ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 123–127
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-123-127

УДК 514.83

О МАГНИТОСТАТИКЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

© 2023 г. А. М. ТРЕПАЛИН

Аннотация. Кинематическим путем получен аналог закона Био—Савара в пространстве Лобачевского. Найдено выражение для силы Лоренца при движении заряда в случае наличия электрического и магнитного полей и показано, что работа совершается только электрическими силами. Доказано, что выполняется теорема Пойнтинга. Также решена циклотронная задача.

***Ключевые слова*:** пространство Лобачевского, магнитное поле.

ON MAGNETOSTATICS IN THE LOBACHEVSKY SPACE

© 2023 A. M. TREPALIN

Abstract. An analog of the Biot–Savart law in the Lobachevsky space is obtained by a kinematic method. We find an expression for the Lorentz force in the case where a charge moves in electric and magnetic fields and prove the work is done only by electric forces. The Poynting theorem is proved and the cyclotron problem is solved.

***Keywords and phrases*:** Lobachevsky space, magnetic field.

***AMS Subject Classification*:** 53Z05

Пространство Лобачевского будем мыслить реализованным внутри абсолюта с уравнением

$$(xx) = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0. \tag{1}$$

Проективное пространство P_3, реализующее L_3, будем считать нормализованным по Нордену полярно при помощи абсолюта (1). Радиус кривизны пространства обозначим k. Вектор пространства Лобачевского будем изображать точкой пересечения прямой действия вектора с полярой точки приложения. При этом если A изображает вектор $\boldsymbol{a}$, то

$$(AA) = -k^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}).$$

При развитии магнитостатики будем исходить из закона Био—Савара. Рассмотрим этот закон в евклидовом случае. В E_3 индукция магнитного поля, создаваемого элементом тока $Id\boldsymbol{l}$, задается формулой:

$$d\boldsymbol{b} = \frac{I}{c}\frac{[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{R}]}{R^3}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{R}$ — вектор, соединяющий элемент тока в точке x с точкой наблюдения y. Но вектор $[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{R}]$ приложен в точке x, а в точку y он попадает после параллельного переноса. Поскольку в пространстве ненулевой кривизны результат переноса зависит от пути, то подобная процедура в L_3 не является корректной. Поэтому взглянем на формулу (2) с другой стороны. Рассмотрим вектор $(I/c)d\boldsymbol{l}$ как «угловую скорость» вращения вокруг прямой, по которой направлен вектор $d\boldsymbol{l}$. Тогда $d\boldsymbol{B}$ получается из поля скоростей точек пространства умножением на нормирующую функцию $1/R^3$. Подобное построение возможно и в пространстве Лобачевского. Поскольку всякий реальный постоянный ток должен быть замкнут, положим

$$b_i = \frac{I}{c}\oint\limits_L (x\,dx\,yy_i)f[(x,y)]. \tag{3}$$

Здесь x — точка контура L, y — точка наблюдения, b_i — ковариантные координаты вектора $\boldsymbol{b}$ магнитной индукции в натуральном репере $\boldsymbol{\partial}/\partial u^i$, $y_i = \partial y/\partial u^i$, f зависит только от расстояния между точками x и y.

Покажем, что подынтегральное выражение в (3) пропорционально скорости точки y при вращении вокруг прямой $\{x, dx\}$ с угловой скоростью $d\boldsymbol{l}$, где $d\boldsymbol{l}$ — вектор элементарного смещения по контуру. Действительно, пусть

$$\tilde{V}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, x^\beta dx^\gamma y^\delta = [dx\,y]_{\alpha\beta}x^\beta \tag{4}$$

— ковектор плоскости, полярной точке V, которая изображает вектор $\boldsymbol{v}$ — скорость точки y. Вследствие (4) имеем

$$(VV) = -k^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = k^2((dx,dx)((xy)^2-1)-(y,dx)^2).$$

