



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 84–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-84-106

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. IV

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Настоящая статья является четвертой частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 71–85. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 221. — С. 71–92. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 222. — С. 42–63.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоритмы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. IV

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

ABSTRACT. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. This paper is the fourth part of the work. The first part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 71–85. The second part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 221. — P. 71–92. The third part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 222. — P. 42–63.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3. Стабилизация стационарных движений спутника в геомагнитном поле	85
3.3. Стабилизация положения относительного равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов	85
3.4. Стабилизация регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов . . .	94
Список литературы	103

ГЛАВА 3

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА
В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ3.3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА
ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНЫХ И ЛОРЕНЦЕВЫХ МОМЕНТОВ

Рассмотрим стабилизацию относительного равновесия спутника при совместном использовании магнитных катушек и экрана, обладающего электрическим зарядом.

Управляющий момент $\mathbf{M} = \mathbf{M}_m^c + \mathbf{M}_m^q$ создается как за счет взаимодействия собственного дипольного магнитного момента спутника с магнитным полем Земли ($\mathbf{M}_m^c$) (1.1.6), так и силами Лоренца, действующими на заряженную поверхность спутника ($\mathbf{M}_m^q$) (1.1.7). Линеаризованные выражения моментов $\mathbf{M}_m^c$, $\mathbf{M}_m^q$ имеют вид (1.1.14), (1.1.15).

3.3.1. Линеаризованные уравнения. Линеаризованные уравнения управляемого движения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 &= \mu_0 [2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3 - b_1 v_2 + b_2 v_3 s\tau], \\ \ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_3 &= -\mu_0 [\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 c\tau - \tilde{b}_2 v_1 s\tau], \\ \ddot{x}_2 - \kappa_2 x_2 &= \mu_0 [-2\beta_2 u_1 s\tau + \beta_2 u_3 c\tau + \tilde{b}_1 v_1].\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned}x_1 = \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \quad d_1 = \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\ \kappa_1 = 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2 = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad \kappa_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}; \\ \beta_j = \frac{sI}{J_j} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \beta_4 = \frac{cI}{J_1}, \quad \beta_5 = \frac{cI}{J_3}; \\ b_1 = \frac{qR\omega_0 cI}{J_1}, \quad b_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_1}; \quad \tilde{b}_1 = \frac{qR\omega_0 cI}{J_2}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_3}.\end{aligned}$$

Представим систему (3.3.1) в виде двух подсистем

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)} \xi^{(1)} + B_u^{(1)} u + B_v^{(1)} v, \quad (3.3.2)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)} \xi^{(2)} + B_u^{(2)} u + B_v^{(2)} v. \quad (3.3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} = [x_1 \quad x_3 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_3]^\top, \quad \xi^{(2)} = [x_2 \quad \dot{x}_2]^\top \\ A_{(4 \times 4)}^{(1)} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_3), \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$B_u^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_1 s\tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3 c\tau & 0 \end{bmatrix}, \quad B_v^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & b_2 s\tau \\ \tilde{b}_2 s\tau & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_u^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\beta_2 s\tau & 0 & \beta_2 c\tau \end{bmatrix}, \quad B_v^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется построить управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость положения относительного равновесия.

Для построения стабилизирующего управления применим тот же метод, который использовался в разделе 3.1.

3.3.2. Приведение к стационарной системе. Введем новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 9$) по формулам $x_1 = y_1 c\tau + y_3 s\tau + y_5$, $x_3 = y_2 c\tau + y_4 s\tau + y_6$, $x_2 = y_7 c\tau + y_8 s\tau + y_9$.

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.3.1) и приравнявая коэффициенты при функциях $\cos \tau$, $\sin \tau$, 1 получим

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \bar{\kappa}_1 y_1 - d_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - d_1 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \bar{\kappa}_3 y_2 + d_3 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + d_3 y_3 &= -\mu_0 \beta_3 u_2, \\ \ddot{y}_3 - \bar{\kappa}_1 y_3 - d_1 \dot{y}_4 - 2\dot{y}_1 + d_1 y_2 &= 2\mu_0 \beta_1 u_2 + \mu_0 b_2 v_3, \\ \ddot{y}_4 - \bar{\kappa}_3 y_4 + d_3 \dot{y}_3 - 2\dot{y}_2 - d_3 y_1 &= -\mu_0 \tilde{b}_2 v_1, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$$\ddot{y}_9 - \kappa_2 y_9 = \mu_0 \tilde{b}_1 v_1, \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_5 - \kappa_1 y_5 - d_1 \dot{y}_6 &= \mu_0 \beta_4 u_3 - \mu_0 b_1 v_2, \\ \ddot{y}_6 - \kappa_3 y_6 + d_3 \dot{y}_5 &= -\mu_0 \beta_5 u_1, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_7 - \bar{\kappa}_2 y_7 + 2\dot{y}_8 &= \mu_0 \beta_2 u_3, \\ \ddot{y}_8 - \bar{\kappa}_2 y_8 - 2\dot{y}_7 &= -2\mu_0 \beta_2 u_1, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\bar{\kappa}_i = \kappa_i + 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Стационарная система (3.3.4)–(3.3.7) состоит из двух независимых систем (3.3.4), (3.3.5) и (3.3.6), (3.3.7), в которые входят управления u_2 , v_1 , v_3 и u_1 , u_3 , v_2 соответственно.

Для построения алгоритмов управления преобразуем теперь системы (3.3.2), (3.3.3) к стационарной системе. Введем векторы

$$\begin{aligned} z_{(8 \times 1)}^{(1)} &= [z_1, z_2, z_3, z_4, z_7, \dots, z_{10}]^\top; & z_{(4 \times 1)}^{(2)} &= [z_{13}, \dots, z_{16}]^\top; \\ z_{(4 \times 1)}^{(3)} &= [z_5, z_6, z_{11}, z_{12}]^\top; & z_{(2 \times 1)}^{(4)} &= [z_{17}, z_{18}]^\top. \end{aligned}$$

Переменные $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, удовлетворяющие системе (3.3.2), (3.3.3), связаны с переменными z_j ($j = 1, \dots, 18$) соотношениями

$$\xi_{(4 \times 1)}^{(1)} = F_1^\top z^{(1)} + z^{(3)}, \quad \xi_{(2 \times 1)}^{(2)} = F_2^\top z^{(2)} + z^{(4)}. \quad (3.3.8)$$

Здесь

$$F_1^\top = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & c\tau E_2 & s\tau E_2 \end{bmatrix}, \quad F_2^\top = [c\tau E_2 \quad s\tau E_2].$$

В переменных z_j ($j = 1, \dots, 18$) система стационарна и имеет вид

$$\dot{z}^{(1)} = G^{(1)} z^{(1)} + B^{(1)} V_1, \quad (3.3.9)$$

$$\dot{z}^{(4)} = G^{(4)} z^{(4)} + B^{(4)} V_1, \quad (3.3.10)$$

$$\dot{z}^{(2)} = G^{(2)} z^{(2)} + B^{(2)} U_1, \quad (3.3.11)$$

$$\dot{z}^{(3)} = G^{(3)} z^{(3)} + B^{(3)} U_1. \quad (3.3.12)$$

Здесь $V_1 = [u_2, v_1, v_3]^\top$, $U_1 = [u_1, u_3, v_2]^\top$,

$$G^{(1)} = \begin{bmatrix} G_{11} & E_4 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{bmatrix} O_{43} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad B_2^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & 0 \\ 2\beta_1 & 0 & b_2 \\ 0 & \tilde{b}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_{11} = \begin{bmatrix} O_2 & -E_2 \\ E_2 & O_2 \end{bmatrix},$$

$$G_{21} = \begin{bmatrix} A_{21} & O_2 \\ O_2 & A_{21} \end{bmatrix}, \quad G_{22} = \begin{bmatrix} A_{22} & -E_2 \\ E_2 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad G^{(2)} = \begin{bmatrix} A^{(2)} & -E_2 \\ E_2 & A^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{(3)} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 & -b_1 \\ -\beta_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G^{(4)} = A^{(2)}; \quad B^{(4)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта стационарная система состоит из двух независимых групп (3.3.19), (3.3.10) с управлением V_1 и (3.3.11), (3.3.12) с управлением U_1 .

Замечание 3.1. Если системы (3.3.4)–(3.3.7) представить в виде системы первого порядка, то нетрудно показать, что полученная система будет связана с системой (3.3.9)–(3.3.12) невырожденным преобразованием с постоянной матрицей.

3.3.3. Управляемость. Управляемость в рассматриваемой задаче можно исследовать как исходя из нестационарной системы, так и анализируя приведенные стационарные системы.

Применяя критерий Красовского (см. [13]), нетрудно показать, что, если орбита не является ни полярной ($I = \pi/2$), ни экваториальной ($I = 0$), то нестационарная система (3.3.2), (3.3.3) управляема при наличии всех шести управляющих воздействий u_j, v_j ($j = 1, 2, 3$).

1. Если орбита экваториальная ($I = 0$), то система (3.3.1) становится стационарной ($\beta_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) $b_2 = \tilde{b}_2 = 0$).

В этом случае управления u_2, v_3 в систему не входят; на переменную x_2 действует управление v_1 , а для переменных x_1, x_3 — управления u_1, u_3, v_2 .

Необходимым условием управляемости является наличие управления v_1 , т. е. если лоренцевых сил нет, то система неуправляема (см. п. 3.1).

При отсутствии магнитных моментов ($u_j = 0$) система управляема только при наличии лоренцевых сил, если выполнены условия $J_2 \neq J_1 + J_3$ и $J_1 \neq J_2$. (см. п. 3.2).

2. Если орбита полярная ($I = \pi/2$), то система (3.3.1) расщепляется на две независимые группы: уравнения для переменных x_1, x_3 с управлениями u_2, v_1, v_3 ; уравнения для x_2 с управлениями u_1, u_3 . Управление v_2 в систему не входит.

Представим уравнение для переменной x_2 системы (3.3.1) в виде

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = \kappa_2 \eta_1 - 2\beta_2 u_1 s \tau + \beta_2 u_3 c \tau.$$

Применяя критерий (см. [13]), нетрудно получить, что эта система управляема при наличии хотя бы одного управления u_1 или u_3 . При отсутствии магнитного управления ($u_1 = u_3 = 0$) система неуправляема.

