ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 112–122
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-112-122

УДК 514.76

ОБОБЩЕННАЯ ТЕХНИКА БОХНЕРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ПРОЕКТИВНЫХ И КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2023 г. С. Е. СТЕПАНОВ, Й. МИКЕШ, И. И. ЦЫГАНОК

Аннотация. Рассматривается обобщенная техника Бохнера, являющаяся естественным развитием классической техники Бохнера. Доказаны теоремы об исчезновении для солитонов Риччи, конформных и проективных отображений полных римановых многообразий.

Ключевые слова: техника Бохнера, полное риманово многообразие, теорема об исчезновении, солитон Риччи, конформное отображение, проективное отображение.

GENERALIZED BOCHNER TECHNIQUE AND ITS APPLICATION TO THE STUDY OF PROJECTIVE AND CONFORMAL MAPPINGS

© 2023 S. E. STEPANOV, J. MIKEŠ, I. I. TSYGANOK

Abstract. In this paper, we consider the generalized Bochner technique, which is a natural development of the classical Bochner technique. As an illustration, we prove some vanishing theorems on Ricci solitons, conformal and projective mappings of complete Riemannian manifolds.

Keywords and phrases: Bochner technique, complete Riemannian manifold, vanishing theorem, Ricci soliton, conformal mapping, projective mapping.

AMS Subject Classification: 53C20

Техника Бохнера считается частью
базового словаря каждого геометра.
Хун-Си У (Hung-Hsi Wu)

1. От классической техники Бохнера к обобщенной технике Бохнера.

Прототипом *обобщенной техники Бохнера* является знаменитая *классическая техника Бохнера*, впервые предложенная С. Бохнером, К. Яно, А. Лихнеровичем и др. в 1950–1960-х гг. для изучения взаимосвязи между топологией и кривизной компактного безграничного риманова многообразия (см., например, [6]). Этот метод используется для доказательства теоремы об исчезновении для нуль-пространства оператора Лапласа, допускающего разложение Вейценбока, на компактных многообразиях (см. [1, p. 53]). В результате появилось большое количество теорем, основанных на

Работа выполнена при поддержке гранта «Алгебраические и геометрические структуры» университета им. Ф. Палацкого (проект IGA PrF 2022017).

классической технике Бохнера, утверждающих, что некоторые геометрически интересные тензорные поля и отображения обращаются в нуль в предположении положительности или отрицательности кривизны. Наиболее известными результатами классической техники Бохнера являются теорема Д. Мейера и С. Галло (см. [18]) об обращении в нуль чисел Бетти компактных римановых многообразий и теорема Дж. Эллса и Дж. Х. Сэмпсона (см. [47, p. 465]) о несуществовании гармонических отображений компактных римановых многообразий. Классическая техника Бохнера используется в многочисленных статьях, монографиях и аналитических обзорах (см., например, [1, 10, 18, 31, 41, 47, 49]). Кроме того, имеются работы, направленные на развитие классической техники Бохнера (см. [9, 32, 33]).

В настоящее время существуют две различные точки зрения на классическую технику Бохнера (см. обзорную статью [10]). Первая основана на теореме Грина о дивергенции (см. [2, 6]):

$$\int\limits_M (\operatorname{div} X)\, d\operatorname{Vol} = 0,$$

где X — гладкое векторное поле на n-мерном компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) без границы, а $d\operatorname{Vol}$ — его n-форма объема. Существует множество применений этой формулы. Например, рассмотрим солитон Риччи (ξ, λ, g), который дает автомодельное решение уравнения потока Риччи (см. [16]). Напомним, что тройка (ξ, λ, g) на n-мерном гладком многообразии M называется солитоном Риччи, если выполняется следующее уравнение:

$$-2\operatorname{Ric} = L_\xi g + 2\lambda\, g,$$

где Ric — тензор Риччи метрики g, L_ξ — производная Ли тензора g по ξ, а λ — константа (см. [16, 45]).

Для произвольного солитона Риччи (ξ, λ, g) мы получили в [41] интегральную формулу

$$\int\limits_M (\operatorname{div} X)\, d\operatorname{Vol} = 0 = \int\limits_M (-L_\xi s + (s + n\lambda)^2)\, d\operatorname{Vol}, \tag{1}$$

где $X = (\operatorname{div}\xi)\xi$. В частности, из (1) следует, что на n-мерном компактном ориентированном многообразии M не существует такого солитона Риччи, что $L_\xi s \leqslant 0$ и $L_\xi s < 0$ в некоторой точке многообразия M или, вообще говоря,

$$\int\limits_M (L_\xi s)\, d\operatorname{Vol} < 0.$$

Для этого случая сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.1. *На n-мерном компактном многообразии M не существует такого солитона Риччи (ξ, λ, g), что $L_\xi s$ полуотрицательна и отрицательна хотя бы в одной точке или, вообще говоря,*

$$\int\limits_M (L_\xi s)\, d\operatorname{Vol} < 0.$$

Кроме того, мы доказали в [5] следующее предложение.