Далее, пусть z — точка прямой $\{x,y\}$, сопряженная точке x, $(z,z)=-1$. Имеем

$$y = \operatorname{ch}\frac{R}{k}x + \operatorname{sh}\frac{R}{k}z,$$

где R — расстояние между точками x и y. Пусть φ — угол между прямыми $\{x,dx\}$ и $\{x,y\}$; тогда

$$\boldsymbol{v}^2 = k^2\operatorname{sh}^2\frac{R}{k}\sin^2\varphi dl^2.$$

Функцию f определим из уравнений Максвелла, которые в данном случае принимают вид $\partial_{[k}b_{i]} = 0$. Условие $\nabla_k b^k = 0$ выполняется при любом выборе функции f. Дифференцируя (3) по u^k и альтернируя, найдем

$$ddd\partial_{[k}b_{i]} = \oint\limits_L ((x\,dx\,y_{[k}y_{i]})f + (xy_k)(x\,dx\,yy_i)f').$$

Штрихом обозначена производная от f по аргументу. Пусть S — ориентируемая поверхность, натянутая на контур L. Преобразуя интеграл по формуле Стокса, получим

$$\begin{multline}\partial_{[k}b_{i]} = \iint\limits_S \Big(f\big(dx\wedge dx\,y_{[k}y_{i]}\big) + f'\big[(dx\,y)\wedge\big(x\,dx\,y_{[k}y_{i]}\big) + (dx\,y_k)\wedge(x\,dx\,yy_i) + \\ + (xy_k)(dx\wedge dx\,yy_i)\big] + f'[(xy_k)(dx\,y)\wedge(x\,dx\,yy_i)]\Big). \tag{5}\end{multline}$$

Воспользуемся тождеством [1]

$$[[xyz]\xi]_{\alpha\beta} = \langle x,\xi\rangle[yz]_{\alpha\beta} + \langle y,\xi\rangle[zx]_{\alpha\beta} + \langle z,\xi\rangle[xy]_{\alpha\beta}.$$

Тогда

$$(dxy)\wedge\big(x\,dx\,y_{[k}y_{i]}\big) = \frac{1}{2}(xy)\big(y_{[k}y_{i]}dx\wedge dx\big), \tag{6}$$

$$(dx\,y_k)\wedge(x\,dx\,yy_i) = \frac{1}{2}(xy_k)(yy_i\,dx\wedge dx), \tag{7}$$

$$(dx\,y)\wedge(x\,dx\,yy_i) = \frac{1}{2}(xy)(yy_i\,dx\wedge dx) - \frac{1}{2}(xy_i\,dx\wedge dx). \tag{8}$$

Подставляя (6)—(8) в (5), найдем

$$\partial_{[k}b_{i]} = \iint\limits_S \Bigg(f\big(y_{[k}y_{i]}dx \wedge dx\big) + \\ + f' \left[\frac{1}{2}(xy)\big(y_{[k}y_{i]}dx \wedge dx\big) + \frac{3}{2}(xy_k)\big(yy_i\,dx \wedge dx\big)\right] + \\ + \frac{1}{2}f''\big[(xy_k)(xy)\big(yy_i\,dx \wedge dx\big) - \big(xy_i\,dx \wedge dx\big)\big]\Bigg).$$

Пусть n — точка нормали к поверхности S, сопряженная точке x, $(n,n) = -1$. Тогда

$$y = \lambda x + \mu n + \pi^s x_s, \quad y_i = \lambda_i x + \mu_i n + \pi_i^s x_s,$$

где $x_s = \partial x/\partial u^s$, $s = 1,2$ — точки в касательной плоскости к S, сопряженные точке x. При этом $\lambda = (yx)$, $\mu = (yn)$, $\lambda_i = (y_i x)$, $\mu_i = (y_i n)$. Учитывая эти соотношения, получим

$$\partial_{[k}b_{i]} = \iint\limits_S \left(2f + \frac{5}{2}f'\lambda + \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)f''\right)\mu_{[i}\lambda_{k]}(xn\,dx \wedge dx).$$

Поскольку последний интеграл должен обращаться в нуль при любом выборе контура L, то

$$f''(\lambda^2 - 1) + 5\lambda f' + 4f = 0.$$

Это уравнение имеет одним из решений

$$f_1(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1)^{-3/2}.$$

Положим

$$b_i = \frac{I}{c}\oint\limits_L \frac{(xy)(x\,dx\,yy_i)}{[(xy)^2 - 1]^{3/2}}. \tag{9}$$