Аналогично, для переменных x_1, x_3 можно показать, что система управляема при наличии управлений u_2, v_1, v_3 . В [20] показано, что при отсутствии лоренцевых моментов ($v_1 = v_3 = 0$), система также управляема, если $u_2 \neq 0$.

Итак, на экваториальной орбите система неуправляема при отсутствии моментов лоренцевых сил. На полярной орбите система неуправляема при отсутствии магнитных моментов.

Управляемость стационарной системы удобнее исследовать на основе системы (3.3.9)–(3.3.12), состоящей из двух подсистем (3.3.9), (3.3.10) и (3.3.11), (3.3.12), на которые действуют независимые управления $V_1 = (u_2, v_1, v_3)$ и $U_1 = (u_1, u_3, v_2)$.

Согласно критерию [50] система (3.3.4), (3.3.5) управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -d_1\lambda & 2\lambda & -d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & d_3 & 2\lambda & 0 & -\mu_0\beta_3 & 0 & 0 \\ -2\lambda & d_1 & \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -d_1\lambda & 0 & 2\mu_0\beta_1 & 0 & \mu_0b_2 \\ -d_3 & -2\lambda & d_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & 0 & 0 & -\mu_0\tilde{b}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \kappa_2 & 0 & \mu_0\tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix} = 5$$

для любых значений корней λ характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -d_1\lambda & 2\lambda & -d_1 & 0 \\ d_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & d_3 & 2\lambda & 0 \\ -2\lambda & d_1 & \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -d_1\lambda & 0 \\ -d_3 & -2\lambda & d_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \kappa_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Можно показать, что критерием неуправляемости в этом случае является выполнение условий

1. $J_1 = J_2 = J_3$; либо
2. $J_1 = J_3, J_2 = 2J_3$.

Неуправляемость в этих случаях можно проиллюстрировать наличием первых интегралов систем (3.3.4), (3.3.5) или (3.3.9), (3.3.10): для систем (3.3.4), (3.3.5):

$$\tilde{b}_1(\dot{y}_1 + \dot{y}_4 - y_2 + y_3) + \tilde{b}_2 y_9 = \text{const}, \quad \tilde{b}_1(\dot{y}_4 - 2y_2) + \tilde{b}_2 \dot{y}_9 = \text{const};$$

для систем (3.3.9), (3.3.10):

$$\tilde{b}_1(z_7 + z_{10}) + \tilde{b}_2 z_{18} = \text{const}, \quad \tilde{b}_1(z_{10} - z_2) + \tilde{b}_2 z_{18} = \text{const}.$$

Система (3.3.6), (3.3.7) управляема тогда и только тогда, когда для любых значений λ выполняется

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda^2 - \kappa_1 & -d_1\lambda & 0 & 0 & 0 & \mu_0\beta_4 & -\mu_0b_1 \\ d_3\lambda & \lambda^2 - \kappa_3 & 0 & 0 & -\mu_0\beta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 & 2\lambda & 0 & \mu_0\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 & -2\mu_0\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4,$$

где λ — корни соответствующего характеристического уравнения системы (3.3.6), (3.3.7).

Нетрудно показать, что критерием неуправляемости в этом случае будут условия

$$J_2 = J_1, \quad J_3 = \frac{2}{3}J_1.$$

Это также подтверждается наличием не зависящего от управления первого интеграла у систем (3.3.6), (3.3.7) или (3.3.11), (3.3.12)

$$2\beta_2(\dot{y}_6 - y_5) - \beta_5(\dot{y}_8 - 2y_7) = \text{const}, \quad 2\beta_2(z_{12} - z_5) - \beta_5(z_{16} - z_{13}) = \text{const}.$$

3.3.4. Алгоритм стабилизации. Задача стабилизации состоит в том, чтобы построить управление, обеспечивающее стремление к нулю компонент вектора состояния системы при $\tau \rightarrow \infty$. Алгоритм стабилизации строится на основе стационарной системы (3.3.9)–(3.3.12).

Как было отмечено, система (3.3.9)–(3.3.12) состоит из двух независимых подсистем: системы (3.3.9), (3.3.10) (десятого порядка) с управлением V_1 и системы (3.3.11), (3.3.12) (восьмого порядка) с управлением U_1 .

Далее будем полагать

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad U = [u_1 \quad u_3]^\top, \quad V = [v_1 \quad v_3]^\top.$$

Стабилизирующее управление строится для каждой подсистемы независимо в виде обратной связи по состоянию, а матрица коэффициентов управления выбирается из условия минимума квадратичных функционалов

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty [Z_1^\top(\tau)Q_1Z_1(\tau) + V^\top(\tau)\Gamma_1V(\tau)]d\tau,$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty [Z_2^\top(\tau) Q_2 Z_2(\tau) + U^\top(\tau) \Gamma_2 U(\tau)] d\tau.$$

Здесь

$$Z_{(10 \times 1)}^{(1)} = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(4)} \end{bmatrix}, \quad Z_{(8 \times 1)}^{(2)} = \begin{bmatrix} z^{(2)} \\ z^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} Q_1 & Q_2 \\ (10 \times 10) & (8 \times 8) \end{matrix}$$

— неотрицательно определенные, Γ_1, Γ_2 — положительно определенные постоянные матрицы.

Оптимальное управление имеет вид

$$\begin{aligned} V(\tau) &= -K_z^{(1)} Z^{(1)}(\tau), & U(\tau) &= -K_z^{(2)} Z^{(2)}(\tau), \\ K_z^{(1)} &= \Gamma_1^{-1} \tilde{B}_1^\top P^{(1)}, & K_z^{(2)} &= \Gamma_2^{-1} \tilde{B}_2^\top P^{(2)}, \end{aligned} \quad \begin{matrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ (10 \times 2) & (8 \times 2) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^{(1)} \\ \tilde{B}^{(4)} \\ \tilde{B}^{(2)} \\ \tilde{B}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \tilde{B}^{(1)} & \tilde{B}^{(2)} \\ (8 \times 2) & (4 \times 2) \end{matrix}. \quad (3.3.13)$$

Матрицами $\tilde{B}^{(i)}$ обозначены матрицы $B^{(i)}$ с исключенными вторыми столбцами. Матрицы $P_{(10 \times 10)}^{(1)}$, $P_{(8 \times 8)}^{(2)}$ являются положительно определенными решениями соответствующих матричных алгебраических уравнений Риккати

$$\begin{aligned} P^{(j)} \tilde{G}_j + \tilde{G}_j^\top P^{(j)} - P^{(j)} \tilde{B}_j \Gamma_j^{-1} \tilde{B}_j^\top P^{(j)} + Q_j &= 0 \quad (j = 1, 2); \\ \tilde{G}_1 &= \text{diag}(G^{(1)}, G^{(4)}), \quad \tilde{G}_2 = \text{diag}(G^{(2)}, G^{(3)}). \end{aligned}$$

Синтезированные управляющие воздействия $V(\tau)$ и $U(\tau)$ являются функциями переменных $Z^{(1)}(\tau)$ и $Z^{(2)}(\tau)$ стационарной системы (3.3.9)–(3.3.12) более высокого порядка, чем исходная нестационарная система (3.3.2), (3.3.3). Для введения этих управлений непосредственно в исходную систему следует выразить векторы $Z^{(1)}(\tau)$ и $Z^{(2)}(\tau)$ через векторы состояния $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$, до-

полненные вспомогательными векторами $\xi_d^{(1)}$ и $\xi_d^{(2)}$, которые введем, учитывая формулы (3.3.8):

$$\begin{aligned} \xi_d^{(1)} &= \begin{bmatrix} \zeta^{(1)} \\ \zeta^{(4)} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}, \quad \xi_d^{(2)} = \begin{bmatrix} \zeta^{(2)} \\ \zeta^{(3)} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}, \quad \begin{matrix} \zeta^{(1)} = F_3^\top z^{(1)}, & \zeta^{(2)} = z^{(3)}, \\ (4 \times 1) & (4 \times 1) \end{matrix} \\ \zeta^{(3)} &= F_4^\top z^{(2)}, & \zeta^{(4)} &= z^{(4)}; \\ (2 \times 1) & (2 \times 1) \end{matrix} \quad (3.3.14) \\ F_3^\top &= \begin{bmatrix} -E_2 s\tau & E_2 c\tau & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & -E_2 s\tau & E_2 c\tau \end{bmatrix}_{(4 \times 8)}, \quad F_4^\top = \begin{bmatrix} -E_2 s\tau & E_2 c\tau \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}. \end{aligned}$$

Уравнения для вспомогательных векторов $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}, \zeta^{(4)}$ имеют вид

$$\dot{\zeta}^{(1)} = A^{(1)} \zeta^{(1)} + \tilde{B}_d^{(1)} V, \quad (3.3.15)$$

$$\dot{\zeta}^{(2)} = A^{(1)} \zeta^{(2)} + \tilde{B}_d^{(2)} U, \quad (3.3.16)$$

$$\dot{\zeta}^{(3)} = A^{(2)} \zeta^{(3)} + \tilde{B}_d^{(3)} U, \quad (3.3.17)$$

$$\dot{\zeta}^{(4)} = A^{(2)} \zeta^{(4)} + \tilde{B}_d^{(4)} V. \quad (3.3.18)$$

Здесь

$$\tilde{B}_d^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{2c\tau} \\ -\tilde{b}_{2c\tau} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 \\ -\beta_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d^{(3)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\beta_{2c\tau} & -\beta_{2s\tau} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d^{(4)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Векторы состояния $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ исходной нестационарной системы вместе с вспомогательными векторами $\xi_d^{(1)}$ и $\xi_d^{(2)}$ связаны с векторами $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ стационарной системы преобразованиями

$$\begin{aligned} \xi_{(18 \times 1)} = T(\tau) Z_{(18 \times 1)}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi_d^{(1)} \\ \xi^{(2)} \\ \xi_d^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \zeta^{(1)} \\ \xi^{(4)} \\ \xi^{(2)} \\ \zeta^{(2)} \\ \zeta^{(3)} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ z^{(3)} \\ z^{(4)} \end{bmatrix}, \quad T(\tau) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{11} \end{bmatrix}, \\ T_{11} = \begin{bmatrix} F_1^\top \\ F_3^\top \\ O \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} O & E_4 & O \\ O & O & O \\ O & O & E_2 \end{bmatrix}, \quad T_{21} = O, \quad T_{22} = \begin{bmatrix} F_2^\top & O & E_2 \\ O & E_4 & O \\ F_4^\top & O & O \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Исходная система (3.3.2), (3.3.3) при $u_2 = 0$, $v_2 = 0$ имеет вид