Теорема 1.2. *Если скалярная кривизна s солитона Риччи (ξ, λ, g) на n-мерном компактном многообразии M удовлетворяет условию $L_\xi s \leqslant 0$, то g — метрика Эйнштейна.*

С другой стороны, произвольное трехмерное многообразие Эйнштейна (M, g) имеет постоянную секционную кривизну (см. [1]). Следовательно, если (ξ, λ, g) — такой сжимающийся солитон Риччи на трехмерном односвязном компактном многообразии M, что $L_\xi s \leqslant 0$, то он изометричен евклидовой сфере S^3.

В заключение напомним, что солитон Риччи называется *устойчивым*, *сжимающимся* или *расширяющимся*, если $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ или $\lambda > 0$ соответственно. Кроме того, с точностью до диффеоморфизма и в зависимости от знака λ солитон Риччи (ξ, λ, g) гомотетически сжимается, остается стационарным или расширяется под действием потока Риччи. Сжимающиеся и стационарные солитоны Риччи являются фундаментальными объектами в изучении потоков Риччи, поскольку они появляются как пределы разрушения сингулярностей.

Вторая точка зрения на классическую технику Бохнера основана на *теореме Хопфа* (см. [2,6]): каждая гармоническая (субгармоническая и супергармоническая) функция $\varphi \in C^2M$ постоянна на компактном римановом многообразии (M, g) без границы. Напомним, что функция $\varphi \in C^2M$ называется субгармонической (соответственно супергармонической или гармонической), если $\Delta\varphi \geqslant 0$ (соответственно $\Delta\varphi \leqslant 0$ или $\Delta\ varphi = 0$) для оператора Лапласа—Бельтрами $\Delta\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$.

Например, если $\varphi = 2^{-1}\|X\|^2$ и X — гармоническое векторное поле на (M, g), где $\operatorname{div} X = 0$ и $\operatorname{Alt}(\nabla X) = 0$ (см. [6]). В этом случае легко получаем

$$\Delta\,\varphi = \operatorname{Ric}(X, X) + \|\nabla X\|^2 \tag{2}$$

(см. также [6]). С другой стороны, если X — вектор Киллинга, то X порождает однопараметрическую группу изометрий многообразия (M, g). В этом случае $L_\xi g = 0$ и в силу [6] получаем равенство

$$\Delta\,\varphi = \operatorname{Ric}(X, X) - \|\nabla X\|^2. \tag{3}$$

Кривизна Риччи риманова многообразия называется *квазиположительной*, если она неотрицательна всюду и строго положительна в любом направлении (по крайней мере) в одной точке (см. [46]). Тогда из (2) следует теорема Майера о том, что первое число Бетти компактного многообразия квазиположительной кривизны Риччи равно нулю (см. [6]). С другой стороны, кривизна Риччи риманова многообразия называется *квазиотрицательной*, если она неположительна всюду и строго отрицательна в любом направлении (по крайней мере) в одной точке (см. [46]). Тогда из (3) следует, что на компактном многообразии квазиотрицательной кривизны Риччи не существует однопараметрических групп изометрий (см. [6, 46]).

Классические методы Бохнера получили существенное развитие и успешно применялись к финслеровым (см., например, обзорные статьи [48]) и лоренцевым многообразиям, включая общую теорию относительности (см., например, [4, 38, 41, 42]) за последние сорок лет.

С другой стороны, начиная с 1970-х гг. были разработаны методы геометрического анализа (см., например, монографии последних десятилетий [24, 26, 34, 35, 37]). Геометрический анализ также включает глобальный анализ, который касается изучения дифференциальных уравнений на многообразиях и связи между дифференциальными уравнениями и топологией. В 1980-е гг. К. Уленбек, К. Таубс, С.-Т. Яу, Р. Шоэн и Р. Гамильтон своими фундаментальными работами положили начало особенно интересной и продуктивной эре геометрического анализа, которая продолжается и по сей день. Выдающимся достижением стало решение Г. Перельманом гипотезы Пуанкаре, завершившее программу, инициированную и в значительной степени осуществленную Р. Гамильтоном (см. [16, 45]). Другим известным результатом является теорема С.-Т. Яу и Р. Шоэна (см. [40]), которая является обобщением теоремы Дж. Эллса и Дж. Х. Сэмпсона на случай полных римановых многообразий.

В результате почти все теоремы об исчезновении классической техники Бохнера приняли форму *теорем типа Лиувилля*. В свою очередь, новый метод исследования позже получил название *обобщенной техники Бохнера* (см., например, [35]). Среди прочего, этот метод изучает связи между геометрией полного (некомпактного) риманова многообразия и глобальным поведением его субгармонических, супергармонических и выпуклых функций в предположениях либо о кривизне, либо о росте объема геодезических шаров. Сегодня новый метод исследования не так популярен среди геометров, как классический метод Бохнера. В следующих разделах будут представлены различные практические приложения геометрического анализа.

2. Новые формы теоремы о дивергенции и их приложения к теории солитонов Риччи. В этом разделе рассмотрим новые формы, которые приняла теорема Грина в обобщенной технике Бохнера, и их приложения. А именно, существуют некоторые $L^p(M, g)$-расширения классической теоремы Грина о дивергенции на полные римановы многообразия, полученные методами геометрического анализа. Во-первых, сформулируем следующую теорему из [17].