Выбор $f = (I/c)f_1$ определяется тем, что в этом случае, как и в евклидовой магнитостатике,

$$b_i = -\frac{I}{c}\frac{d\Omega}{du^i}, \tag{10}$$

где Ω — телесный угол, под которым виден контур L из точки наблюдения. Действительно,

$$\Omega = \iint\limits_S \frac{\cos\alpha}{k^2 \operatorname{sh}\frac{r}{k}}dS.$$

Здесь α — угол между нормалью к S и прямой $\{x,y\}$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\cos\alpha = -\frac{(n,y)}{[(xy)^2 - 1]^{1/2}}.$$

Далее, $dS = -\frac{1}{2}k^2(xn\,dx \wedge dx)$. Отсюда

$$\Omega = \frac{1}{2}\iint\limits_S \frac{(y,n)(xn\,dx \wedge dx)}{[(xy)^2 - 1]^{3/2}}.$$

Взяв производную от этого выражения и преобразуя интеграл (9) по формуле Стокса, обнаружим совпадение полученных выражений.

Из (10), в частности, сразу следует, что замкнутый линейный ток эквивалентен магнитному листку мощности I/c, так как скалярный потенциал равномерно распределенного дипольного момента пропорционален телесному углу, под которым видна поверхность из точки наблюдения. В качестве примера применения формулы (9) найдем магнитное поле на оси кругового тока радиуса R на расстоянии h от его плоскости. Возьмем плоскость тока за $\{e_1, e_2, e_4\}$ автополярного тетраэдра, поместив вершину e_4 в центр круга. Тогда в цилиндрических координатах

$$(x_\alpha) = \left(\operatorname{sh}\frac{R}{k}\cos\varphi,\ \operatorname{sh}\frac{R}{k}\sin\varphi,\ 0,\ \operatorname{ch}\frac{R}{k}\right), \quad (y_\alpha) = \left(0,\ 0,\ \operatorname{sh}\frac{h}{k},\ \operatorname{ch}\frac{h}{k}\right),$$

$$(dx_\alpha) = \left(-\operatorname{sh}\frac{R}{k}\sin\varphi,\ \operatorname{sh}\frac{R}{k}\cos\varphi,\ 0,\ 0\right)d\varphi,$$

найдем

$$\tilde{B}_\alpha = \frac{I}{c}\oint\limits_L [x\,dx\,y]_\alpha \frac{(x,y)}{[(xy)^2-1]^{3/2}} = \frac{2\pi I}{c}\frac{\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}^2\frac{R}{k}\operatorname{ch}\frac{R}{k}}{\left[\operatorname{ch}^2\frac{h}{k}\operatorname{ch}^2\frac{R}{k}-1\right]^{3/2}}\left(0,\ 0,\ -\operatorname{ch}\frac{h}{k},\ \operatorname{sh}\frac{h}{k}\right).$$

Ковектор $\tilde{B}_\alpha$ изображает вектор магнитной индукции. В локальных координатах будем иметь

$$\boldsymbol{b} = \frac{2\pi I}{ck^2}\frac{\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}^2\frac{R}{k}\operatorname{ch}\frac{R}{k}}{\left[\operatorname{ch}^2\frac{h}{k}\operatorname{ch}^2\frac{R}{k}-1\right]^{3/2}}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial h}.$$

Отметим, что магнитное поле кругового тока бесконечно большого радиуса, в противоположность евклидову случаю, не исчезает.

Положим, что силовой винт, который определяет действие магнитного поля, изображаемого ковектором $\tilde{B}_\alpha$, на элемент тока $(I/c)dy$, задается формулой

$$dF_{\alpha\beta} = \frac{Ik}{c}(\tilde{B}_\alpha\,d\tilde{y}_\beta - \tilde{B}_\beta\,d\tilde{y}_\alpha); \tag{11}$$

$dF_{\alpha\beta}$ соответствует векторному произведению векторов $\boldsymbol{b}$ и $(I/c)d\boldsymbol{l}$. В силу (8) винт, определяющий взаимодействие двух контуров с токами I_1 и I_2, имеет вид

$$F^{12}_{\alpha\beta} = k\frac{I_1I_2}{c^2}\oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2}\Big((x\,dy)[dx\,y]_{\alpha\beta} + (dx\,dy)[yx]_{\alpha\beta}\Big)\frac{(xy)}{[(xy)^2-1]^{3/2}}, \tag{12}$$

где $x \in L_1$, $y \in L_2$. Определение (12) удовлетворяет закону равенства действия и противодействия.