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)}\xi^{(1)} + \tilde{B}_u^{(1)}U + \tilde{B}_v^{(1)}V, \quad (3.3.19)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)}\xi^{(2)} + \tilde{B}_u^{(2)}U + \tilde{B}_v^{(2)}V, \quad (3.3.20)$$

где

$$\tilde{B}_u^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 \\ \beta_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_v^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 s \tau \\ \tilde{b}_2 s \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_u^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\beta_2 s \tau & \beta_2 c \tau \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_v^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда нестационарную систему для моделирования составляют системы (3.3.19), (3.3.15), (3.3.18) и (3.3.20), (3.3.16), (3.3.17)

$$\dot{\xi} = \tilde{A}_\xi \xi + \tilde{B}_\xi(\tau) U_\xi, \quad U_\xi = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}. \quad (3.3.21)$$

Здесь $\tilde{A}_\xi = \text{diag}(A^{(1)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(2)}, A^{(1)}, A^{(2)})$;

$$\tilde{B}_\xi = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{\xi 1} \\ \tilde{B}_{\xi 2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{\xi 1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_u^{(1)} & \tilde{B}_v^{(1)} \\ O & B_d^{(1)} \\ O & B_d^{(4)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{\xi 2} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_u^{(2)} & \tilde{B}_v^{(2)} \\ B_d^{(2)} & O \\ B_d^{(3)} & O \end{bmatrix}.$$

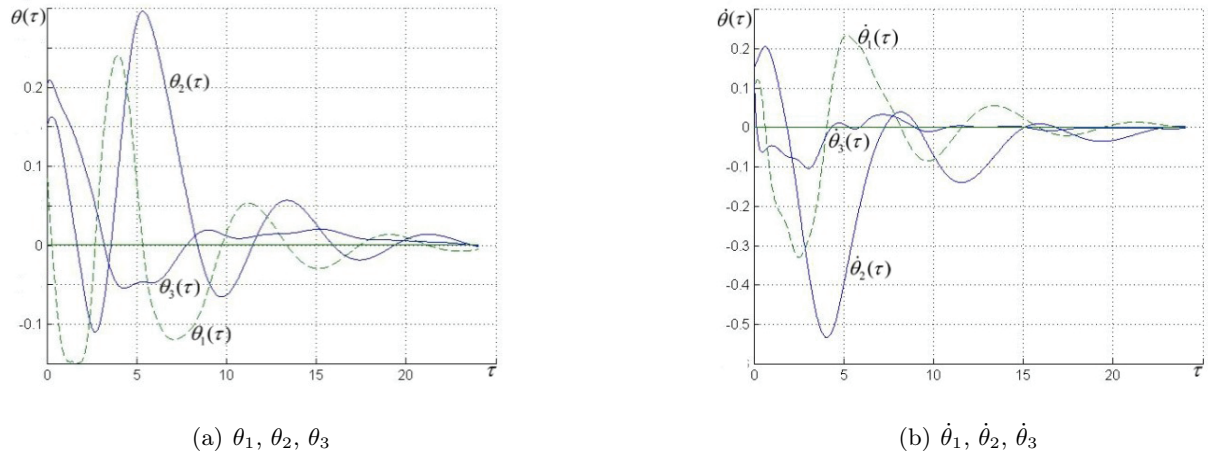
Управления (3.3.13), построенные для стационарной системы (3.3.9)–(3.3.12), можно вводить в систему (3.3.21) в виде

$$U_\xi = -K_Z T^{-1}(\tau) \xi, \quad K_Z = \begin{bmatrix} K_z^{(1)} & O \\ O & K_z^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (3.3.22)$$

Замкнутая управлением система имеет вид

$$\dot{\xi} = (\tilde{A}_\xi - \tilde{B}_\xi(\tau) K_Z T^{-1}(\tau)) \xi. \quad (3.3.23)$$

Решения $\xi(\tau)$ системы (3.3.23), содержащие компоненты исходного вектора $\xi^{(1)}(\tau)$, $\xi^{(2)}(\tau)$, стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ в силу выбора матрицы K_Z , так как они связаны ограниченным преобразованием T с асимптотически стремящимися к нулю компонентами вектора Z .

Рис. 3.15. Поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$.

3.3.5. Моделирование. Задача стабилизации относительного равновесия спутника при помощи собственных магнитных моментов и моментов лоренцевых сил моделировалась на основе уравнений (3.3.21). Коэффициенты управления выбирались при помощи стандартной программы LQR для стационарных систем (3.3.9), (3.3.10) десятого порядка и (3.3.11), (3.3.12) восьмого порядка.

Матрицы в функционалах Φ_1, Φ_2 приняты в виде

$$Q_1 = \text{diag}(\alpha_{v1}E_4, O_4, \alpha_{v3}E_2),$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{v1} & 0 \\ 0 & \gamma_{v3} \end{bmatrix};$$

$$Q_2 = \text{diag}(\alpha_{u1}E_2, \alpha_{u3}E_2, O_2, O_2),$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{u1} & 0 \\ 0 & \gamma_{u3} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\alpha_{u1}, \alpha_{u3}, \alpha_{v1}, \alpha_{v3}, \gamma_{u1}, \gamma_{u3}, \gamma_{v1}, \gamma_{v3}$ — задаваемые параметры:

$$\begin{aligned} \alpha_{u1} = \alpha_{u3} &= 0,01; & \gamma_{u1} &= 0,01, & \gamma_{u3} &= 0,001; \\ \alpha_{v1} = \alpha_{v3} &= 0,01; & \gamma_{v1} &= 0,001, & \gamma_{v3} &= 0,1. \end{aligned}$$

Начальные значения углов: $\theta_1(0) = 0,1, \theta_2(0) = 0,15, \theta_3(0) = 0,2$; угловых скоростей: $\dot{\theta}_1(0) = 0,15, \dot{\theta}_2(0) = 0,1, \dot{\theta}_3(0) = 0,1$. По дополнительным переменным начальные условия принимались нулевыми.

Спутник движется по орбите радиуса $R = 7000$ км. Угол наклона плоскости орбиты $I = 60^\circ$. Тензор инерции спутника $J = [115, 0, 120, 0, 135, 0]$ кг $\cdot$ м² (см. [49]).

Параметр, определяющий величину собственного магнитного момента $\mu_0 = \frac{\mu E}{\mu}, \mu_E = 7,812 \cdot 10^6$ км³ $\cdot$ кг $\times$ с⁻² $\cdot$ А⁻¹, $\mu = 3,986 \cdot 10^5$ км³с⁻².

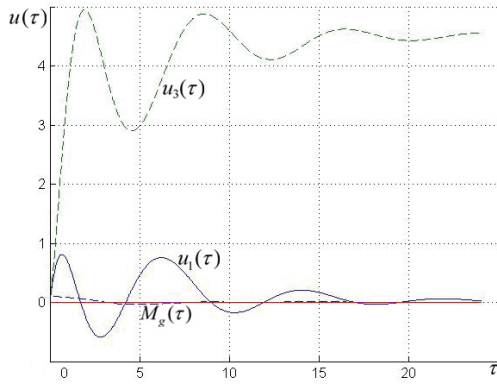
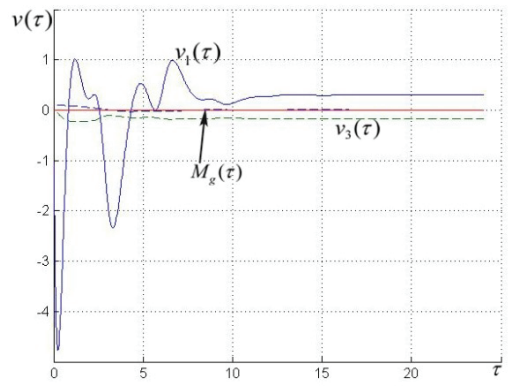
Величина заряда в коэффициентах матрицы управления при помощи лоренцевых сил $q = 5,0 \cdot 10^{-3}$ А $\times$ с (см. [40]).

На рис. 3.15 представлено поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и их производных $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ в зависимости от безразмерного времени τ .

Процесс стабилизации практически завершился к моменту времени $\tau = 20$, что соответствует $\approx 4,5$ часа.

На рис. 3.16 представлено поведение компонент управлений $u_j(\tau), v_j(\tau)$ ($j = 1, 3$) в сравнении с гравитационным моментом $M_g(\tau)$.

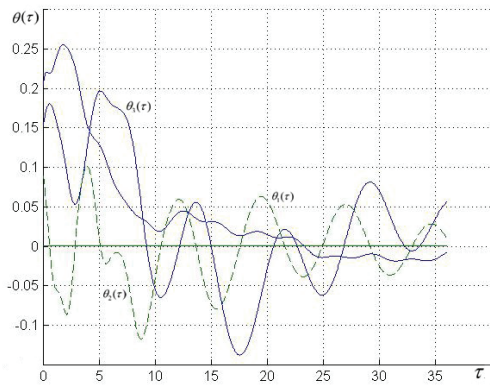
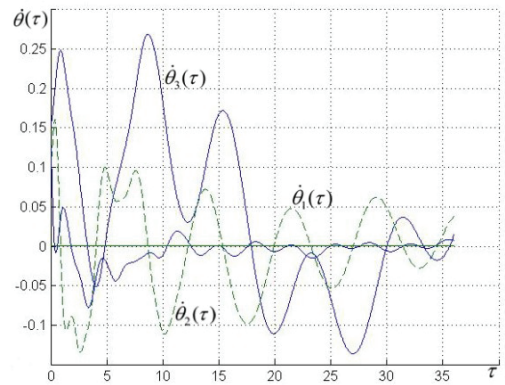
Если моменты инерции спутника не являются близкими к «критическим» (не удовлетворяют условиям неуправляемости стационарной системы), то их изменение на 10–15% не приводит

(a) $u_j(\tau)$ ($j = 1, 3$), $M_g(\tau)$ (b) $v_j(\tau)$ ($j = 1, 3$), $M_g(\tau)$ Рис. 3.16. Поведение компонент управлений $u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$ ($j = 1, 3$).