Теорема 2.1. *Пусть (M, g) — полное риманово многообразие, а X — гладкое векторное поле на (M, g), удовлетворяющее условиям $\|X\| \in L^1(M, g)$ и $\operatorname{div} X \in L^1(M, g)$. Тогда*

$$\int_M (\operatorname{div} X)\, d\operatorname{Vol} = 0,$$

где $\|X\|$ — норма векторного поля X, индуцированная метрикой g.

Теорема 2.1 влечет следующий факт.

Следствие 2.1. *Пусть (ξ, λ, g) — солитон Риччи на таком n-мерном гладком многообразии M, что (M, g) — полное риманово многообразие, $\|\xi\| \in L^1(M, g)$ и $(s + n\lambda) \in L^1(M, g)$, где s — скалярная кривизна метрики g. Если $L_\xi s \leqslant 0$ всюду на M, то g — метрика Эйнштейна.*

Позже Л. Карп представил в [27] следующую обобщенную версию теоремы 2.11.

Теорема 2.2. *Пусть (M, g) — полное некомпактное риманово многообразие, а X — гладкое векторное поле на (M, g), удовлетворяющее условию*

$$\lim_{r\to\infty} \inf \frac{1}{r} \quad int_{B(r)/B(2r)} \|X\|\, d\operatorname{Vol} = 0$$

где $B(r)$ — геодезический шар радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке $x \in M$. Если $\operatorname{div} X$ имеет интеграл, то

$$\int_M (\operatorname{div} X)\, d\operatorname{Vol} = 0.$$

В заключение сформулируем третий окончательный вариант обобщенной теоремы Грина о дивергенции (см. [12, 13]).

Теорема 2.3. *Пусть X — такое гладкое векторное поле на связном полном, некомпактном и ориентированном римановом многообразии (M, g), что $\operatorname{div} X \geqslant 0$ (или $\operatorname{div} X \leqslant 0$) всюду на (M, g). Если норма $\|X\| \in L^1(M, g)$, то $\operatorname{div} X = 0$.*

Рассмотрим здесь приложение обобщенной теоремы о расходимости (теоремы 2.3): на основе этой теоремы в [3] была доказана следующая теорема о полном солитоне Риччи.

Теорема 2.4. *Солитон Риччи (ξ, λ, g) на n-мерном односвязном многообразии M является эйнштейновым, если g — полная метрика, $\|\xi\| \in L^1(M, g)$ и скалярная кривизна s метрики g лежит в следующих пределах*:

(i) *$s \leqslant n|\lambda|$ или $s \geqslant n|\lambda|$ для сжимающегося солитона (ξ, λ, g),*
(ii) *$s \leqslant -n|\lambda|$ или $s \geqslant -n|\lambda|$ для расширяющегося солитона (ξ, λ, g),*
(iii) *$s \leqslant 0$ или $s \geqslant 0$ для стационарного солитона (ξ, λ, g).*

Еще одно интересное приложение теоремы об обобщенной дивергенцииЁ2.3 можно найти в [44].

3. Принцип максимума Хопфа и его применение к изучению конформных и проективных отображений. Существуют различные формы принципа максимума, начиная от его классической формулировки в форме Хопфа до обобщений принципа максимума Омори—Яу на бесконечности; см. [34], где приведены приложения к ряду геометрических задач в постановке полных римановых многообразий в предположениях либо о кривизне, либо о росте объема геодезических шаров. Они составляют часть обобщенной техники Бохнера. *Принцип максимума Хопфа* в теории эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка на римановых многообразиях (см., например, [34, 36]) утверждает, что если $\Delta\varphi \geqslant 0$ и φ достигает локального максимального значения в некоторой точке, то функция φ постоянна (это классический и фундаментальный результат). Очевидно, что прототипом известной теоремы Хопфа классической техники Бохнера является принцип максимума Хопфа обобщенной техники Бохнера. Рассмотрим его приложения к классической теории конформных и проективных отображений.

Диффеоморфизм $f : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ называется *конформным отображением*, если существует такая гладкая функция σ наЁM, что $f^*\bar{g} = e^{2\sigma}g$, т. е. обратный образ метрики $\bar{g}$ пропорционален g (см. [30]). Заметим, что последние уравнения можно переписать в эквивалентной форме $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ относительно f-согласованных общих координат на M и $\bar{M}$ (см. [30]). В частности, если функция σ является константой, то $f : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ является *гомотетическим отображением.*

В этом случае, если обозначить через s и $\bar{s}$ скалярные кривизны (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно, то имеет место следующее равенство (см. [30]):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2(n-1)}\ \left(e^{-2\varphi}\ \bar{s} - s\right) + \frac{1}{2}\ (n-2)\, g\, (d\varphi, d\varphi) \tag{4}$$

