусть $\mathbf{a}_d$ — элемент прообраза $F_d^{-1}(U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L}))$, т.е. $\mathbf{a}_r \equiv F_d(\mathbf{a}_d) \in U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})$, и пусть $(a_d, Q_d^f) \in \mathbf{a}_d$. Тогда по определению отображения F_d имеем $(f(a_d), Q_r^f) \in \mathbf{a}_r$, откуда $f(a_d) \in U_{r,\alpha+n}^f$, а это означает, что $a_d \in U_{d,\alpha+2n+1}^f$. Поскольку $Q_d^f \in \mathbf{H}$, имеем $\mathbf{a}_d \in U_{\alpha+2n+1}^{T_d}(\mathbf{H})$. Мы показали, что левая часть равенства (3) содержится в правой части. Обратно, пусть $\mathbf{a}_d \in U_{\alpha+2n+1}^{T_d}(\mathbf{H})$ и $(a_d, Q_d^f) \in \mathbf{a}_d$. Тогда $a_d \in U_{d,\alpha+2n+1}^f$ и $Q_d^f \in \mathbf{H}$. Пусть $b_r \in Q_d^f$ и $a_d \in f^{-1}(b_r)$. Поскольку $f^{-1}(b_r) \in U_{d,\alpha+2n+1}^f$ и $f^{-1}(U_{d,\alpha+n}^f) = U_{d,\alpha+2n+1}^f$, имеем $b_r \in U_{r,\alpha+n}^f$. Пусть $(b_r, Q_r^f) \in \mathbf{b}_r \in T_r$. Из того, что $Q_d^f \in \mathbf{L}$, следует, что $\mathbf{b}_r \in U_{\alpha+1}^{T_r}(\mathbf{L})$. Из определения отображения F_d вытекает равенство $F_d(\mathbf{b}_r) = \mathbf{a}_d$, которое доказывает, что правая часть формулы (3) содержится в левой.

Равенство (3) показывает, что отображение F_d непрерывно и сюръективно. То, что отображение F_d правильно, доказывается точно так же, как в теореме 3.3. Отношения

$$\varphi_{\mathbf{G}^{Q_r^f}} \circ \varphi_{\mathbf{G}^{Q_d^f}} = \varphi_{\mathbf{G}^{T_d}} \circ \varphi_{\mathbf{G}^{Q_d^f}}, \quad F_d \circ i_{T_d}^{Q_d^f} = i_{T_r}^{Q_r^f} \circ f$$

вытекают непосредственно из определений отображения F_d , естественных вложений $i_{T_d}^{Q_d^f}$ и $i_{T_r}^{Q_r^f}$ и построения содержащих пространств T_d и T_r . В силу выбора семейства $\mathbf{F}$ отображение $F \equiv F_d$ является требуемым универсальным элементом в классе $\mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.4 аналогично доказательству теоремы 3.4A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. В., Федорчук В. В. Основные понятия и конструкции в общей топологии // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1988. — 17. — С. 5–110.
2. Илиадис С. О вложениях топологических групп // Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 2. — С. 105–112..
3. Смирнов Ю. Об универсальных пространствах для некоторых классов бесконечномерных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — 23. — С. 185–196.
4. Успенский В. В. Об универсальной топологической группе счетного веса // Функц. анализ. прилож. — 1986. — 20. — С. 86–87.
5. Шкарин С. А. Об универсальных абелевых топологических групп // Мат. сб. — 1999. — 190, № 7. — С. 127–144.
6. Banach S. Theorie operations lineaires. — Warsaw, 1932.
7. Ben Yaacov I. The linear isometry group of the Gurarij space is universal // Proc. Math. Soc. — 2014. — 142, № 7. — P. 2459–2467.
8. Dube T., Iliadis S. van Mill J., Naidoo I. Universal frames // Topology Appl. — 2013. — 160, № 18. — P. 2454–2464.
9. Georgiou D. N., Iliadis S. D., Megaritis A. C. On base dimension-like functions of the type Ind // Topology Appl. — 2013, № 18. — P. 2482–2494.
10. Georgiou D., Iliadis S., Megaritis A., Sereti F. Universality property and dimension for frames // Order. — 2019. — 37, № 3. — P. 427–444.
11. Georgiou D. N., Iliadis S. D., Megaritis A. C., Sereti F. Small inductive dimension and universality on frames // Algebra Univ. — 2019. — 80, № 2. — P. 21–51.
12. Gevorgyan P. S., Iliadis S. D., Sadovnichy Yu V. Universality on frames // Topology Appl. — 2017. — 220. — P. 173–188.
13. Iliadis S. D. A construction of containing spaces // Topology Appl. — 2000. — 107. — P. 97–116.
14. Iliadis S. D. Mappings and universality // Topology Appl. — 2004. — 137, № 1-3. — P. 175–186.
15. Iliadis S. D. Universal Spaces and Mappings. — Elsevier, 2005.
16. Iliadis S. D. On isometrically universal spaces, mappings, and actions of groups // Topology Appl. — 2008. — 155, № 14. — P. 1502–1515.
17. Iliadis S. D. Universal elements in some classes of mappings and classes of G -spaces // Topology Appl. — 2008. — 156, № 1. — P. 76–82.
18. Iliadis S. D. On isometric embeddings of separable metric spaces // Topology Appl. — 2015. — 179. — P. 91–98.

19. *Iliadis S. D.* On spaces continuously containing topological groups// *Topology Appl.* — 2020. — 272. — 107072.
20. *Iliadis S. D.* On actions of spaces continuously containing topological groups// *Topology Appl.* — 2020. — 275. — 107035.
21. *Iliadis S. D., Sadovnichy Yu. V.* Universality on spaces continuously containing topological groups// *Filomat.* — 2021. — 35, № 12. — P. 4087—4094.
22. *Katetov M.* On universal metric spaces// (*Frolík Z.*, ed.) *Proc. 6th Topological Symp. "General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra"* (Prague, 1986). — Berlin: Heldermann Verlag, 1988. — P. 323–330.
23. *Nagata J.* On the countable sum of zero-dimensional metric spaces// *Fund. Math.* — 1959. — 48, № 1. — P. 1–14.
24. *Nobeling G.* Über eine n -dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$ // *Math. Ann.* — 1930. — 104. — P. 71–80.
25. *R. Pol* Countable dimensional universal sets// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1986. — 297. — P. 255–268.
26. *Urysohn P. S.* Sur un espace metrique universel// *Bull. Sci. Math.* — 1927. — 51. — P. 43–64.
27. *Urysohn P. S.* Der Hilbertsche Raum als Urbild der Metrishen Raume// *Math. Ann.* — 1924. — 92. — P. 302–304.
28. *Uspenski V. V.* On the group of isometries of the Urysohn universal metric space// *Comment. Math. Univ. Carol.* — 1990. — 31, № 1. — P. 181–182.
29. *Wenner B. R.* A universal separable metric locally finite-dimensional space// *Fund. Math.* — 1973. — 80. — P. 283–286.

Илиадис Ставрос Димитрис

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

E-mail: s.d.iliadis@gmail.com

Садовничай Юрий Викторович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

E-mail: sadovnichiy.yu@gmail.com