к изменению характера кривых. Чувствительность алгоритма к изменению компонент тензора инерции проявляется только в окрестности условий неуправляемости.

Было проведено моделирование алгоритмов «вблизи» выполнения условий неуправляемости $J_1 = J_2 = J_3$; и $J_1 = J_3$, $J_2 = 2J_3$.

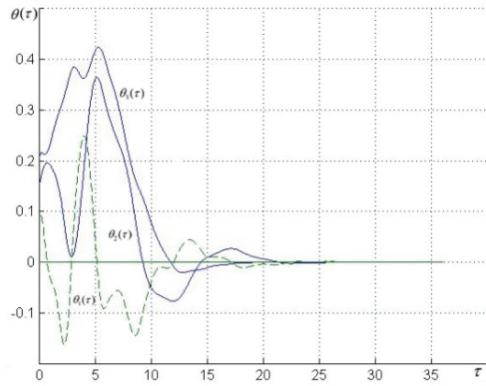
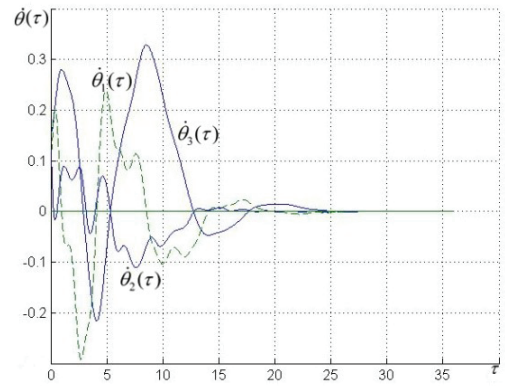
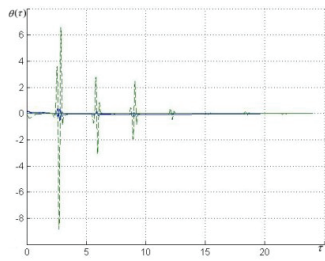
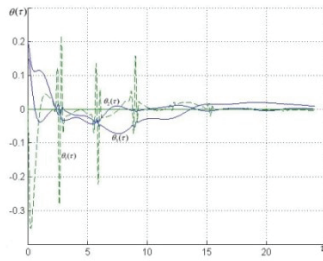
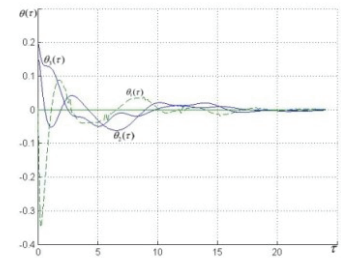
На рис. 3.17, 3.18 продемонстрировано, как влияет близость моментов инерции к соотношениям, удовлетворяющим условиям неуправляемости стационарной системы.

(a) $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (b) $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ Рис. 3.17. Поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$.

На рис. 3.17 показано поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и их производных $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ в зависимости от времени для спутника с тензором инерции $J = [210, 0, 190, 0, 210, 0]$ кг · м² (тензор инерции отличается от шарового на 5%).

Было проведено моделирование для значений компонент тензора инерции, отличающихся от шарового на 10%, а именно: $J_1 = [220, 0, 180, 0, 230, 0]$ кг · м², поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ показано на рис. 3.18.

Чувствительность алгоритма к параметрам спутника в окрестности условий неуправляемости для малого спутника продемонстрировано на рис. 3.19.

(a) $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (b) $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ Рис. 3.18. Поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$.(a) $J = [3,2; 3,4; 3,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (b) $J = [3,2; 3,6; 3,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (c) $J = [3,2; 4,0; 3,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ Рис. 3.19. Поведение переменных $\theta_i(\tau)$ и $\dot{\theta}_i(\tau)$.

Поведение компонент вектора состояния в том случае, когда тензор инерции спутника равен $J_1 = [220,0,420,0,220,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (почти удовлетворяет условию неуправляемости стационарной системы $J_1 = J_3, J_2 = 2J_3$), представлено на рис. 3.20.

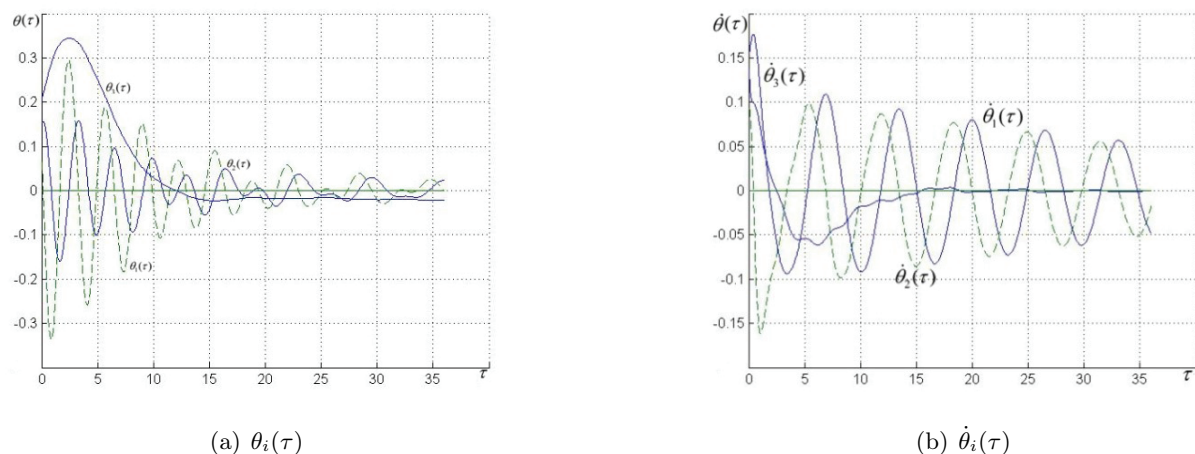
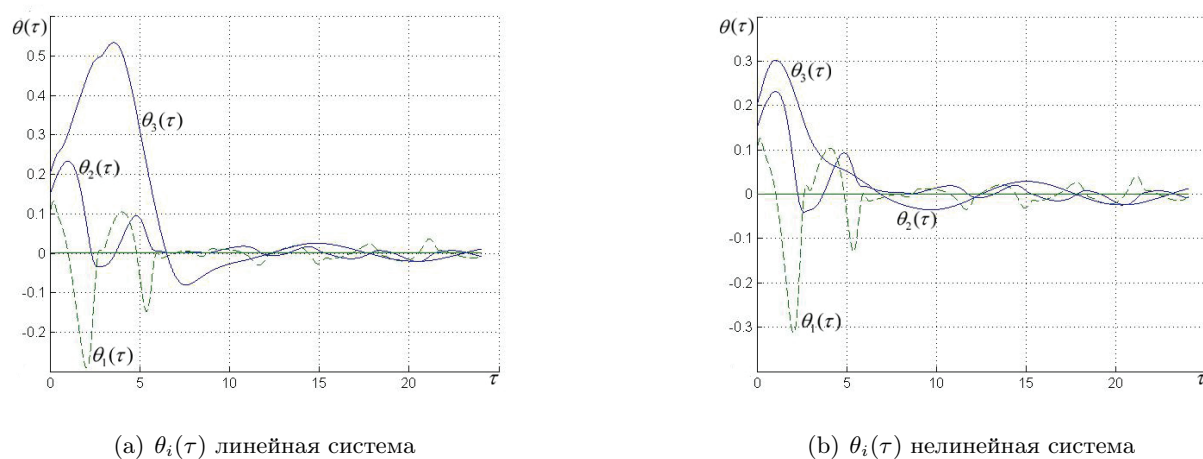
Характер кривых, отображающих процесс стабилизации на рис. 3.20, отличается от варианта, представленного на рис. 3.17.

Для сравнения процесса стабилизации переменных $\theta_i(\tau)$ в тех случаях, когда интегрировалась линейная система и когда в исходной системе учитывались нелинейные члены (см. Приложение 3.6.2), было проведено моделирование стабилизации спутника с моментами инерции $J = [27,0,17,0,25,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ при движении по орбите, близкой к полярной $I = 87,0^\circ$. Результаты моделирования на рис. 3.21.

На рис. 3.22 представлено поведение переменных $\theta_i(\tau)$ в процессе стабилизации линейной и нелинейной (см. Приложение 3.6.2) систем при движении по экватору ($I = 0,0^\circ$) для спутника (см. [49]) с моментами инерции $J = [110,0,130,0,155,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Моделирование показало, что управления, построенные для линейных систем, применимы для нелинейных, если начальные условия по углам не превышают $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0,3; \theta_3(0) = 0,5$; а по скоростям не превышают значений $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{\theta}_3(0) = 0,2$.

На рис. 3.23 приведено сравнение процессов стабилизации в тех случаях, когда использовано гибридное управление (управление с использованием моментов магнитных катушек и моментов сил Лоренца) и когда используется только изменение собственного магнитного момента за счет

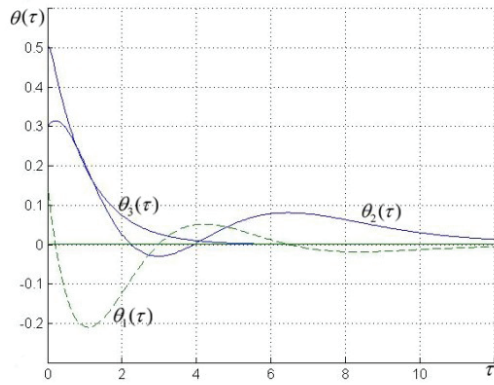
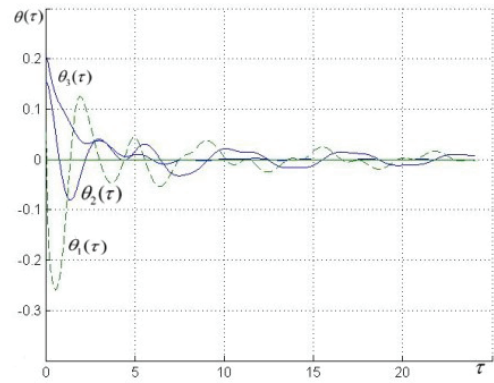
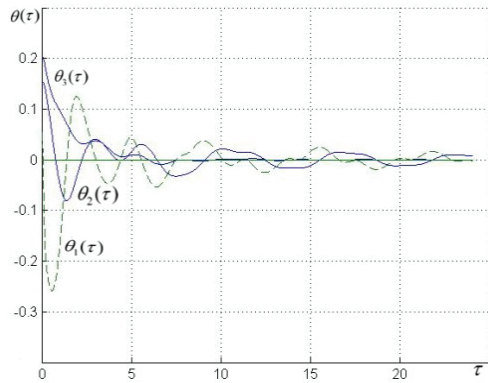
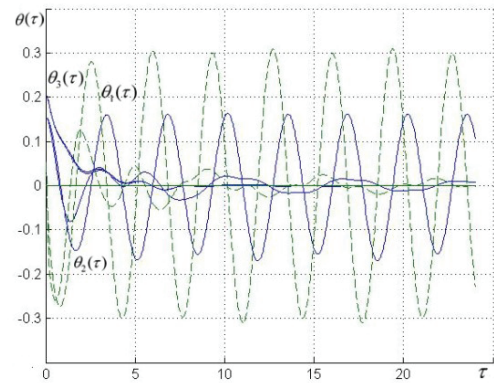
Рис. 3.20. Поведение переменных θ_1 , θ_2 , θ_3 и $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$.Рис. 3.21. Поведение переменных $\theta_i(\tau)$.