при $\varphi = -\sigma$. Если предположить, что скалярные кривизны на U и $\bar{U} = f(U)$ удовлетворяют условиям $s \leqslant 0$ и $\bar{s} \geqslant 0$ соответственно, то $\Delta\varphi \geqslant 0$ для $n \geqslant 3$. В этом случае, если φ достигает локального максимального значения в некоторой точке U, то φ постоянна на U по принципу максимума Хопфа. Тогда из (4) заключаем, что σ постоянна на U. Следовательно, f — гомотетическое отображение и $s = \bar{s} = 0$ на U. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ — римановы многообразия размерности $n \geqslant 3$ со скалярными кривизнами $s \leqslant 0$ и $\bar{s} \geqslant 0$, соответственно. Предположим, что существует такой конформный диффеоморфизм $f : (U, g) \to (\bar{U}, \bar{g})$ связных областей $U \subset M$ и $\bar{U} \subset \bar{M}$, что $f^*\bar{g} = e^{2\sigma}\, g$ на U. Если функция $-\sigma$ достигает локального максимума в некоторой точке $x \in U$, то отображение f является гомотетическим; более того, (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ имеют нулевую скалярную кривизну на U и $\bar{U}$ соответственно.*

Замечание 3.1. В условиях теоремы 3.1 пусть $U = M$, M — компактное многообразие без края. Существует точка $x \in M$, в которой функция $\varphi = -\sigma$ достигает максимума. Таким образом, теоремы из [50] можно рассматривать как следствия теоремы 3.1.

С другой стороны, две римановых метрики g и $\bar{g}$ на связной области $U \subset M$ одного и того же гладкого многообразия M называются *поточечно проективно эквивалентными*, если каждая геодезическая метрики g в U является репараметризованной геодезической метрики $\bar{g}$. В этом случае имеем проективное преобразование $f : (U, g) \to (\bar{U}, \bar{g})$, которое совпадает с тождественным, вместо проективного отображения $f : (U, g) \to (\bar{U}, \bar{g})$, которое в общем случае $\bar{U} \neq U$ и f тождественным не является.

Кроме того, будем говорить, что метрики g и $\bar{g}$ поточечно аффинно эквивалентны в связной области $U \subset M$, если их связности Леви-Чивиты ∇ и $\bar{\nabla}$ совпадают. В этом случае, если обозначить через s скалярные кривизны (M, g), то справедливо следующее равенство (см. [43]):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{n-1}\ (\mathrm{trace}_g\, \overline{\mathrm{Ric}} - s) + g(d\varphi, d\varphi),$$

где $\overline{\mathrm{Ric}}$ — тензор Риччи метрики $\bar{g}$ и $\varphi = (n+1)\ \log(d\,\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\,/d\,\mathrm{Vol})$.

В [43] при помощи принципа максимума Хопфа была доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть g и $\bar{g}$ — две поточечно проективно эквивалентные римановы метрики на связной области $U \subset M$ n-мерного многообразия M, $n \geqslant 2$, для которых* trace_g *overline*$\mathrm{Ric} \geqslant$ *s в каждой точке U, где s — скалярная кривизна метрики g, а $\overline{\mathrm{Ric}}$ — тензор Риччи метрики $\bar{g}$. Из предположения, что функция $\varphi = (n+1)\log(d\,\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\,/d\,\mathrm{Vol})$ достигает локального максимального значения в некоторой точке $x \in M$, следует, что g и $\bar{g}$ проективно эквивалентны на U тогда и только тогда, когда они являются поточечно аффинно эквивалентными метриками. Кроме того, если существует хотя бы одна точка окрестности U, в которой $\mathrm{trace}_g\,\overline{\mathrm{Ric}} > s$, то $\bar{g} = g$.*

Замечание 3.2. Пусть $U = M$ и M — компактное многообразие. Тогда существует точка $x \in M$, в которой функция $\varphi = (n+1)\ \log(d\,\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\,/d\,\mathrm{Vol})$ достигает максимума. В результате мы можем сформулировать следующие утверждения, являющиеся следствием теоремы 2.1 (см. также [28, теорема 3, следствие 4] и [15, теорема 1.3]).

4. Применение супергармонических функций к изучению конформных и проективных отображений. Начнем этот раздел с краткого обзора теории *параболических многообразий*, которая связана с супергармоническими функциями и является частью *обобщенной техники Бохнера.* С понятием параболического многообразия связан широкий класс эквивалентных свойств риманова многообразия, включая *ядро Грина, линейную емкость, броуновское движение* и др. Таким образом, имеется несколько эквивалентных определений параболичности полного риманова многообразия в различных терминах (см., например, [23]).

Одна из точек зрения на это понятие такова. Напомним, что $u \in C^2M$ называется супергармонической функцией, если $\Delta u \leqslant 0$. Будем говорить, что риманово многообразие является *параболическим многообразием*, если оно не допускает непостоянных положительных супергармонических функций (см. [23, 24]). Полное риманово многообразие конечного объема является примером параболического многообразия (см. [7]).

