



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 79–83
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-79-83

УДК 517.954

КОРРЕКТНЫЕ КРАЕВЫЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2023 г. А. А. МАКАРОВ, И. Г. НИКОЛЕНКО

Аннотация. Исследованы системы дифференциальных уравнений в частных производных, для которых существуют корректные двухточечные задачи в пространстве Л. Шварца. В частности, к таким системам относятся системы с эрмитовой матрицей $P(s)$, системы, корректные по Петровскому, а также системы с одной пространственной переменной.

Ключевые слова: краевая задача, преобразование Фурье, пространство Шварца, разрешающая матрица.

WELL-POSED BOUNDARY TWO-POINT PROBLEMS FOR SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 А. А. MAKAROV, I. G. NIKOLENKO

ABSTRACT. In this paper, we examine systems of partial differential equations that admit well-posed two-point problems in the Schwartz space, in particular, systems with Hermitian matrices, well-posed systems in the Petrovsky sense, and also systems with a one space variable.

Keywords and phrases: boundary-value problem, Fourier transform, Schwartz space, resolution matrix.

AMS Subject Classification: 35A01

Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных рассматривались неоднократно. Были получены критерии разрешимости данной задачи в различных классах функций [1, 4–6]. Целью данной работы является получение эффективных достаточных условий корректности данной задачи в пространствах функций степенного роста.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$Au(x, 0) + Bu(x, T) = \varphi(x), \quad (2)$$

где $P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ — квадратная матрица, элементами которой являются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; A и B — постоянные квадратные матрицы.

Задача (1)–(2) называется корректно разрешимой из пространства Φ_1 в пространство Φ_2 , если для любых $\varphi(x) \in \Phi_1$ существует единственное решение $u(x, t) \in \Phi_2$, где $t \in [0; T]$; и это решение непрерывно зависит от $\varphi(x)$ в топологии соответствующих пространств.

В качестве пространств Φ_1 и Φ_2 будем рассматривать пространство Л. Шварца

$$S = \bigcap_{s,l} C_l^s,$$

состоящее из бесконечно дифференцируемых функций, убывающих быстрее любой степени. Если подействовать на функцию $u(x, t)$ преобразованием Фурье по пространственным переменным, то краевая задача перейдет в следующую задачу:

$$\frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} = P(s) \tilde{u}(s, t), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$A \tilde{u}(s, 0) + B \tilde{u}(s, T) = \tilde{\varphi}(s), \quad (4)$$

где $\tilde{u}(s, t)$ и $\tilde{\varphi}(s)$ также принадлежат пространству S . Важную роль в корректности краевой задачи (3)–(4) играют определитель краевой задачи

$$\Delta(s) = \det(A + B \exp TP(s))$$

и разрешающая матрица

$$Q(s, t) = \exp tP(s)(A + B \exp TP(s))^{-1}.$$

Необходимым условием корректности краевой задачи (1)–(2) в пространстве S является условие $\Delta(s) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{R}^n$.

Критерий корректности краевой задачи (1)–(2) в пространстве S — это выполнение степенной оценки [4], т.е. существование таких неотрицательных p и C , для которых при всех $s \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$\|Q(s, t)\| \leq C(1 + |s|)^p.$$

Наша задача — для различных классов матриц $P(s)$ подобрать такие матрицы A и B , чтобы краевая задача была корректной в пространстве S . Рассмотрим случай, когда матрица $P(s)$ является эрмитовой матрицей, т.е. $P_{ij}(s) = \overline{P_{ji}(s)}$ — комплексно сопряженные.

Теорема 1. Если матрица $P(s)$ эрмитова, то краевая задача с условием

$$u(x, 0) + u(x, T) = \varphi(x)$$

корректна в пространстве S .

Доказательство. Так как собственные значения эрмитовой матрицы действительные, то определитель краевой задачи отличен от нуля:

$$\Delta(s) = \prod_j (1 + \exp T\lambda_j(s)) \neq 0.$$

Покажем, что разрешающая матрица $Q(s, t) = \exp tP(s)(E + \exp TP(s))^{-1}$ удовлетворяет степенной оценке.