магнитных катушек. Тензор инерции спутника $J = [3, 6, 5, 8, 2, 5]$ кг·м² (см. [20]). Орбита, близкая к полярной.

Алгоритм стабилизации при использовании только собственных магнитных моментов, очевидно, результатов не дает, так как соответствующая стационарная система в этом случае неуправляема (см. [20]).

3.4. СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ СПУТНИКА ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ

Рассмотрим задачу о стабилизации регулярных прецессий динамически симметричного спутника, центр масс которого движется по круговой орбите в гравитационном и магнитном полях Земли. Управляющие моменты формируются за счет взаимодействия собственного дипольного момента спутника с магнитным полем Земли. Работ, в которых рассматривается стабилизация вращательных движений динамически симметричного спутника при помощи магнитных моментов немного. В [1, 35] рассматривается задача стабилизации при помощи магнитных и лоренцевых моментов такого программного движения спутника, при котором ось симметрии расположена

(a) $\theta_i(\tau)$ линейная система(b) $\theta_i(\tau)$ нелинейная системаРис. 3.22. Поведение переменных $\theta_i(\tau)$.(a) $u \neq 0, v \neq 0$ (b) $u \neq 0, v = 0$ Рис. 3.23. Сравнение процессов стабилизации при гибридном управлении и управлении при помощи только магнитных катушек ($I = 82,5^\circ$).

вдоль местной вертикали или отклонена от нее на некоторый фиксированный угол, а сам спутник совершает медленное движение вокруг этой оси. При этом предполагается, что орбита — круговая экваториальная. Аналогичная задача рассматривается в [27].

Стабилизация при помощи магнитных моментов движения симметричного спутника вокруг оси, ортогональной плоскости круговой орбиты, рассмотрена в [44, 45].

В этом параграфе рассматривается движение динамически симметричного спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Предполагается, что центр масс спутника движется по круговой орбите. Линеаризованные в окрестности регулярных прецессий уравнения управляемого движения представляют собой линейные нестационарные по управлению системы. Для решения задач стабилизации применяется подход, основанный на приведении к стационарным системам большего, чем исходная система, порядка, который использовался в разделах 3.1–3.3.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс приведены в разделе 1.2 главы 1 и имеют вид (1.2.6), (1.2.4). Эти уравнения в отсутствие управляющих моментов допускают стационарные решения (три типа регулярных прецессий (1.2.7)–(1.2.9)).

Требуется построить управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость стационарных движений, основываясь на линеаризованных для каждого стационарного движения уравнениях, которые являются нестационарными. Управляющий момент следует формировать в виде обратной связи по компонентам вектора состояния $\alpha_1, \alpha_2, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$.

При линеаризации уравнений в окрестности стационарных движений линеаризуются выражения для управляющих моментов (1.2.4).

3.4.1. Цилиндрическая прецессия. Управляемость. Рассмотрим цилиндрическую прецессию, которая определяется следующими значениями углов $\alpha_{10} = \pi/2, \alpha_{20} = 0$. В этом движении ось симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты.

В возмущенном движении положим $\alpha_1 = \pi/2 + x_1, \alpha_2 = x_2$.

Линеаризованные уравнения (1.2.10) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \kappa_1 \dot{x}_2 - \kappa_2 x_1 &= -2usI\sigma, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_1 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_2 &= usI\sigma,\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

где $\kappa_1 = 2 + pJ, \kappa_2 = 4 + pJ - 3J, \kappa_3 = 1 + pJ; p = r_0/\omega_0, J = J_3/J_1; u = \mu_0 t$ (см. обозначения главы 1). Для приведения системы (3.4.1) к стационарному виду введем новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 4$) по формулам

$$x_1 = y_1 \sigma + y_3 \tau, \quad x_2 = y_2 \sigma + y_4 \tau.\tag{3.4.2}$$

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.4.1) и приравнявая коэффициенты при функциях, получим стационарную систему

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \kappa_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - \bar{\kappa}_2 y_1 + \kappa_1 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \kappa_1 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 - \bar{\kappa}_3 y_2 - \kappa_1 y_3 &= usI, \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + \kappa_1 \dot{y}_4 - \kappa_1 y_2 - \bar{\kappa}_2 y_3 &= -2usI, \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - \kappa_1 \dot{y}_3 + \kappa_1 y_1 - \bar{\kappa}_3 y_4 &= 0.\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

Здесь $\bar{\kappa}_2 = \kappa_2 + 1, \bar{\kappa}_3 = \kappa_3 + 1$.

Рассмотрим вопросы управляемости системы. На экваториальной орбите ($\sin I = 0$) система (3.4.1), очевидно, неуправляема.

Достаточные условия неуправляемости можно получить, если стационарная система (3.4.3) имеет линейный интеграл, не зависящий от управления. Определим условия наличия такого интеграла.

Умножим первое и четвертое уравнения системы (3.4.3) на постоянные величины δ_1 и δ_2 соответственно и сложим. Полученное соотношение не должно содержать слагаемых, зависящих от y_1, y_4 , т. е. должно выполняться соотношение $\delta_1(-\bar{\kappa}_2 y_1 + \kappa_1 y_4) + \delta_2(\kappa_1 y_1 - \bar{\kappa}_3 y_4) = 0$.

Отсюда $-\delta_1 \bar{\kappa}_2 + \delta_2 \kappa_1 = 0, \delta_1 \kappa_1 - \delta_2 \bar{\kappa}_3 = 0$.

Величины δ_1 и δ_2 не равны нулю, если

$$\kappa_1^2 - \bar{\kappa}_2 \bar{\kappa}_3 = 0 \quad \text{или} \quad (2 + pJ)(J - 1) = 0.\tag{3.4.4}$$

Возможны два случая: $pJ = -2$ и $J = 1$.

Таким образом, условия наличия интеграла найдены.

При выполнении указанных условий линейный интеграл имеет вид $\dot{y}_4 - 2y_3 = \text{const}$ при $pJ = -2$ ($\kappa_1 = 0, \bar{\kappa}_3 = 0$); $\dot{y}_1 + \dot{y}_4 + p(y_2 - y_3) = \text{const}$ при $J = 1$ ($\kappa_1 = \bar{\kappa}_2 = \bar{\kappa}_3 = p + 2$).

Если умножить второе уравнение системы (3.4.3) на 2 и сложить с третьим, то новых условий существования интегралов не появится.

Условия (3.4.4) являются достаточными условиями неуправляемости стационарной системы (3.4.3).

Используя критерий Красовского (см. [13]), можно показать, что исходная нестационарная система (3.4.1) неуправляема, если выполняются оба условия (3.4.4), т. е. при $J = 1$ и $p = -2$.

Это означает, что система неуправляема при $\Omega = -\omega_0$, т. е. угловая скорость собственного вращения равна и противоположна по знаку орбитальной угловой скорости.

3.4.2. Гиперболоидальная прецессия. Управляемость. В возмущенном движении положим

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \alpha_2 = \alpha_{20} + x_2, \quad c\alpha_{20} = -pJ.$$

В этом случае линеаризованные уравнения движения (1.2.11) имеют вид

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + \kappa_4 x_1 = \beta_1^p u s \tau, \quad \ddot{x}_2 - c^2 \alpha_{20} \dot{x}_1 + s^2 \alpha_{20} x_2 = (\beta_2^p c \tau - \beta_3^p) u. \quad (3.4.5)$$

Здесь

$$\kappa_4 = 3(J-1), \quad \beta_1^p = -2 \frac{sI}{c\alpha_{20}}, \quad \beta_2^p = sI c \alpha_{20}, \quad \beta_3^p = cI s \alpha_{20}.$$

Переменные y_j ($j = 1, \dots, 6$), введенные по формулам

$$x_1 = y_1 c \tau + y_3 s \tau + y_5, \quad x_2 = y_2 c \tau + y_4 s \tau + y_6, \quad (3.4.6)$$

удовлетворяют стационарной системе

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 + \bar{\kappa}_4 y_1 + y_4 &= 0, \quad \bar{\kappa}_4 = \kappa_4 - 1; \\ \ddot{y}_2 - c^2 \alpha_{20} \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 - c^2 \alpha_{20} y_2 - c^2 \alpha_{20} y_3 &= \beta_2^p u; \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + \dot{y}_4 - y_2 + \bar{\kappa}_4 y_3 &= \beta_1^p u; \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - c^2 \alpha_{20} \dot{y}_3 + c^2 \alpha_{20} y_1 - c^2 \alpha_{20} y_4 &= 0; \\ \ddot{y}_5 + \dot{y}_6 + \kappa_4 y_5 &= 0; \\ \ddot{y}_6 - c^2 \alpha_{20} \dot{y}_5 + s^2 \alpha_{20} y_6 &= -\beta_3^p u. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Рассмотрим управляемость нестационарной системы (3.4.5) и стационарной системы (3.4.7), (3.4.8).

Если орбита экваториальная, то критерием неуправляемости являются условия $s\alpha_{20} = 0$, т. е. $\bar{\Omega} = \pm \frac{J-1}{J}$, что нетрудно видеть, так как система (3.4.5) становится стационарной. (Отметим, что при $J = 1$ собственное вращение спутника отсутствует).

