ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 66–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-66-68

УДК 515.126.8

РАЗЛОЖИМО n-НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© 2023 г. **С. М. КОМОВ**

Аннотация. Введено понятие разложимо n-непрерывного отображения, являющееся обобщением понятия непрерывного отображения. Доказано, что разложимо n-непрерывные отображения сохраняют такие топологические инварианты, как сепарабельность, линделёфовость, наличие счётной сети. Доказано также, что разложимо n-непрерывное отображение пространства со счётной базой на компактное хаусдорфово пространство в сторону образа сохраняет метризуемость.

***Ключевые слова*:** непрерывность, линделёфовость, сепарабельность, метризуемость.

DECOMPOSABLE n-CONTINUOUS MAPPINGS

© 2023 **S. M. KOMOV**

Abstract. In this paper, we introduce the concept of a decomposable n-continuous mapping, which is a generalization of the concept of a continuous mapping. We prove that decomposable n-continuous mappings preserve such topological invariants as the separability, the Lindelöf property, and the presence of a countable net. We also prove that a decomposable n-continuous mapping of a space with a countable base onto a compact Hausdorff space preserves the metrizability.

***Keywords and phrases*:** continuity, Lindelöf property, separability, metrizability.

***AMS Subject Classification*:** 54C08

Определение 1. Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y назовём *разложимо n-непрерывным*, где n — положительное целое число, если можно представить X в виде объединения n его подпространств таким образом, что сужение отображения f на каждое из этих подпространств непрерывно.

Пусть X и Y — топологические пространства, f — отображение пространства X на пространство Y. Сужение отображения f на подпространство A пространства X будем обозначать через $f|A$.

Заметим, что всякое непрерывное отображение является разложимо 1-непрерывным. Кроме того, так как в приведённом выше определении не требуется, чтобы подпространства пространства X были различны, каждое непрерывное отображение является разложимо n-непрерывным при любом целом положительном n.

Однако не каждое разложимо n-непрерывное отображение является непрерывным.

Примером не непрерывного, но разложимо n-непрерывного отображения является функция Дирихле.

Пример 1. Обозначим через $\mathbb{R}$ вещественную прямую с обычной топологией, через $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, а через $\mathcal{U}$ — дискретное топологическое пространство, построенное на множестве $\{0, 1\}$.

Рассмотрим отображение $D\colon \mathbb{R} \to \mathcal{U}$, определённое следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1}$$

Легко показать, что сужения $D|\mathbb{Q}$ и $D|(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ отображения D на, соответственно, подпространства $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ пространства $\mathbb{R}$ являются непрерывными отображениями. Однако само отображение D не является непрерывным отображением пространства $\mathbb{R}$ в пространство $\mathcal{U}$.

Таким образом, понятие разложимо n-непрерывного отображения является расширением понятия непрерывного отображения, но к нему не сводится.

Напомним определения базы и сети топологического пространства.

Определение 2. Семейство $\mathcal{B}$ открытых в топологическом пространстве X множеств называется базой топологического пространства X, если каждое непустое открытое подмножество пространства X можно представить в виде объединения некоторого подсемейства семейства $\mathcal{B}$.

Если из определения базы топологического пространства убрать требование открытости элементов семейства $\mathcal{B}$, то получим определение сети топологического пространства. Впервые понятие сети топологического пространства было сформулировано А. В. Архангельским в [1].

Приведём теперь несколько теорем о разложимо n-непрерывных отображениях пространств со счётными базами и сетями.

Теорема 1. *При каждом разложимо n-непрерывном отображении пространства со счётной сетью образ тоже имеет счётную сеть.*

Доказательство. Пусть X и Y — топологические пространства; X имеет счётную сеть; $A_1, \ldots, A_n$ — подпространства пространства X, такие, что пространство X представимо в виде объединения семейства $\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$; f — такое отображение пространства X на пространство Y, что сужения $f|A_1, \ldots, f|A_n$ являются непрерывными отображениями. Рассмотрим пространство A_i, где i — некоторое целое число в промежутке от единицы до n. Так как подпространство топологического пространства со счётной сетью тоже обладает счётной сетью, каждое A_i имеет счётную сеть. Тогда, так как образ пространства со счётной сетью имеет счётную сеть, каждое подпространство вида $f(A_i)$ пространства Y имеет счётную сеть. Тогда, так как пространство Y представимо в виде объединения семейства $\{f(A_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, и, так как любое пространство, представимое в виде объединения конечного числа пространств со счётной сетью, имеет счётную сеть, пространство Y имеет счётную сеть. □

Так как база топологического пространства является также и его сетью, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *При каждом разложимо n-непрерывном отображении пространства со счётной базой образ имеет счётную сеть.*

Напомним определения сепарабельных и линделёфовых топологических пространств.

Определение 3. Топологическое пространство X называется сепарабельным, если существует счётное всюду плотное в X подмножество пространства X.

Определение 4. Топлогическое пространство X называется линделёфовым, если из каждого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.

Пользуясь теоремой 2 и тем фактом, что каждое топологическое пространство со счётной сетью сепарабельно и наследственно сепарабельно, легко доказать следующее:

Теорема 3. *При разложимо n-непрерывном отображении пространства со счётной сетью образ будет сепарабельным и наследственно сепарабельным пространством.*

С помощью теоремы 2 и того факта, что пространство со счётной сетью линделёфово и наследственно линделёфово, легко доказать следующую теорему:

Теорема 4. *При разложимо n-непрерывном отображении пространства со счётной сетью образ будет линделёфовым и наследственно линделёфовым пространством.*

Докажем ещё одно утверждение:

Теорема 5. *Если f — разложимо n-непрерывное отображение пространства X со счётной базой на компактное хаусдорфово пространство Y, то Y — пространство со счётной базой.*

Доказательство. По теореме 1 пространство Y имеет счётную сеть. Так как Y — компактное хаусдорфово пространство согласно утверждению о том, что каждое компактное хаусдорфово пространство со счётной сетью имеет счётную базу (см. [1]), пространство Y имеет счётную базу. Что и требовалось доказать. □

В 1924 г. в [2] П. С. Урысон доказал следующую теорему.

Теорема 6. *Компактное хаусдорфово пространство метризуемо в том и только в том случае, если оно имеет счётную базу.*

С помощью последних двух теорем доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *Если f — разложимо n-непрерывное отображение пространства X со счётной базой на компактное хаусдорфово пространство Y, то Y — метризуемое пространство.*

Таким образом, при разложимо n-непрерывных отображениях сохраняются некоторые топологические инварианты. Кроме того, как видно, построение разложимо n-непрерывного отображения между топологическими пространствами может являться средством исследования топологических свойств образа при этом отображении. Поэтому данное понятие представляет интерес для дальнейшего изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архангельский А. В.* Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах// Докл. АН СССР. — 1959. — *126*, № 4. — С. 239–241.
2. *Urysohn P.* Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume// Math. Ann. — 1924. — *92*. — P. 275–293.

Комов Сергей Михайлович
Московский педагогический государственный университет
E-mail: `roddniki34@yandex.ru`