Найдем силу взаимодействия магнитного поля с движущимся зарядом (силу Лоренца). Элемент тока будет иметь вид

$$I\,d\boldsymbol{l} = dQ\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{v}\rho\,d\Omega = \boldsymbol{J}d\Omega.$$

Здесь $\boldsymbol{J}$ — плотность тока, $\boldsymbol{v}$ — скорость заряда, ρ — плотность заряда, $d\Omega$ — элемент объема. Перепишем формулу (11) в виде

$$F_{\alpha\beta} = \frac{k}{c}(\tilde{B}_\alpha\tilde{V}_\beta - \tilde{B}_\beta\tilde{V}_\alpha)dQ,$$

где V — точка, изображающая вектор $\boldsymbol{v}$. Она совпадает с точкой J, изображающей вектор $\boldsymbol{J}$ и отличается от нее нормированием.

Рассмотрим случай, когда имеется как электрическое, так и магнитное поле. Тогда силовой винт, действующий на элементарный заряженный объем $d\Omega$, движущийся со скоростью $\boldsymbol{v}$, будет выглядеть следующим образом:

$$F_{\alpha\beta} = F^E_{\alpha\beta} + F^M_{\alpha\beta} = \rho\left(-[Ey]_{\alpha\beta} + \frac{k}{c}[\tilde{B}\tilde{V}]_{\alpha\beta}\right)d\Omega$$

или

$$F_{\alpha\beta} = Q\left(-[Ey]_{\alpha\beta} + \frac{k}{c}[\tilde{B}\tilde{V}]_{\alpha\beta}\right).$$

Найдем работу, совершаемую над зарядом Q при элементарном перемещении, задаваемом кинематическим винтом $v^{\alpha\beta}\delta t$ электромагнитным полем (см. [2]):

$$\delta A = -\frac{k^2}{2}F^{\alpha\beta}\tilde{v}_{\alpha\beta}\delta t = -k^2Q(E, dy).$$

Таким образом, работа совершается только электрическим полем.

Если система стационарна, то вся совершенная работа должна рассеиваться в виде тепла. Плотность выделяемой мощности

$$q = -k^2(EJ) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{J}).$$

Отсюда, как и в евклидовом случае, применением уравнений Максвелла получается теорема Пойнтинга:

$$q = -\frac{\partial W}{\partial t} - \operatorname{div} \boldsymbol{S},$$

где

$$W = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2), \quad \boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}]$$

— плотность энергии электромагнитного поля и плотность потока электромагнитной энергии соответственно.

Рассмотрим теперь задачу о движении заряда в магнитном поле, задаваемым во всех точках плоскости в пространстве Лобачевского одним и тем же вектором B^α, перпендикулярным плоскости. Предположим, что начальный вектор скорости частицы лежит в плоскости. Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости, то в качестве траектории частицы естественно рассмотреть ортогональные траектории пучка прямых, и таких пучков будет три. Система уравнений, описывающая движение частицы, имеет вид

$$\frac{\delta u^i}{dt} = f^i = g^{il}\varepsilon_{lsk}u^s b^k.$$

Решая эту систему в орициклических, полярных и декартовых (эквидистантных) координатах, найдем: если $b = \dfrac{mv}{kq}$, то движение происходит по орициклу, если $b > \dfrac{mv}{kq}$ — по окружности, и если $b < \dfrac{mv}{kq}$ — по эквидистанте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Широков П. А.* Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны// In memoriam N. I. Lobatschevskii. — 1927. — *2*. — С. 119—134.
2. *Широков А. П.* Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1963. — *123*, № 1. — С. 196–207.

Трепалин Александр Михайлович
Марийский государственный университет, Йошкар-Ола
E-mail: trefa50@mail.ru