Рассмотрим функцию $f(\lambda) = e^{t\lambda}(1 + e^{T\lambda})^{-1}$. Она определена и ограничена на действительной оси. Поэтому разрешающая матрица $Q(s, t) = f(P(s))$ также определена и удовлетворяет оценке $\|Q(s, t)\| \leq C(1 + |s|)^p$ (см. [3]). Значит, краевая задача корректна в пространстве S . $\square$

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & is \\ -is & -s^2 \end{pmatrix}.$$

Это эрмитова матрица, собственные значения которой равны $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{s^4 + s^2}$. Значит, краевая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}, & u_1(x, 0) + u_1(x, T) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, & u_2(x, 0) + u_2(x, T) = \varphi_2(x), \end{cases}$$

корректна в пространстве S .

Рассмотрим произвольную полиномиальную матрицу $P(s)$.

Теорема 2. Если существует такое действительное число α , что на множествах

$$N_j = \left\{ s \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha \right\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

выполняются неравенства

$$\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq \frac{(2k+1)\pi}{T}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то при $b = e^{-\alpha T}$ краевая задача для системы (1) с условием $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ корректна в пространстве S .

Доказательство. Определитель краевой задачи

$$\Delta(s) = \prod_j \left(1 + e^{T(\lambda_j - \alpha)} \right),$$

обращается в нуль при $\lambda_j(s) = \alpha + (2k+1)\pi i/T$ с некоторым j . Это равносильно условиям

$$\operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha, \quad \operatorname{Im} \lambda_j(s) = \frac{(2k+1)\pi}{T}.$$

Но это не может быть выполнено в силу условий теоремы.

Докажем теперь, что разрешающая матрица $Q(s, t) = \exp tP(s)(E + b \exp TP(s))^{-1}$ удовлетворяет степенной оценке. Рассмотрим функцию $f(\lambda) = e^{t\lambda}(1 + be^{T\lambda})^{-1}$. Она определена на спектре матрицы $P(s)$, так как $\Delta(s) \neq 0$. Если $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$, то

$$|f(\lambda)| = |e^{t\lambda}(1 + e^{-T(\lambda - \alpha)})^{-1}| < C_1,$$

так как величина $|e^{t\lambda}| = e^{t \operatorname{Re} \lambda}$ ограничена. Если $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha$, то

$$|f(\lambda)| = e^{(t-T)(\operatorname{Re} \lambda - \alpha)} |(1 + e^{-T(\lambda - \alpha)})^{-1}| < C_2,$$

поскольку $|e^{(t-T)(\operatorname{Re} \lambda - \alpha)}| < 1$. Поэтому значения функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы $P(s)$ ограничены, а значит,

$$\|Q(s, t)\| \leq C(1 + |s|)^p.$$

Следовательно, краевая задача корректна в пространстве S . $\square$

Замечание 1. Из степенной оценки разрешающей матрицы $Q(s, t)$ следует также корректная разрешимость данной краевой задачи из пространства $\mathbb{C}_{l_1}^{s_1}$ в пространство $\mathbb{C}_{l_2}^{s_2}$ с некоторыми $s_j, l_j, j = 1, 2$ [2].

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} = u_1(x_1, x_2, t) + \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}, \\ \frac{\partial u_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} = u_1(x_1, x_2, t) + u_2(x_1, x_2, t). \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет вид

$$P(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} 1 & -s_1^2 + s_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение

$$(\lambda - 1)^2 + s_1^2 - s_2^2 = 0,$$

а собственные значения

$$\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2}.$$

Значит, корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2} & \text{при } |s_2| \geq |s_1|, \\ 1 \pm i\sqrt{s_1^2 - s_2^2} & \text{при } |s_2| < |s_1|. \end{cases}$$

Тогда при любом значении $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$ выполнены условия теоремы 2. А значит, соответствующая краевая задача корректна в пространстве S .