Если орбита полярная ($cI = 0$), то $\beta_3^p = 0$, и вводить переменные y_5, y_6 не требуется.

Если $cI \neq 0$, то система (3.4.8) неуправляема при $J = 1$.

Условие $J = 1$ является достаточным условием неуправляемости системы (3.4.7), так как в этом случае система (3.4.7) имеет линейный интеграл, не зависящий от управления $(\dot{y}_1 + y_2 + y_3)c^2 \alpha_{20} + \dot{y}_4 - 2y_2 = \text{const}$.

Пусть $sI \neq 0$.

Используя двойственную к системе (3.4.5) систему с наблюдением, можно показать, что при $J = 1$ она наблюдаема и, следовательно, в силу принципа двойственности исходная нестационарная система (3.4.5) управляема.

3.4.3. Коническая прецессия. Управляемость. В возмущенном движении положим $\alpha_1 = \alpha_{10} + x_1, \alpha_2 = x_2, s\alpha_{10} = \frac{pJ}{3J-4}$.

В этом случае линеаризованные уравнения движения (1.2.12) имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \kappa_5 \dot{x}_2 + \kappa_6 x_1 &= (\beta_4^p - \beta_5^p s \tau) u, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_5 \dot{x}_1 + \kappa_7 x_2 &= \beta_6^p u s \tau. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa_5 &= (3J-2)s\alpha_{10}, \quad \kappa_6 = (4-3J)c^2 \alpha_{10}, \quad \kappa_7 = 3(1-J), \\ \beta_4^p &= cI c \alpha_{10}, \quad \beta_5^p = 2sI s \alpha_{10}, \quad \beta_6^p = sI. \end{aligned}$$

Построение алгоритмов стабилизации основано, как и выше, на использовании приведенных стационарных систем, управляемость которых необходима.

Приведем систему (3.4.9) к стационарной системе, введя новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 6$), удовлетворяющие стационарной системе

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \kappa_5 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 + \bar{\kappa}_6 y_1 + \kappa_5 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \kappa_5 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + \bar{\kappa}_7 y_2 - \kappa_5 y_3 &= \beta_6^p u, \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + \kappa_5 \dot{y}_4 - \kappa_5 y_2 + \bar{\kappa}_6 y_3 &= -\beta_5^p u, \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - \kappa_5 \dot{y}_3 + \kappa_5 y_1 + \bar{\kappa}_7 y_4 &= 0, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_5 + \kappa_5 \dot{y}_6 + \kappa_6 y_5 &= \beta_4^p u, \\ \ddot{y}_6 - \kappa_5 \dot{y}_5 + \kappa_7 y_6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Здесь $\bar{\kappa}_6 = \kappa_6 - 1$, $\bar{\kappa}_7 = \kappa_7 - 1$.

Определим достаточные условия неуправляемости путем выявления условий существования линейных интегралов, не зависящих от управления в системе. Так же, как и для случая цилиндрической прецессии, умножив первое и четвертое уравнения системы (3.4.10) на постоянные величины δ_1 и δ_4 и складывая, получим соотношение, которое при выполнении условий

$$\delta_1 \bar{\kappa}_6 + \delta_4 \kappa_5 = 0, \quad \delta_1 \kappa_5 + \delta_4 \bar{\kappa}_7 = 0$$

не зависит от переменных y_j .

Условие $\kappa_5^2 - \bar{\kappa}_6 \bar{\kappa}_7 = 0$ существования неравных нулю величин δ_1 и δ_4 в данном случае имеет вид

$$(1 - J)(2 - 3J)(1 - 2s^2 \alpha_{10}) = 0.$$

Это означает, в системе (3.4.10) существует линейный интеграл, не зависящий от управления, в следующих случаях

$$J = 1; \quad J = \frac{2}{3}; \quad s^2 \alpha_{10} = \frac{1}{2} \quad \left(\bar{\Omega} = \pm 2\sqrt{2} \frac{J-1}{J} \right). \quad (3.4.12)$$

Выясним, существует ли другой интеграл в системе (3.4.10). Умножив второе уравнение системы (3.4.10) на δ_2 , а третье на δ_3 и сложив их, получим выражение, которое при выполнении равенств

$$\delta_2 \bar{\kappa}_7 - \delta_3 \kappa_5 = 0, \quad -\delta_2 \kappa_5 + \delta_3 \bar{\kappa}_6 = 0$$

не зависит от переменных y_2, y_3 .

Это означает, что при выполнении этих условий в системе существует еще один интеграл. Условия существования ненулевого решения этой системы приводят к равенствам

$$J = \frac{2}{3}; \quad c^2 \alpha_{10} = s^2 \alpha_{10} = \frac{1}{2},$$

которые совпадают со вторым и третьим соотношениями условий (3.4.12).

Итак, новых условий существования интегралов в системе (3.4.10) не возникает.

Таким образом, достаточными условиями неуправляемости стационарной системы (3.4.10) являются условия (3.4.12).

Рассмотрим условия неуправляемости исходной нестационарной системы (3.4.9). При движении по экваториальной орбите ($I = 0$) система (3.4.9) становится стационарной

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \kappa_5 \dot{x}_2 + \kappa_6 x_1 &= c \alpha_{10} u, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_5 \dot{x}_1 + \kappa_7 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Согласно критерию Hautus (см. [50]) эта система управляема, если для любого значения λ выполняется условие

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \kappa_6 & \kappa_5 \lambda & c \alpha_{10} \\ -\kappa_5 \lambda & \lambda^2 + \kappa_7 & 0 \end{bmatrix} = 2. \quad (3.4.14)$$

Очевидно, что система неуправляема при $c \alpha_{10} = 0$ ($\alpha_{10} = \pi/2$).

В этом случае

$$s \alpha_{10} = \frac{pJ}{3J-4} = \pm 1.$$

Тогда

$$p = \frac{r_0}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0 s \alpha_{10}}{\omega_0} = \bar{\Omega} \mp 1.$$

Откуда следует условие неуправляемости

$$\bar{\Omega} = \pm 4 \frac{J-1}{J}. \quad (3.4.15)$$

Пусть $s\alpha_{10} \neq 0$. Тогда из условий (3.4.14) следует, что условием неуправляемости является одновременное выполнение равенств $\kappa_5 \lambda = 0$ и $\lambda^2 + \kappa_7 = 0$.

Откуда следуют условия $\kappa_7 = 0$ или $\kappa_5 = 0$, т. е. условиями неуправляемости являются

$$J = 1; \quad J = \frac{2}{3}; \quad s\alpha_{10} = 0, \quad p = \Omega = 0. \quad (3.4.16)$$

Условие $\Omega = 0$ означает, что собственное вращение отсутствует (коническая прецессия переходит в относительное равновесие, при котором ось симметрии спутника расположена по радиус-вектору ($\alpha_{10} = 0$)).

Итак, если орбита экваториальная, то критерием неуправляемости являются условия (3.4.15), (3.4.16).

При движении по полярной орбите ($I = \pi/2$) система (3.4.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \kappa_5 \dot{x}_2 + \kappa_6 x_1 &= -2s\alpha_{10} s\tau u, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_5 \dot{x}_1 + \kappa_7 x_2 &= c\tau u. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Используя критерий Красовского (см. [13]), можно показать, что при выполнении условий $J = 2/3$ и $s^2\alpha_{10} = 1/2$, которые являются достаточными условиями неуправляемости (3.4.12) приведенной стационарной системы (3.4.10), нестационарная система (3.4.17) является неуправляемой.

Замечание 3.2. Пусть $sI \neq 0$. Используя двойственную к системе (3.4.9) систему с наблюдением, можно показать, что при $J = 1$ она наблюдаема, если $s\alpha_{10} \neq 0$, и, следовательно, в силу принципа двойственности исходная нестационарная система (3.4.9) управляема.

3.4.4. Алгоритмы стабилизации. Поведение вектора $x = [x_1 \ x_2]^\top$ исходной системы описывается нестационарными системами (3.4.1), (3.4.5) и (3.4.9) соответственно для каждого варианта прецессий. Для построения алгоритмов стабилизации эти системы должны быть представлены в форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_x X + B_x(\tau)u, \quad X(4 \times 1), \quad X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad B_x(\tau)(4 \times 1), \\ A_x &= \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ a_{11}^{(j)} & 0 & 0 & a_{14}^{(j)} \\ 0 & a_{22}^{(j)} & a_{23}^{(j)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_x(\tau) = \begin{bmatrix} O_{21} \\ b_1^{(j)}(\tau) \\ b_2^{(j)}(\tau) \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Для цилиндрической прецессии

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= k_2, \quad a_{22}^{(1)} = k_3, \quad a_{14}^{(1)} = -k_1, \quad a_{23}^{(1)} = k_1; \\ b_1^{(1)} &= -2sI \sin \tau, \quad b_2^{(1)} = sI \cos \tau. \end{aligned}$$

Для гиперболоидальной прецессии

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)} &= -k_4, \quad a_{22}^{(2)} = -s^2\alpha_{20}, \quad a_{14}^{(2)} = -1, \quad a_{23}^{(2)} = c^2\alpha_{20}; \\ b_1^{(2)} &= \beta_1^p \sin \tau, \quad b_2^{(2)} = \beta_2^p \cos \tau - \beta_3^p. \end{aligned}$$

Для конической прецессии

$$\begin{aligned} a_{11}^{(3)} &= -k_6, \quad a_{22}^{(3)} = -k_7, \quad a_{14}^{(3)} = -k_5, \quad a_{23}^{(3)} = k_5; \\ b_1^{(3)} &= \beta_4^p - \beta_5^p \sin \tau, \quad b_2^{(3)} = \beta_6^p \cos \tau. \end{aligned}$$

Алгоритмы стабилизирующего управления строятся на основании соответствующих стационарных систем (3.4.3); (3.4.7), (3.4.8); (3.4.10), (3.4.11), записанных в форме систем первого порядка

$$\dot{Y} = A_y Y + B_y u, \quad Y(2n \times 1), \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad B_y(2n \times 1). \quad (3.4.19)$$

Заметим, что в рассматриваемых случаях n принимает различные значения: для цилиндрической прецессии $n = 4$, для гиперболоидальной и конической прецессий $n = 6$.

Предполагается, что пара A_y, B_y управляема.