Теорема 4.1. *Пусть (M,g) — параболическое риманово многообразие размерности $n \geqslant 3$ (в частности, полное риманово многообразие конечного объема) со скалярной кривизной $s \leqslant 0$ и $(\bar M,\ barg)$ — другое риманово многообразие со скалярной кривизной $\bar s \geqslant 0$. Если существует конформный диффеоморфизм $f:(M,g)\to(\bar M,\bar g)$, то он является гомотетическим отображением; более того, (M,g) и $(\bar M,\bar g)$ имеют нулевую скалярную кривизну.*

Доказательство. Полагая $\sigma = 2(n-2)^{-1}\log u$ для гладкой скалярной функции $u>0$, получаем из (4) уравнение

$$\Delta u = \frac{n-2}{4(n-1)}\ \left(u\,s - u^{\frac{n+2}{n-2}}\,\bar s\right). \tag{5}$$

Из (5) заключаем, что если $a \leqslant 0$ и $\bar s \geqslant 0$, то $\Delta u \leqslant 0$. В этом случае ассоциированная функция u является супергармонической функцией. □

Можно доказать теорему, аналогичную теореме 4.1 для проективных отображений (см. [8]).

Теорема 4.2. *Пусть g и $\bar g$ — такие поточечно проективно эквивалентные римановы метрики на связном некомпактном многообразии M, что (M,g) — параболическое риманово многообразие. Тогда метрики g и $\bar g$ аффинно эквивалентны, если $\operatorname{trace}_g \overline{\mathrm{Ric}} \geqslant s$ или $\operatorname{trace}_g \overline{\mathrm{Ric}} \leqslant s$ и $(d\,\mathrm{Vol}_{\bar g}/d\,\mathrm{Vol})^{1/(n+1)}$ является ограниченной функцией.*

5. Приложения субгармонических функций к изучению конформных и проективных отображений. Уравнение (5) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta u = \frac{n-2}{4(n-1)}\ \left(u\,s - u^{\frac{4}{n-2}}\,\bar s\right)u. \tag{6}$$

Если при этом скалярные кривизны (M,g) и $(\bar M,\bar g)$ удовлетворяют условиям $s \geqslant 0$ и $\bar s \leqslant 0$ соответственно, то $u \geqslant 0$. По определению функция $u \in C^2M$ называется *субгармонической*, если $\Delta u \geqslant 0$. Большое количество результатов о свойствах субгармонических функций на полных римановых многообразиях получено многими авторами, такими как Р. Грин и Х. У (Ву), А. Хубер, Л. Карп, С.-Т. Яу и др. В частности, напомним следующую известную теорему типа Лиувилля для субгармонических функций на полных римановых многообразиях: *Пусть — неотрицательная гладкая субгармоническая функция на (M,g). Тогда*

$$\int\limits_M u^p\,d\,\mathrm{Vol} = \infty$$

для любого $1<p<\infty$, если только u не является постоянной функцией (см. [52]).

Другими словами, если $u \in L^p(M,g)$ для любого $1<p<\infty$, то u является константой $C>0$ и, следовательно,

$$C^p\int\limits_M d\,\mathrm{Vol} < \infty.$$

Следовательно, если $\mathrm{Vol}(M, g) = +\infty$, то $u \equiv 0$. С другой стороны, если $u > 0$, то многообразие (M, g) должно иметь конечный объем. Напомним, что каждое полное некомпактное риманово многообразие с неотрицательной кривизной Риччи имеет бесконечный объем (см. также [52]).

Заключаем, что справедливо следующее предложение.

Предложение 5.1. *Пусть (M, g) — полное риманово многообразие бесконечного объема. Тогда оно не имеет положительной субгармонической $L^p(M, g)$-функции ни для какого $1 < p < \infty$. В частности, полное некомпактное риманово многообразие с неотрицательной кривизной Риччи не допускает положительной субгармонической $L^p(M, g)$-функции ни при каком $0 < p < \infty$.*

С другой стороны, из (6) можно заключить, что если $s \geqslant 0$ и $\bar{s} \leqslant 0$, то $\Delta u \geqslant 0$ и, следовательно, u является положительной *субгармонической функцией.* В нашем случае $u > 0$ согласно определению, данному выше, а значит, многообразие (M, g) должно иметь конечный объем. Из вышеизложенного заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть (M, g) — полное некомпактное риманово многообразие размерности $n \geqslant 3$ с $\mathrm{Ric} \geqslant 0$ и $(\bar{M}, \bar{g})$ — другое риманово многообразие с конформно связанной метрикой $f^*\bar{g} = u^{4/n-2}\, g$, где $u > 0$ — некоторая гладкая функция. Если $u \in L^p(M, g)$ при $0 < p < \infty$, то скалярная кривизна $\bar{s}$ многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ не может быть неположительной.*

Замечание 5.1. Теорема 5.1 дополняет теорему Шоэна (см. [39]). Можно доказать теорему, аналогичную теореме 4.1, для проективных отображений (см. [8]).

6. Приложение выпуклых функций к изучению конформных и проективных отображений. Выпуклые функции являются примером субгармонических функций. В римановой геометрии выпуклые функции использовались, например, при исследовании структуры некомпактных многообразий положительной кривизны Чигером, Грином, Громоллом, Мейером, Сиохамой, Ву и др. (см. [14, 19–22, 25]). Существование глобальных выпуклых функций на римановом многообразии имеет серьезные геометрические и топологические последствия. Например (см. [22]), каждое риманово многообразие размерности 2, допускающее глобальную локально непостоянную выпуклую функцию, должно быть диффеоморфно плоскости, цилиндру или открытой полосе Мёбиуса.