Следствие 1. Если система (1) корректна по Петровскому, то краевая задача с условием $u(x, 0) + e^{-\alpha T}u(x, T) = \varphi(x)$ при $\alpha > C$ будет корректна в пространстве S .

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = u_2(x, t), \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = 2\frac{\partial u_2^2(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1^2(x, t)}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Собственные значения матрицы

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -s^2 & -2s^2 \end{pmatrix}$$

равны

$$\lambda_{1,2}(s) = -s^2 \pm \sqrt{s^4 - s^2}, \quad \operatorname{Re} \lambda_j(s) \leq 0.$$

Поэтому краевая задача с условием $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ при $b < 1$ будет корректна в пространстве S .

Рассмотрим систему с одной пространственной переменной, т.е. $x \in \mathbb{R}$. Тогда из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Для системы (1) в случае $x \in \mathbb{R}$ всегда существует корректная краевая задача в пространстве S .

Доказательство. Если собственные значения матрицы $P(s)$ действительные, то $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = 0$, а значит, выполнены условия теоремы 2: $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq (2k+1)\pi/T$. Следовательно, краевая задача с условием $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ с любым $b > 0$ будет корректна в пространстве S .

Если $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq 0$, то уравнение $\lambda_j(s) - \alpha = (2k+1)\pi i/T$ равносильно системе

$$\operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha, \quad \operatorname{Im} \lambda_j(s) = \frac{(2k+1)\pi}{T}.$$

Второе уравнение при фиксированном значении k имеет конечное число корней, а при $k \in \mathbb{Z}$ таких корней счетное множество s_k . Тогда множество значений $\operatorname{Re} \lambda_j(s_k)$ тоже счетное, а значит, найдется такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\operatorname{Re} \lambda_j(s_k) \neq \alpha$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2 и существует корректная краевая задача с условием $u(x, 0) + e^{-\alpha T}u(x, T) = \varphi(x)$. $\square$

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = u_2(x, t), \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - b^2 u_1(x, t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тогда собственные значения равны $\lambda_{1,2}(s) = \pm \sqrt{s^2 - b^2}$, поэтому при $|s| \geq b$ корни действительные, а при $|s| < b$ корни мнимые, $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = \pm \sqrt{b^2 - s^2}$.

Если взять $b < \pi/T$, то условие $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = (2k+1)\pi/T$ не будет выполняться. Значит, краевая задача с условием $u(x, 0) + u(x, T) = \varphi(x)$ будет корректна в пространстве S .

Полученные результаты можно перенести на линейные дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial^j}{\partial t^j} P_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0.$$

Тогда условия существования корректных краевых задач будут аналогичными условиям теоремы 2, где $\lambda_j(s)$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda^m + \sum_{j=0}^{m-1} P_j(s)\lambda^j = 0.$$

Теорему 1 можно применить, например, к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

если заменить это уравнение на эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ее матрица

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & is \\ -is & 0 \end{pmatrix}$$

является эрмитовой матрицей и, значит, краевая задача с условиями

$$\begin{cases} u(x, 0) + u(x, T) = \varphi_1(x), \\ u'_t(x, 0) + u'_t(x, T) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

является корректной в пространстве S .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борок В. М. Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1971. — 35, № 1. — С. 185–201.
2. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М.: Физматлит, 1994.
3. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1958.
4. Макаров А. А. Критерий корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы линейных уравнений в свертках в топологических пространствах // в кн.: Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры / Сб. науч. тр. — Киев: Наукова думка, 1978. — С. 178–180.
5. Макаров А. А. О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Диффер. уравн. — 1981. — 17, № 2. — С. 320–324.
6. Фардигола Л. В. Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии // Укр. мат. ж. — 1992. — 44, № 8. — С. 1083–1090.

Макаров Александр Анатольевич

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: makarovfamily07@gmail.com

Николенко Ирина Геннадиевна

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: nig@ukr.net