Матрицу коэффициентов управления можно выбрать из условия минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\infty [Y^\top(\tau) Q Y(\tau) + \gamma u^2(\tau)] d\tau, \quad (3.4.20)$$

где Q — неотрицательно определенная постоянная матрица соответствующей размерности, $\gamma > 0$. Оптимальное управление имеет вид

$$u(\tau) = -K_y Y(\tau), \quad K_y = \frac{1}{\gamma} B_y^\top P. \quad (3.4.21)$$

Матрица P размерности $2n \times 2n$ является решением алгебраического уравнения Риккати

$$P A_y + A_y^\top P - \frac{1}{\gamma} P B_y B_y^\top P + Q = 0. \quad (3.4.22)$$

Синтезированное на основе расширенной стационарной системы управляющее воздействие является функцией переменных $Y(\tau)$ стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система.

Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор $Y(2n \times 1)$ ($n = 4, 6$) через вектор $x(2 \times 1)$ исходной системы, дополненный некоторым вектором $x_d(N \times 1)$ ($N = 2, 4$).

Вектор $\xi = [x, x_d]^\top$ и вектор y связаны соотношением

$$\xi = T_y y, \quad T_y = \begin{bmatrix} F(\tau) \\ D(\tau) \end{bmatrix}, \quad x = F(\tau) y, \quad x_d = D(\tau) y. \quad (3.4.23)$$

Матрица $F(\tau)$ определена согласно формулам (2.2.6) соответственно для $n = 2$ и $n = 6$.

Дополнительный вектор x_d вводится таким образом, чтобы квадратные матрицы T_y и $\dot{T}_y$ в преобразовании (3.4.23) были невырожденными.

Введем вектор $\eta = [\xi, \dot{\xi}]^\top$. Векторы Y и η связаны преобразованием

$$Y = T(\tau) \eta, \quad T(\tau) = \begin{bmatrix} T_y^{-1} & O_n \\ \dot{T}_y^{-1} & T_y^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.4.24)$$

Тогда управление (3.4.21) может быть записано в виде

$$u(\tau) = -K_y T(\tau) \eta(\tau). \quad (3.4.25)$$

Уравнения для дополнительного вектора $X_d = [x_d, \dot{x}_d]^\top$ имеют вид

$$\dot{X}_d = A_d X_d + B_d(\tau) u. \quad (3.4.26)$$

Матрицы $A_d, B_d(\tau)$ для конкретных случаев выписаны ниже.

Расширенная нестационарная система для построения алгоритма стабилизации состоит из исходной системы (3.4.18) и системы (3.4.26), где управление формируется согласно (3.4.25).

Решения этой расширенной нестационарной системы, замкнутой управлением (3.4.25), стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, в силу выбора матрицы K_y , так как компоненты вектора ξ связаны с компонентами вектора ограниченным преобразованием (3.4.23).

Оптимальные стабилизирующие управления строятся для соответствующих стационарных систем.

Для случая цилиндрической прецессии: система стационарных уравнений (3.4.3), соответствующая системе (3.4.1), имеет 8-й порядок. Матрицы расширенной нестационарной системы (3.4.18), (3.4.26) имеют вид

$$B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ -2sI\sigma\tau \\ sI\sigma\tau \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} O_{21} \\ -2sI\sigma\tau \\ -sI\sigma\tau \end{bmatrix}, \quad A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ k_2 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_3 & k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_d = A_x.$$

Матрицы F , D преобразования $T(\tau)$ в выражении (3.4.23) имеют вид:

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}, \quad D(\tau) = \begin{bmatrix} -s\tau E_2 & c\tau E_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}.$$

Для случая гиперболоидальной прецессии система стационарных уравнений (3.4.7), (3.4.8), соответствующая системе (3.4.5), имеет 12-й порядок. Матрицы расширенной нестационарной системы (3.4.5), (3.4.26) в этом случае имеют вид

$$A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} O_{44} & E_4 \\ A_{d1} & A_{d2} \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} A_{d11} & -A_{22} \\ A_{22} & A_{d11} \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} A_{22} & 2E_2 \\ -2E_2 & A_{d11} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \kappa_4 & 0 \\ 0 & -s^2\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ c^2\alpha_{20} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^2\alpha_{20} \end{bmatrix},$$

$$B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ \beta_1^p s\tau \\ \beta_2^p c\tau - \beta_3^p \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} O_{41} \\ \tilde{B}_d \end{bmatrix}_{(8 \times 1)}, \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} \beta_1^p \\ 0 \\ 0 \\ \beta_2^p \end{bmatrix}.$$

Матрицы F , D преобразования $T(\tau)$ в выражении (3.4.23) для случаев гиперболоидальной и конической прецессий имеют вид:

$$F = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 & E_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 6)}, \quad D = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 & O_2 \\ E_2 & O_2 & O_2 \end{bmatrix}.$$

Для конической прецессии стационарная система уравнений (3.4.10), (3.4.11), соответствующая системе (3.4.9), имеет также 12-й порядок. Матрицы систем (3.4.18), (3.4.26) в случае конической прецессии имеют вид

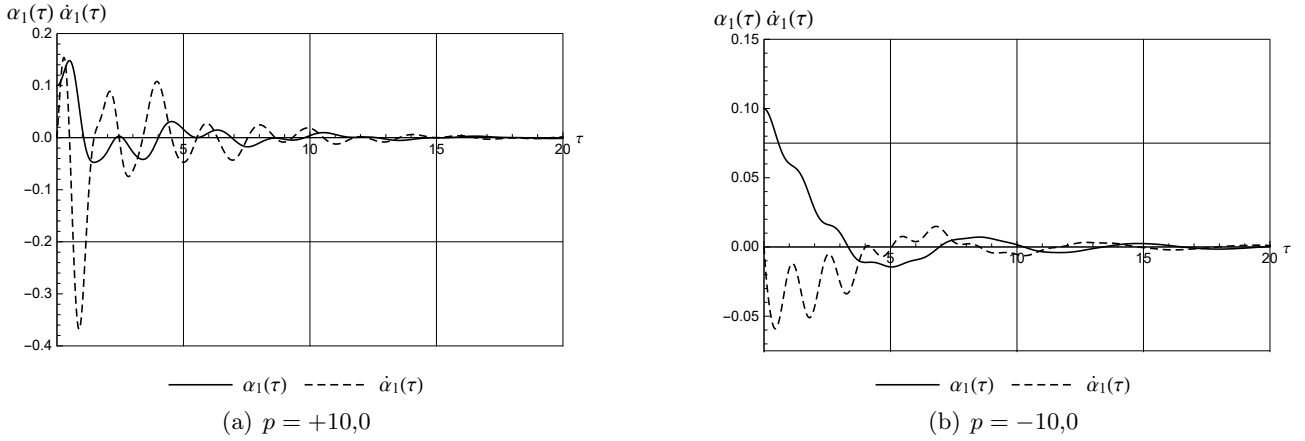
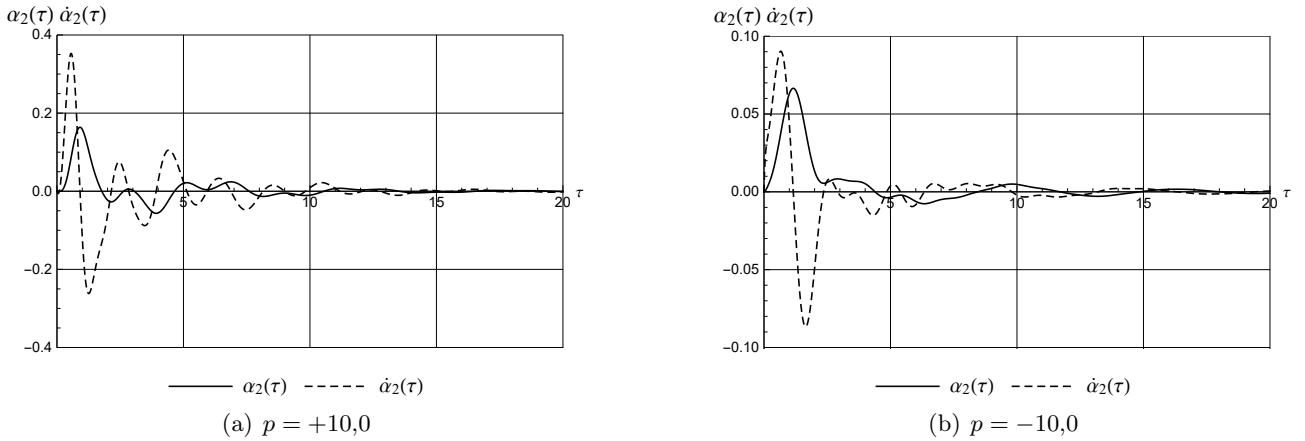
$$A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} O_{44} & E_4 \\ A_{d1} & A_{d2} \end{bmatrix}, \quad B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ \beta_4^p - \beta_5^p s\tau \\ \beta_6^p c\tau \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} O_{41} \\ \tilde{B}_d \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -\kappa_6 & 0 \\ 0 & -\kappa_7 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_5 \\ \kappa_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{21} & -A_{22} \\ A_{22} & \bar{A}_{21} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} -\bar{\kappa}_6 & 0 \\ 0 & -\bar{\kappa}_7 \end{bmatrix},$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} A_{22} & 2E_2 \\ -2E_2 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} -\beta_5^p \\ 0 \\ 0 \\ \beta_6^p \end{bmatrix}.$$

Таким образом, алгоритм стабилизации нестационарных систем для указанных случаев прецессий, как и в предыдущих задачах стабилизации, состоит из трех этапов:

1. нахождение постоянных коэффициентов управления K_Y для решения задачи оптимальной стабилизации соответствующей стационарной системы (на основе алгебраического уравнения Риккати);
2. построение управления в виде (3.4.20) с помощью невырожденных преобразований $T(\tau)$ и
3. решение расширенной нестационарной системы, содержащей исходную нестационарную систему и уравнения для вспомогательных переменных.

Рис. 3.24. Поведение переменных $\alpha_1(\tau)$, $\dot{\alpha}_1(\tau)$.Рис. 3.25. Поведение переменных $\alpha_2(\tau)$, $\dot{\alpha}_2(\tau)$.

3.4.5. Моделирование. Цель приведенных ниже результатов моделирования — показать принципиальную применимость предложенных алгоритмов и продемонстрировать их работоспособность.

Моделирование проводилось при помощи стандартного пакета Wolfram mathematica v11.0.