Напомним, что $u \in C^2M$ называется *выпуклой функцией*, если ее гессиан $\mathrm{Hess}_g\, u := \nabla\, du$ положительно полуопределен. Используя данное определение и некоторые факты теории выпуклых функций, можно сформулировать и доказать следующую теорему и ее следствие.

Теорема 6.1. *Пусть $f : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ — такой негомотетичный конформный диффеоморфизм полных римановых многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$, что $f^*\bar{S} \geqslant S$ для тензоров Схоутена S и $\bar{S}$ многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно. Тогда многообразие (M, g) имеет бесконечный объем.*

Доказательство. Пусть $f : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ — такой конформный диффеоморфизм, что $f^*\bar{g} = e^{2\sigma}\, g$. Обозначим через S тензор Схоутена многообразия (M, g), который вводится следующими тождествами:

$$S = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{s}{2(n-1)}\, g\right). \tag{7}$$

Тензор Схоутена часто появляется в конформной геометрии из-за его относительно простого закона конформного диффеоморфизма:

$$\bar{S} = S - \nabla\, d\sigma + d\sigma \otimes d\sigma - \frac{1}{2}\, g\,(d\sigma + d\sigma, d\sigma)\, g. \tag{8}$$

В этом случае уравнения (8), определенные на (M, g), можно переписать в виде

$$\mathrm{Hess}_g\, \sigma = S - \bar{S} + d\sigma \otimes d\sigma - \frac{1}{2}\, g\,(d\sigma + d\sigma, d\sigma)\, g. \tag{9}$$

С другой стороны, полагая $\sigma = -\ln u$ для ассоциированной функции $u > 0$, получим $\bar{g} = u^{-2}\, g$. В этом случае уравнение (9) можно переписать в виде

$$\operatorname{Hess}_g u = u \cdot (\bar{S} - S) + \frac{1}{2}\, u\, g(du, du) \cdot g. \tag{10}$$

Из (10) заключаем, что если $\bar{S} \geqslant S$, то $\operatorname{Hess}_g u \geqslant 0$. В этом случае u — выпуклая функция. С другой стороны, теорема Яу утверждает, что полное риманово многообразие, допускающее непостоянную выпуклую функцию, имеет бесконечный объем (см. [51]). Следовательно, теорема верна. $\square$

С другой стороны, хорошо известна следующая теорема Бишопа и О'Нила: *Если (M, g) — связное полное риманово многообразие конечного объема, то все выпуклые функции на (M, g) постоянны* (см. [11]). В этом случае, принимая во внимание теорему 6.1, можем заключить, что имеет место следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Пусть $f : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ — конформный диффеоморфизм полного риманова многообразия (M, g) конечного объема на другое риманово многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$. Если $f^*\bar{S} \geqslant S$ для тензоров Схоутена S и $\bar{S}$ многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно, то f является гомотетическим отображением.*

Замечание 6.1. Из неравенства $\bar{S} \geqslant S$ получаем, что $e^{2\sigma}\, \bar{s} \geqslant s$. Следовательно, если $\bar{s} \geqslant 0$ и $s \leqslant 0$, то выполняется второе неравенство.

С другой стороны, пусть g и $\bar{g}$ — две поточечно проективно эквивалентные римановы метрики на n-мерном $(n \geqslant 2)$ C^∞-многообразии M; тогда выполняется уравнение

$$\operatorname{Hess}_g \varphi = \frac{1}{n-1}\, (\overline{\operatorname{Ric}} - \operatorname{Ric}) + d\varphi \otimes d\varphi \tag{11}$$

(см. [43]), где $\varphi = (n+1) \log(d \operatorname{Vol}_{\bar{g}} / d \operatorname{Vol})$. В этом случае, если $\overline{\operatorname{Ric}} \geqslant \operatorname{Ric}$, то $\operatorname{Hess}_g \varphi \geqslant 0$. Используя данное определение и известные факты теории выпуклых функций, можем сформулировать следующую теорему и ее следствие.

Теорема 6.2. *Пусть g и $\bar{g}$ — такие две поточечно проективно эквивалентные римановы метрики на n-мерном $(n \geqslant 2)$ многообразии M, что $\overline{\operatorname{Ric}} \geqslant \operatorname{Ric}$, где Ric и $\overline{\operatorname{Ric}}$ — тензоры Риччи многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно. Тогда (M, g) имеет бесконечный объем.*

Следствие 6.2. *Пусть (M, g) — полное риманово многообразие конечного объема, а $\bar{g}$ — другая риманова метрика на M такая, что g и $\bar{g}$ — две поточечно проективно эквивалентные римановы метрики. Если $\overline{\operatorname{Ric}} \geqslant \operatorname{Ric}$, где Ric и $\overline{\operatorname{Ric}}$ — тензоры Риччи многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно, то g и $\bar{g}$ — две аффинно эквивалентные римановы метрики на M.*

Односвязное полное риманово многообразие неположительной кривизны называется *многообразием Адамара* (ср. теорему Картана—Адамара: *Пусть (M, g) — n-мерное $(n \geqslant 2)$ односвязное полное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Тогда (M, g) диффеоморфно евклидову пространству R^n*. В частности, не существует компактных односвязных многообразий, допускающих такую метрику. Далее, пусть $X \in T_xM$ — единичный вектор; дополним его до ортонормированного базиса $\{X, e_2, \ldots, e_n\}$ касательного пространства T_x в произвольной точке $x \in M$. Тогда

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{a=2}^{n} \sec(X \wedge e_a).$$

В этом случае из условия $\sec \leqslant 0$ получаем $\operatorname{Ric} \leqslant 0$, т. е. кривизна Риччи (M, g) неположительна. Если $\bar{g}$ — другая риманова метрика на (M, g), для которой $\overline{\operatorname{Ric}} \geqslant 0$ всюду на M и $\bar{g}$ поточечно проективно эквивалентна римановой метрике g, то получаем $\operatorname{Hess}_g \varphi \geqslant 0$. Тогда функция φ субгармоническая. В то же время известно (см. [29]), что на полном односвязном римановом многообразии (M, g) неположительной секционной кривизны любая неотрицательная субгармоническая L^p-функция является константой C для любого $p \in (0, \infty)$. Поскольку объем многообразия Адамара (M, g) бесконечен, находим $C = 0$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6.3. *Пусть (M, g) — многообразие Адамара. Не существует другой римановой метрики $\bar{g} \neq g$ на M такой, что*

(i) *$\bar{g}$ поточечно проективно эквивалентна g;*
(ii) $\overline{\mathrm{Ric}} \geqslant 0$;
(iii) $d\,\mathrm{Vol}_{\bar{g}} \geqslant d\,\mathrm{Vol}$;
(iv) $\varphi = (n+1)\log(d\,\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\,/d\,\mathrm{Vol})$ *является L^p-функцией для некоторого $p \in (0, \infty)$.*

Хорошо известно, что скалярная кривизна (M, g) определяется формулой

$$s = \mathrm{trace}_g \,\mathrm{Ric} = 2 \sum_{i<j} \sec(e_i, e_j),$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис в $T_x M$ при произвольном $x \in M$. В этом случае из условия $\sec \leqslant 0$ получаем $s \leqslant 0$, т. е. скалярная кривизна (M, g) неположительна. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.4. *Пусть (M, g) — многообразие Адамара. Не существует другой римановой метрики $\bar{g} \neq g$ на M такой, что*

(i) *$\bar{g}$ поточечно конформно эквивалентна g, т. е. $\bar{g} = e^{2\sigma} g$;*
(ii) $\bar{s} \geqslant 0$;
(iii) *σ — неотрицательная L^p-функция для некоторого $p \in (0, \infty)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бессе А. Л.* Многообразия Эйнштейна. В 2 тт.. — М.: Мир, 1990.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. В 2 тт.. — М.: Наука, 1981.
3. *Степанов С. Е., Цыганок И. И.* Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи на полных римановых многообразиях// Изв. вузов. Мат. — 2010. — № 3. — С. 97–101.
4. *Степанов С. Е., Цыганок И. И.* Полная минимальная гиперповерхность в пространстве де Ситтера первого рода// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2018. — *49*. — С. 153–156.
5. *Степанов С. Е., Шелепова В. Н.* Заметка о солитонах Риччи// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 3. — С. 474–477.
6. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. — ИЛ, 1957.
7. *Adams S. R.* Superharmonic functions on foliations// Trans. Am. Math. Soc. — 1992. — *330*, № 2. — P. 625–635.
8. *Aleksandrova I. A., Mikeš J., Stepanov S. E., Tsyganok I. I.* Liouville type theorems in the theory of mappings of complete Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2017. — *221*, № 6. — P. 737–744.
9. *Almira J. M., Romero A.* A new proof of a classical result on the topology of orientable connected and compact surfaces by means of the Bochner technique// Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino. — 2019. — *77*, № 1. — P. 131–136.
10. *Berard P. H.* From vanishing theorems to estimating theorems: the Bochner technique revisited// Bull. Am. Math. Soc. — 1988. — *19*, № 2. — P. 371–406.
11. *Bishop R. L., O'Neil B.* Manifolds of negative curvature// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *145*. — P. 1–9.
12. *Caminha A.* The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces// Bull. Braz. Math. Soc. — 2011. — *42*, № 2. — P. 277–300.
13. *Caminha A., Souza P., Camargo F.* Complete foliations of space forms by hypersufaces// Bull. Braz. Math. Soc. — 2010. — *41*, № 3. — P. 339–353.
14. *Cheeger J., Gromoll D.* On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature// Ann. Math. — 1972. — *96*. — P. 413–443.
15. *Chen X., Shen Z.* A comparison theorem on the Ricci curvature in projective geometry// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2003. — *23*. — P. 141–155.
16. *Chow C., Lu P., Ni L.* Hamilton's Ricci Flow. — Beijing–New York: Am. Math. Soc., 2006.
17. *Gaffney M. P.* A special Stokes's theorem for complete Riemannian manifolds// Ann. Math. 2 Ser. — 1954. — *60*, № 1. — P. 140–145.