Коэффициенты управления выбирались при помощи стандартной программы LQR для стационарных систем.

Наклон орбиты движения спутника $I = \pi/6$.

Начальные значений отклонений углов $x_1(0) = x_2(0) = 0,1$; скоростей $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0,0$.

Параметр, определяющий отношение моментов инерции спутника $J = J_3/J_1 = 0,5$. Параметр отношения скоростей $p = r_0/\omega_0$ для цилиндрической прецессии $p = \pm 10,0$; для гиперболической и конической прецессий $p = 1,0$.

Параметры функционала (3.4.15): $Q = 100,0 \cdot E_k$ ($k = 8, 12$); $\gamma = 1$.

На рис. 3.24, 3.25 представлено поведение переменных $\alpha_1(\tau)$, $\dot{\alpha}_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$, $\dot{\alpha}_2(\tau)$ для случая цилиндрической прецессии (здесь через $\alpha_i(\tau)$, $\dot{\alpha}_i(\tau)$ обозначены отклонения от стационарных значений) при $p = +10,0$ (рис. (a)) и при $p = -10,0$ (рис. (b)).

На рис. 3.26 и 3.27 представлено поведение переменных $\alpha_1(\tau)$, $\dot{\alpha}_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$, $\dot{\alpha}_2(\tau)$ для случаев гиперболоидальной и конической прецессии соответственно.

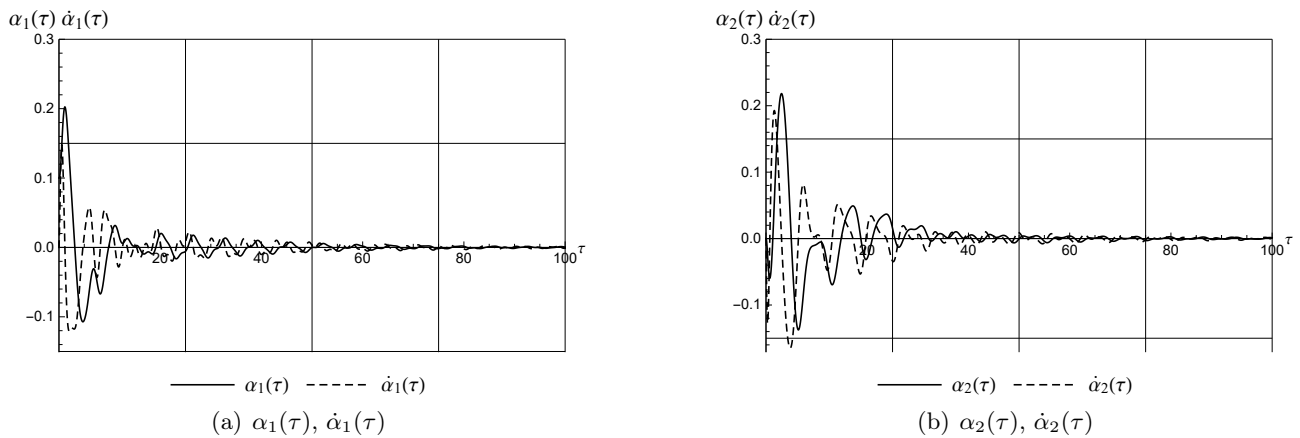


Рис. 3.26. Процесс стабилизации углов и скоростей $\alpha_i(\tau), \dot{\alpha}_i(\tau)$ при $p = 1, 0$.

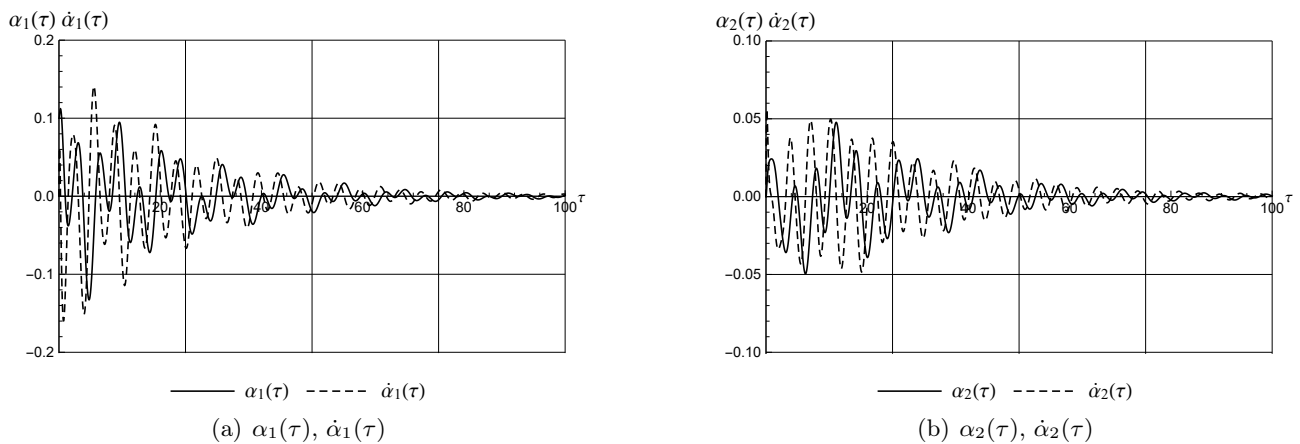


Рис. 3.27. Процесс стабилизации углов и скоростей $\alpha_i(\tau), \dot{\alpha}_i(\tau)$ при $p = 1, 0$.

Таким образом, представленные результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов стабилизации спутника в окрестности регулярных прецессий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — 7, № 7. — С. 511–520.

7. Каленова В. И., Морозов В. М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. Каленова В. И., Морозов В. М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением// Прикл. мат. мех. — 2012. — 76, № 4. — С. 576–588.
9. Каленова В. И., Морозов В. М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления// в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. Кондурарь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара// Прикл. мех. техн. физ. — 1960. — 36, № 5. — С. 890–901.
13. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
14. Лурье А. А. Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. Морозов В. М. Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. — 1967. — 5, № 5. — С. 727–732.
16. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. — 1969. — 7, № 3. — С. 395–401.
17. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. Морозов В. М. Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 1–83.
19. Морозов В. М., Каленова В. И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — 58, № 3. — С. 199–207.
20. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — 59, № 5. — С. 393–407.
21. Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — 85, № 4. — С. 436–453.
22. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — 60, № 3. — С. 246–253.
23. Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С. Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — 3, № 2 (28). — С. 73–86.
25. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — 38, № 3. — С. 296–306.
28. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 1978.
29. Сарычев В. А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 1985.
31. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — 41, № 1. — С. 69–79.
32. Хентов А. А. Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.
33. Хентов А. А. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — 6, № 5. — С. 793–795.
34. Черноушко Ф. Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 1. — С. 155–157.

35. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// *Adv. Space Res.* — 2018. — 62. — P. 142–151.
36. *Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// *Nonlinear Dyn.* — 2015. — 82. — P. 1493–1505.
37. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// *Aerospace Sci. Techn.* — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// *IEEE Access.* — 2021. — 9. — 132623–132630.
39. *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation// *Geomagnetism and Aeronomy.* — 2013. — 53, № 2. — P. 271–281.
40. *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization// *Aerospace Sci. Techn.* — 2014. — 33. — P. 92–99.
41. *Bin Zhou* Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// *Automatica.* — 2015. — 60. — P. 145–154.
42. *Brewer J. W.* Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// *IEEE Trans. Circ. Syst.* — 1978. — CAS-25, № 9. — P. 772–781.
43. *Chang A.* An algebraic characterization of controllability// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 1965. — AC-10, № 1. — P. 112–113.
44. *Cubas J., de Ruiter A.* Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// *Acta Astronaut.* — 2020. — 169. — P. 108–123.
45. *Cubas J., Farrahi A., Pindado S.* Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// *J. Guid. Control Dynam.* — 2015. — 38. — P. 1947–1958.
46. *Frik M. A.* Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// *AIAA J.* — 1970. — 8, № 10. — P. 1780–1785.
47. *Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M.* Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// *Asian J. Control.* — 2017. — 19, № 6. — P. 2028–2041.
48. *Giri D. K. and Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// *J. Guid. Control Dynam.* — 2014. — 37, № 6. — P. 1946–1960.
49. *Giri D. K., Sinha M.* Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// *J. Inst. Eng. India. Ser. C.* — 2016. — 97. — P. 279–290.
50. *Hautus M. L. J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A.* — 1969. — 72. — P. 443–448.
51. *Huang X., Yan Y.* Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// *J. Guid. Control Dynam.* — 2017. — 40, № 12. — P. 1–8.
52. *Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V.* Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// *Acta Astronaut.* — 2017. — 132. — P. 103–110.
53. *Kalenova V. I., Morozov V. M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// *Aerospace. Sci. Technol.* — 2020. — 106. — 106105.
54. *Kalman R. E.* Lectures on Controllability and Observability. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. *Laub A. J., Arnold W. F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 1984. — 29, № 2. — P. 163–165.
56. *Likins P. W.* Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// *J. Astronaut. Sci.* — 1965. — 12, № 1. — P. 18–24.
57. *Morozov V. M., Kalenova V. I.* Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// *AIP Conf. Proc.* — 2018. — 1959. — 020003.
58. *Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E.* Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// *J. Guid. Control Dynam.* — 2016. — 39. — P. 437–449.
59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// *Appl. Math. Model.* — 2017. — 46. — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// *Acta Astronaut.* — 2018. — 144. — P. 171–180.

61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// *Progr. Aerospace Sci.* — 2019. — 109. — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// *Acta Astronaut.* — 2015. — 110. — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// *Acta Astronaut.* — 2015. — 116. — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// *J. Guid. Control Dynam.* — 2001. — 24, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27. — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// *J. Guid. Control Dynam.* — 1990. — 13, № 3. — P. 506–514.
67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic field measurements// *J. Guid. Control Dynam.* — 2003. — 26, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2000. — 76, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2007. — 97, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// *J. Guid. Control Dynam.* — 2012. — 35, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// *Control Eng. Pract.* — 2005. — 13. — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// *Aerospace Sci. Technol.* — 2018. — 76. — P. 91–104.
73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — 1925. — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// *IEEE Trans. Control Syst. Techn.* — 2018. — 27, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.* — 2016. — 52, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// *Aerospace Sci. Techn.* — 2017. — 60. — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: mihailrak@mail.ru