18. *Gallot S., Meyer D.* Operateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une varieté riemannianne// J. Math. Pures. Appl. — 1975. — *54.* — P. 259–284.
19. *Greene R. E., Wu H.* On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions// Indiana Univ. Math. J. — 1972/73. — *22.* — P. 641–653.
20. *Greene R. E., Wu H.* C^∞ convex functions and manifolds of positive curvature// Acta Math. — 1976. — *137*, № 3-4. — P. 209–245.
21. *Greene R. E., Shiohama K.* Convex functions on complete noncompact manifolds: topological structure// Invent. Math. — 1981. — *63*, № 1. — P. 129–157.
22. *Greene R. E., Shiohama K.* Convex functions on complete noncompact manifolds: differentiable structure// Ann. Sci. Ec. Norm. Super. — 1982. — *14*, № 4. — P. 357–367.
23. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds// Bull. Am. Math. Soc. — 1999. — *36*, № 2. — P. 135–249.
24. *Grigor'yan A.* Heat Kernel and Analysis on Manifolds. — Boston: Am. Math. Soc., 2009.
25. *Gromoll D., Meyer W.* On complete open manifolds of positive curvature// Ann. Math. — 1969. — *90.* — P. 75–90.
26. *Jost J.* Riemannian Geometry and Geometric Analysis. — Springer, 2005.
27. *Karp L.* On Stokes' theorem for noncompact manifolds// Proc. Am. Math. Soc. — 1981. — *82*, № 3. — P. 487–490.
28. *Kim S.* Volume and projective equivalence between Riemannian manifolds// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2005. — *27.* — P. 47–52.
29. *Li P., Schoen R.* L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds// Acta Math. — 1984. — *153*, № 1. — P. 279–301.
30. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2019.
31. *Petersen P.* Riemannian Geometry. — New York: Springer, 2016.
32. *Petersen P., Wink M.* The Bochner technique and weighted curvatures// SIGMA. — 2020. — *16.* — 064.
33. *Petersen P., Wink M.* New curvature conditions for the Bochner technique// Invent. Math. — 2021. — *224*, № 1. — P. 33–54.
34. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2005.
35. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. A Generalization of the Bochner Technique. — Berlin: Birkhäuser Verlag, 2008.
36. *Pucci P., Serrin J.* The strong maximum principle revisited// J. Differ. Eqs. — 2004. — *196*, № 1. — P. 1–66.
37. *Richard S., Yau S.-T.* Lectures on Differential Geometry. — Boston: International Press, 2010.
38. *Romero A.* The introduction of Bochner's technique on Lorentzian manifolds// Nonlin. Anal. — 2001. — *47.* — P. 3047–3059.
39. *Schoen R.* Conformal deformation of a Riemannian metric to constant curvature// J. Differ. Geom. — 1984. — *20.* — P. 479–495.
40. *Schoen R., Yau S.-T.* Lectures on Harmonic Maps. — Boston: International Press, 1994.
41. *Stepanov S. E.* Vanishing theorems in affine, Riemann and Lorentzian geometries// J. Math. Sci. — 2007. — *141*, № 1. — P. 929–964.
42. *Stepanov S. E., Mikeš J.* The generalized Landau-Raychaudhuri equation and its applications// Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2015. — *12*, № 8. — 1560026.
43. *Stepanov S. E., Mikeš J.* Application of the Hopf maximum principale to the theory of geodesic mappings// Kraguevac J. Math. — 2021. — *45*, № 5. — P. 781–786.
44. *Stepanov S. E., Tsyganok I. I.* A remark on the mixed scalar curvature of a manifold with two orthogonal totally umbilical distributions// Adv. Geom. — 2019. — *19*, № 3. — P. 291–296.
45. *Topping P.* Lectures on the Ricci Flow. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
46. *Wu H.-H.* A remark on the Bochner technique in differential geometry// Proc. Am. Math. Soc. — 1980. — *78*, № 3. — P. 403–408.
47. *Wu H.-H.* The Bochner Technique in Differential Geometry. — Harwood Academic, 1988.

48. *Xiao J., Qiu C., Zhong T.* Bochner–Kodaira techniques on Kähler Finsler manifolds// Chin. Ann. Math. Ser. B. — 2015. — *36*, № 1. — P. 125–140.
49. *Yano K.* Integral Formulas in Riemannian Geometry. — New York: Marcel Dekker, 1970.
50. *Yau S.-T.* Remarks on conformal transformations// J. Differ. Geom. — 1973. — *8*. — P. 369–381.
51. *Yau S.-T.* Non-existence of continuous convex functions on certain Riemannian manifolds// Math. Ann. — 1974. — *207*. — P. 269–270.
52. *Yau S.-T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry// Indiana Univ. Math. J. — 1976. — *25*. — P. 659–670.
53. *Yau S.-T.* On the heat kernel of a complete Riemannian manifold// J. Math. Pures Appl. — 1978. — *57*, № 2. — P. 191–201.

Степанов Сергей Евгеньевич
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва;
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: `stepanov@fi.ru`

Mikeš Josef
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: `josef.mikes@upol.cz`

Цыганок Ирина Ивановна
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: `tsy@fi.ru`